

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки
Факультет Інфокомунікацій
Кафедра Вищої математики

КОМПЛЕКС НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

навчальної дисципліни

_____ **ВИЩА МАТЕМАТИКА (для прискореної форми навчання)** _____
(назва дисципліни)

Спеціальність _____ **172 – «Телекомунікації та радіотехніка»**
_____ (шифр і назва спеціальності)

Освітньо-
наукова/професійна _____ **«Інформаційно-мережна інженерія»**
програма _____ (повна назва програми)

Рівень вищої освіти _____ **бакалаврський** _____

Розробник: Н.С.Бутенко, старший викладач каф. ВМ

Схвалено на засіданні кафедри ВМ

Протокол №1 від « 01 » __вересня__ 2021 р.

Харків 2021 р.

ЗМІСТ

1	Робоча програма.....	3
2	Анотації навчальних посібників.....	24
3	Методичні вказівки до самостійної роботи.....	35
4	Методичні вказівки до практичних занять.....	51
5	Методичні вказівки до контрольних завдань.....	110
6	Екзаменаційні запитання.....	161

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ Інфокомунікацій
Кафедра _____ Вищої математики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан факультету ІК

_____ (СНІГУРОВ А.В.)

“_ 17 _” _ 10 _____ 2019р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

_____ **Вища математика** (для прискореної форми навчання)
(назва навчальної дисципліни)

Рівень вищої освіти _____ бакалаврський

спеціальність _____ 172 – телекомунікації та радіотехніка
(шифр і назва спеціальності)

Освітньо-професійна програма «Інформаційно-мережна інженерія»

Харків – 2019 рік

Розробник: Бутенко Н.С., старший викладач кафедри вищої математики

Робочу програму схвалено на засіданні кафедри вищої математики.

Протокол від “__01__” __10__ 2019 року № __3__

Завідувач кафедри ВМ _____ (Нерух О.Г.)
(підпис) (прізвище, ініціали)

Керівник групи забезпечення спеціальності _____ (Москалець М.В.)
(підпис) (прізвище, ініціали)

Схвалено методичною комісією факультету ІК _____

Протокол від “__16__” __10__ 2019 р. № __3__

Голова методичної комісії _____ Чеботарьова Д.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

1 ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Характеристика навчальної дисципліни	
	денна форма навчання	
Кількість кредитів ЄКТС __ 8__	Обов'язкова	
Модулів _ 2__	Рік підготовки:	
Змістових модулів: 4	1-й	
Індивідуальних завдань: ІДЗ – 4 КР – 1 курс. робота __ - ____	Семестр	
Загальна кількість годин: 240	1-й	
	Кількість годин	
	240	
	Навчальні заняття: 1) лекції, год	
Мова навчання <u>українська</u>	46	
	2) практичні, год	
	48	
	3) лабораторні, год	
	4) консультації, год	
	16	
	Самостійна робота, год	
	130	
	в тому числі: 1) ІДЗ та КР (16+4)	
	2) курсова робота, год	
	Вид контролю:	
	Іспит	

2 МЕТА ДИСЦИПЛІНИ ТА ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ З ЇЇ ВИВЧЕННЯ

2.1. Мета вивчення дисципліни «Вища математика»:

- знайомство студентів з сучасними математичними теоріями і методами, оволодіння студентами необхідним математичним апаратом, що допомагає аналізувати, моделювати та розв'язувати комп'ютерні та прикладні інженерні задачі;
- розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів;
- виховання у студентів уміння самостійно поширювати свої математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних задач;
- формування інтегральної компетентності щодо здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі під час професійної діяльності в галузі інформаційних технологій.

Згідно професійно-освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія» курс вищої математики застосовується для формування наступного програмного результату навчання: знати і розуміти наукові і математичні положення, що лежать в основі функціонування комп'ютерних засобів, систем та мереж, розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у галузі забезпечення технологій та комп'ютерних засобів мультімедіа (ЗК1, ЗК2, ЗК7).

2.2 Результати навчання:

За результатами вивчення дисципліни студенти повинні:

знати: визначення похідної функції в точці, диференціала функції, таблицю похідних і правила диференціювання; схему дослідження функції і побудови графіка функції; означення первісної, невизначеного інтеграла, основні властивості невизначеного інтеграла, таблицю невизначених інтегралів; означення визначеного інтеграла, формулу Ньютона-Лейбніца, основні властивості визначеного інтеграла; застосування визначеного інтеграла; означення функції багатьох змінних, її частинні похідні та диференціали; частинні похідні складеної функції багатьох змінних; локальні та умовні екстремуми функції; комплексні числа і дії над ними; означення збіжності числових рядів, основні ознаки збіжності; означення області збіжності функціонального ряду; радіус збіжності степеневому ряду; розкладання основних елементарних функцій в степеневий ряд; поняття тригонометричного ряду Фур'є та методи розкладання функцій в такий ряд; поняття перетворення

Фур'є; поняття диференціального рівняння першого або вищого порядків; методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь; поняття перетворення Лапласу; основні теореми операційного числення, розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь операційним методом (ПРН13).

вміти: диференціювати функції, застосовувати диференціал функції до наближених обчислень; інтегрувати, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами; проводити обчислення визначеного інтеграла; знаходити частинні похідні та диференціали функції багатьох змінних; виконувати дії з комплексними числами; визначати збіжність числових рядів за допомогою ознак збіжності; визначати область збіжності функціонального ряду; радіус збіжності степеневому ряду; розкласти функції в степеневий ряд; розкласти функцію в тригонометричний ряд Фур'є; розв'язувати диференціальні рівняння першого та вищих порядків; застосовувати операційне числення для розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь;

володіти: термінологією, математичним апаратом, а також математичними положеннями, що лежать в основі функціонування комп'ютерних засобів, систем та мереж, вільно розв'язувати задачі середньої складності та добре диференціювати та інтегрувати функції; ці вміння та навички дадуть можливість добре засвоїти теоретичні і практичні основи теорії рядів, операційного числення, кратних інтегралів, тобто розділів курсу, які необхідні для подальшого навчання в технічному університеті.

2.3 Передумови для вивчення дисципліни:

Базова шкільна підготовка з алгебри, начал аналізу та геометрії

3 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних.

Тема 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної, їх геометричний та фізичний зміст. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідна складеної функції.

Тема 2. Похідні і диференціали вищих порядків. Формули Тейлора і Маклорена.

Тема 3. Дослідження функцій однієї змінної та побудова графіків.

Тема 4. Функції багатьох змінних. Область визначення. Границя функції. Неперервність функції в точці і на множині. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал. Градієнт функції.

Тема 5. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Похідна складеної функції. Екстремум функції багатьох змінних.

Змістовий модуль 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Тема 1. Комплексні числа.

Тема 2. Первісна, її властивості. Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій. Інтегрування заміною змінної.

Тема 3. Інтегрування введенням під диференціал. Інтегрування частинами.

Тема 4. Інтегрування раціональних, ірраціональних функцій та тригонометричних функцій.

Тема 5. Визначений інтеграл, його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінних і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 6. Геометричні застосування визначеного інтегралу: площа плоскої фігури, об'єм тіла, довжина дуги кривої.

Змістовий модуль 3. Ряди. Тригонометричні ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є.

Тема 1. Числові ряди. Необхідна умова збіжності ряду. Властивості рядів, що сходяться. Ознаки збіжності рядів з додатними членами.

Тема 2. Знакопочережні ряди. Абсолютно і умовно збіжні ряди.

Тема 3. Функціональні ряди. Степеневі ряди, радіус збіжності степеневого ряду. Ряди Тейлора і Маклорена.

Тема 4. Ряд Фур'є для функції, заданої на довільному періоді. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій. Неповні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є.

Тема 5. Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів.

Тема 6. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є.

Змістовий модуль 4. Диференціальні рівняння. Операційне числення.

Тема 1. Визначення диференціального рівняння, його загального і частинного розв'язку. Розв'язок спеціальних типів рівнянь першого порядку: зі змінними, що розділяються, однорідні рівняння, лінійні рівняння, рівняння Бернуллі.

Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Однорідні ЛДР. Лінійно незалежна система розв'язків. Фундаментальна система розв'язків ЛДР.

Тема 3. Неоднорідні ЛДР зі сталими коефіцієнтами, побудова фундаментальної системи розв'язків. Метод підбору розв'язку ЛНДР за виглядом правої частини.

Тема 4. Перетворення Лапласа. Зображення основних елементарних функцій. Властивості перетворення Лапласа.

Тема 5. Відновлення оригіналу.

Тема 6. Застосування операційного числення для розв'язання диференціальних рівнянь.

4 СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістовних модулів і тем	Кількість годин					
	Усь-ого	у тому числі				
		л	пз	лб	конс	С.р.
1	2	3	4	5	6	7
Змістовний модуль 1. Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних						
Тема 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідна складеної функції	10	2	2			6

1	2	3	4	5	6	7
Тема 2. Похідні та диференціали вищих порядків Формули Тейлора і Маклорена	12	2	2		2	6
Тема 3 Дослідження функцій та побудова графіків	12	2	4			6
Тема 4. Функції багатьох змінних. Частинні похідні і диференціали. . Повний диференціал. Градієнт функції	10	2	2			6
Тема 5. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Похідна складеної функції. Екстремум функції двох змінних	14	2	4		2	6
Усього годин за змістовний модуль 1	58	10	14		4	30
Змістовний модуль 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної						
Тема 1. Комплексні числа. Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми	6	2	2			2
Тема 2. Первісна, її властивості. Таблиця невизначених інтегралів Інтегрування заміною змінної	10	2	2			6
Тема 3. Метод введення під диференціал. Інтегрування частинами	14	2	2		2	8

1	2	3	4	5	6	7
Тема 4. Інтегрування раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій	16	4	4			8
Тема 5. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінних і інтегрування частинами	10	2	2			6
Тема 6. Геометричні застосування визначеного інтеграла	8				2	6
Усього годин за змістовний модуль 2	64	12	12		4	36
Змістовний модуль 3. Ряди: числові, функціональні, Фур'є						
Тема 1-2. Числові ряди. Ознаки збіжності рядів. Знакопочережні ряди. Абсолютно і умовно збіжні ряди	14	4	2			8
Тема 3. Функціональні та степеневі ряди. Область збіжності. Ряди Тейлора і Маклорена	12	2	2		2	6
Тема 4. Ряд Фур'є для функції, заданої на періоді 2π і $2l$. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. Комплексна форма ряду Фур'є	12	4	4			4

1	2	3	4	5	6	7
Тема 5. Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів.	8				2	6
Тема 6. Інтеграл Фур'є	8	2	2			4
Усього годин за змістовний модуль 3	54	12	10		4	28
Змістовний модуль 4. Диференціальні рівняння. Операційне числення.						
Тема 1. Диференціальне рівняння, загальний і частинний розв'язки. Розв'язання рівнянь I-го порядку: зі змінними, що озділяються, лінійних та однорідних рівнянь	12	2	2			8
Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР). Фундаментальна система розв'язків ЛОДР	8	2	2			4
Тема 3. Неоднорідні ЛДР. Метод підбору розв'язку ЛНДР за виглядом правої частини	10	2	2		2	4
Тема 4. Перетворення Лапласа. Зображення основних елементарних функцій Властивості перетворення Лапласа	10	2	2			6

1	2	3	4	5	6	7
Тема 5. Відновлення оригіналу за відомим зображенням	12	2	2			8
Тема 6. Операторний метод розв'язання диференціальних рівнянь.	12	2	2		2	6
Усього годин за змістовний модуль 4	64	12	12		4	36
Усього годин за семестр	240	46	48		16	130

5 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин
1	2	3
1	Похідна та диференціал функції однієї змінної .Похідна складеної функції	2
2	Похідні та диференціали вищих порядків функцій однієї змінної. Формули Тейлора і Маклорена	2
3	Монотонність функцій однієї змінної. Екстремуми..	2
4	Опуклість, вгнутість функцій однієї змінної. Асимптоти.	2
5	Частинні похідні функцій багатьох змінних. Повний диференціал	2
6	Застосування функцій багатьох змінних.	2
7	Контрольна робота (Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних)	2
8	Комплексні числа	2
9	Невизначений інтеграл. Табличне інтегрування	2
10	Заміна змінної . Інтегрування частинами	2
11	Інтегрування раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій	2

1	2	3
12	Визначений інтеграл. Обчислення (заміна змінної, частинами)	2
13	Аудиторна самостійна робота (Інтегральне числення функцій однієї змінної)	2
14	Числові ряди	2
15	Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена	2
16	Ряди Фур'є для функції, заданої на періоді 2π і на довільному періоді.	2
17	Неповні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є.	
18	Аудиторна самостійна робота (Ряди)	2
19	Диференціальні рівняння I-го порядку	2
20	Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку (ЛОДР)	2
21	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку (ЛНДР).	2
22	Перетворення Лапласа. Властивості. Відновлення оригіналу за відомим зображенням.	2
23	Розв'язання ЛНДР II-го порядку операторним методом	2
24	Аудиторна самостійна робота (Диференціальні рівняння)	2
	Загальна кількість годин	48

5 ТЕМИ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
	Загальна кількість, год		

7 САМОСТІЙНА РОБОТА

№	Назва теми	Кількість годин
1	Вивчення теоретичного матеріалу з використанням конспектів і навчальної літератури	44
2	Підготовка до практичних занять	44
3	Підготовка до контрольної роботи	4
4	Вивчення тем за навчальною літературою: 1. Геометричні застосування визначеного інтеграла. 2. Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів.	8 8
	Загальна кількість	108

8 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

8.1 Індивідуальні домашні завдання (ІДЗ) та контрольні роботи (КР)

№	Назва теми	Кількість годин
1	ІДЗ №1 « Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних»	4
2	ІДЗ №2 « Інтегральне числення функцій однієї змінної»	4
3	ІДЗ №3 « Ряди числові, степеневі, Фур'є»	4
4	ІДЗ №4 «Диференціальні рівняння та операційне числення»	4
5	Контрольна робота №1 «Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних»	4
	Загальна кількість	20

9. МЕТОДИ НАВЧАННЯ

1. Методи навчання:

- за ознакою, якою є джерело знань: словесно-ілюстративний (лекція), практичний (проведення практичних занять), робота з навчально-методичною літературою (самостійне опрацювання заданих розділів);

- за призначенням: набуття знань; формування умінь і навичок; застосування знань; закріплення знань; перевірка знань, умінь і навичок.

2. Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання:

- самостійні і контрольні роботи;
- екзамен.

10 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ ТА РЕЙТИНГОВА ОЦІНКА ЗА ДИСЦИПЛІНОЮ

10.1 Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання).

Для оцінювання роботи студента протягом семестру підсумкова рейтингова оцінка $O_{\text{сем}}$ розраховується як сума оцінок за різні види занять та контрольні заходи.

№	Вид заняття/контрольний захід	Рейт. оцінка
1	2	3
1	Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних	
	ІДЗ №1 «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних.»	6-10
	КР «Диференц. числення функцій однієї і багатьох змінних»	6-10
2	Інтегральне числення функцій однієї змінної	
	ІДЗ №2 «Інтегральне числення функцій однієї змінної».	6-10
	АСР «Інтегральне числення функцій однієї змінної»	6-10
	Самостійне вивчення «Геометричні застосування визначеного інтеграла»	6-10
Підсумок Контрольна точка 1		30-50
3	Ряди числові, степеневі, Фур'є.	
	ІДЗ №3 «Ряди числові, степеневі, Фур'є».	6-10
	АСР «Ряди та інтеграли Фур'є».	6-10
	Самостійне вивчення «Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів».	6-10

1	2	3
4	Диференціальні рівняння. Операційне числення	
	ІДЗ №4 «Диференціальні рівняння та операційне числення»	6–10
	АСР «ЛНДР II-го порядку».	6-10
Підсумок	Контрольна точка 2	30-50
	Всього за семестр	60-100

Як форма підсумкового контролю для дисципліни ВМ використовується письмовий іспит. При цьому виді контролю підсумкова оцінка O_n^{icn} обчислюється за формулою: $O_n^{icn} = 0,6 \cdot O_{\text{сем}} + 0,4 \cdot O_{\text{ісп}}$, де $O_{\text{сем}}$ – оцінка за семестр у 100-бальній системі, $O_{\text{ісп}}$ – оцінка за іспит у 100-бальній системі.

Білет для іспиту складається з двох теоретичних запитань та двох задач. Теоретичні запитання оцінюються в 20 балів та кожна задача оцінюється в 30 балів (загалом – 100 балів).

Письмовий іспит передбачає відповідь на екзаменаційний білет, що містить теоретичні питання й практичні завдання по всіх розділах курсу, які вивчалися в даному семестрі. Відповідь на іспиті дається тільки в письмовій формі.

10.2 Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки.

- означення похідної функції в точці, диференціала функції, таблиця похідних елементарних функцій, правила диференціювання;
- означення функції багатьох змінних, її частинні похідні та диференціали;
- означення первісної і невизначеного інтеграла, таблиця інтегралів та основні методи інтегрування;
- означення визначеного інтеграла та методи його обчислення;
- означення невластних інтегралів першого та другого роду;
- комплексні числа і дії над ними;
- означення збіжності числових рядів, основні ознаки збіжності;
- означення області збіжності функціонального ряду; радіус збіжності степеневому ряду; розкладання основних елементарних функцій в степеневий ряд;

- поняття тригонометричного ряду Фур'є та методи розкладання функцій в такий ряд; поняття перетворення Фур'є;
- поняття диференціального рівняння першого або вищих порядків; методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь;
- поняття перетворення Лапласу; основні теореми операційного числення.

Необхідний обсяг умінь для одержання позитивної оцінки:

- знаходити похідні та диференціали функції;
- знаходити частинні похідні та диференціали функції багатьох змінних;
- обчислювати невизначений та визначений інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами;
- виконувати дії з комплексними числами;
- застосовувати визначений інтеграл для розв'язання геометричних і фізичних задач;
- визначати збіжність числових рядів за допомогою ознак збіжності;
- визначати область збіжності функціонального ряду; радіус збіжності степеневого ряду;
- розкладати функції в степеневий ряд;
- розкладати періодичні функції в тригонометричний ряд Фур'є;
- розв'язувати диференціальні рівняння першого та вищих порядків;
- застосовувати операційне числення для розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру.

Задовільно, D,E (60-74). Виконані усі самостійні та контрольні роботи мінімум на оцінку «задовільно». Студент знає таблицю похідних, таблицю еквівалентних н.м. функцій, таблицю інтегралів, вміє диференціювати і інтегрувати функції. Може розкласти функцію в ряд Тейлора. Знає за якими формулами визначаються коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π . Вміє розв'язувати диференційні рівняння.

Добре, C (75-89). Виконані усі самостійні та контрольні роботи. Студент може диференціювати і інтегрувати складені функції. Може визначати область збіжності степеневих рядів; розкладати функцію в ряд Тейлора, розкладати періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є в дійсній формі;

розв'язувати диференційні рівняння першого та вищих порядків; може розв'язувати диференційні рівняння операційним методом.

Відмінно (90-100). Здав всі контрольні точки з оцінкою „відмінно”. Добре знає всі теми та уміє застосовувати знання на практичних прикладах..

Критерії оцінки виконання екзаменаційних завдань

Кількісні критерії оцінювання

Письмовий іспит (2 теоретичних питання та 2 практичних завдання):

- «відмінно» (90-100 б.) – студент безпомилково розв'язав всі задачі й відповів на теоретичні питання;
- «добре» (75-89 б.) – студент вирішив всі задачі й відповів на одне теоретичне питання, або відповідь дав тільки в схематичному вигляді;
- «задовільно» (60-74 б.) – студент виконав тільки два завдання, одне з яких - практичне;

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		екзамен, курсовий проект (робота), практика	залік
96–100	A	відмінно	зараховано
90–95	B		
75–89	C	добре	
66–74	D	задовільно	
60–65	E		
35–59	FX	2 (незадовільно)	Не зараховано
0-34	F		

11 МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

11.1 Базова література

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1978. - 624с
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.-М.: Наука, 1975. – 548 с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.-М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – к.: Либідь, 2003. –Кн. 1. Основні розділи /Призва Г.Й. та ін. – 400 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление.Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.
6. Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч. 1. - К.: Техніка, 2003. – 600 с. (517(07) О 35)
7. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.О. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Тести.– Харків: ХНУРЕ, 2016.– 256с. (512(07)К49).
8. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної. – Конспект лекцій. Тести.– Харків: ХНУРЕ, 2018.–280с. (517(07)К49).
9. Дорошенко В.О., Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Операційне числення. Тексти лекцій. Комп'ютерні індивідуальні завдання. .– Харків: ХНУРЕ, 2018.–122с. (512(07)Д69).
10. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. –Харків: ХНУРЕ, 2002. -552 с.
11. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. –Харків: ХНУРЕ,
12. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. Вища математика у прикладах та задачах. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. - Харків: ХНУРЕ, 2002. -596 с
13. Тевяшев А.Д.,Литвин О.Г.,Титаренко О.М., Клімова Н.П.Вища математика у прикладах та зада-чах.Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання.Харків:ХНУРЕ, Фактор, 2004.-560 с.
14. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля... М.: Наука, 1964

11.2 Допоміжна література

1. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. Ч.П. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» – ХНУРЕ, 2018. – 268 с. (517 (07) П-61).
2. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 196 с. (517 (07) П-61).
3. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 340 с. (517 (07) П-61).
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.2. Под ред. А.П. Рябушко, -Мн.: Высшейш. шк., 1991 .-351 с.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, -Мн.: Высшейш. шк., 1991 .-287 с..
6. И.А.Каплан, Практические занятия по высшей математике. Части I-V.
7. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1986, ч.І и ІІ.
8. Г.И.Запорожец Руководство к решению задач по курсу математического анализа. М.: Высш. шк., 1966. –460с.

11.3 Довідники

1. Бутенко Н.С. Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Стислий довідник з вищої математики – ХНУРЕ, 2018.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. –М.: Наука, 1986.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975.
4. Двайт. Г.Б -Таблицы интегралов и дугие математические формулы.
5. Титаренко А. М. Краткий справочник по высшей математике. – Х.:Диво.,2009. – 159 с.

12 ІНФОРМАЦІЙНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

1. Комп'ютерні тести в системі OpenTEST2

- 1.1 Лінійна алгебра та аналітична геометрія (150 запитань).
- 1.2 Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної (150 запитань)..
- 1.3 Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних (120 запитань)..
- 1.4 Числові та функціональні ряди. Інтеграл Фур'є (100 запитань)..
- 1.5 Диференціальні рівняння та операційне числення (100 запитань)..

2. Електронна бібліотека.

2.1 Електронна бібліотека ХНУРЕ.

- 1. Нерух, О. Г. Курс лекцій з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Нерух О.Г., Ружицька Н.М. - Перевидання; МОН України. НМЦ ВО, ХНУРЕ. - Х. : ХНУРЕ - 2004. - 184 с. - ISBN 5-7763-2728-8.
- 2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.:Наука,1985 .-432 с.
- 3. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3 ч. Ч.1/ Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В, Юруть И. Е.; под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск : Вышэйшая школа - 1990. - 270 с.: ил. - ISBN 5-339-00326-4 (517(07) С23)
- 4. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3-х ч. Ч.2 / Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск : Вышэйшая школа - 1991. - 351 с.: ил. - ISBN 5-339-00327-2 (517(07) С23)
- 5. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3-х ч. Ч.3 / Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под общ. ред. А. П. Рябушко. - Минск : Вышэйшая школа - 1991. - 287 с.: ил. - ISBN 5-339-00328-0 (517(07) С23)
- 6. Елементи вищої математики для підготовчих відділень: Навч. посібник/ Упоряд.: В.В. Семенець, В.О. Дорошенко. Г.В. Сова. - Харків, ХНУРС, 2010. – 400с.
- 7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.:Наука,1981 .-303 с. (517.5(07) К78)

8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов : в 2-х ч. / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. - 4-е изд., исправл. и доп. - М. : Высшая школа - 1986. - 304 с.: ил. (517(07) Д18)
9. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов : в 2-х ч. / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. - 4-е изд., исправл. и доп. - М. : Высшая школа - 1986. - 415 с.: ил. (517(07) Д18)

2.2 Електронна бібліотека кафедри вищої математики

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.1. –Х.: Компанія СМІТ, 2010. -269 с. (517(07) Т 29) або Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. -552 с.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.2. –Х.: Компанія СМІТ, 2010. -330 с. (517(07) Т 29) або Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. -440 с.
3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.3 –Х.: Компанія СМІТ, 2010. -268 с. (517(07) Т 29) або Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г., Головка Н.О. . Вища математика у прикладах та задачах. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. - Харків: ХНУРЕ, 2002. -596 с.
4. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. Ч.4. Харків, ХНУРЕ; Фактор, 2004. -560 с.

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

АНОТАЦІЇ НАВЧАЛЬНИХ ПОСІБНИКІВ

з навчальної дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА (прискорена форма навчання)

для студентів денної форми навчання
спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка

освітньої програми підготовки
«Інформаційно-мережна інженерія»

ЗАТВЕРДЖЕНО
Кафедрою ВМ
протокол №1
від 01.09.2021 р.

Харків 2021 р.

Анотації навчальних посібників з навчальної дисципліни «Вища математика» (прискорена форма навчання) для студентів денної форми навчання спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка освітньої програми підготовки «Інформаційно-мережна інженерія» / Упоряд.: Н.С.Бутенко. – Харків: ХНУРЕ, 2021. -11с.

Упорядник: Н.С. Бутенко, старший викладач кафедри ВМ

Рецензент: Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

АНОТАЦІЇ НАВЧАЛЬНИХ ПОСІБНИКІВ

Для допомоги майбутнім інженерам оволодіти елементами вищої математики колектив викладачів кафедри, враховуючи досвід роботи зі студентами, пропонує навчальні посібники для самостійного навчання. Ці навчальні посібники написані по кожному розділу і складені згідно з програмою курсу вищої математики.

РОЗДІЛ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Коспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. - Харків, ХНУРЕ, 2016. – 256 с. (512(07) К 49)

<http://catalogue.nure.ua/document=196107>

ЗМІСТ

Передмова.....	6
Основні позначення.....	7
1 Базові поняття математичного аналізу.....	8
1.1 Множини.....	8
1.2 Дійсні числа.....	10
1.3 Деякі терміни логіки.....	17
1.4 Аксиоми арифметики.....	18
1.5 Комплексні числа.....	21
1.6 Метод математичної індукції.....	23
1.7 Функції.....	25
2 Основні поняття теорії границь.....	32
2.1 Послідовності.....	32
2.1.1 Числова послідовність і її границя.....	32
2.1.2 Властивості послідовностей, які мають границю.....	35
2.1.3 Границя монотонної обмеженої послідовності. Число e	40
2.2 Границя функції.....	43
2.2.1 Границя функції. Границя функції на нескінченності.....	43

2.2.2 Властивості границь.....	48
2.2.3 Нескінченно малі та нескінченно великі функції та їх властивості.....	49
2.2.4 Властивості границь функції.....	53
2.2.5 Техніка обчислення границь.....	54
2.3 Важливі границі.....	59
2.3.1 Перша важлива границя.....	59
2.3.2 Друга важлива границя.....	62
2.3.3 Розкриття деяких типів невизначеностей із застосуванням важливих границь.....	65
2.4 Неперервність функції.....	68
2.4.1 Неперервність функції у точці.....	68
2.4.2 Неперервність функцій на відрізьку, властивості неперервних функцій.....	73
2.4.3 Схема дослідження функції на неперервність.....	74
2.5 Порівняння функцій.....	76
2.5.1 Правила порівняння.....	76
2.5.2 Еквівалентні нескінченно малі функції.....	78
2.5.3 Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій.....	81
2.5.4 Розкриття деяких типів невизначеностей із застосуванням таблиці еквівалентних функцій.....	82
3 Похідна та диференціал функції однієї змінної.....	85
3.1 Похідна і диференціал функції.....	85
3.1.1 Означення похідної і диференціала.....	85
3.1.2 Геометричний зміст похідної та диференціала.....	89
3.1.3 Механічний зміст похідної та диференціала.....	90
3.1.4 Рівняння дотичної та нормалі до плоскої кривої.....	92
3.1.5 Похідні зліва та справа. Неперервність і диференційованість функції.....	94
3.2 Диференціювання функцій.....	96
3.2.1 Формули диференціювання.....	96
3.2.2 Похідна складеної та оберненої функцій.....	98
3.2.3 Таблиця похідних.....	100
3.2.4 Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала. Таблиця диференціалів.....	105
3.2.5 Логарифмічне диференціювання.....	106

3.2.6 Диференціювання неявно заданої функції.....	108
3.2.7 Диференціювання функції, заданої параметрично.....	109
3.3 Похідні та диференціали вищих порядків.....	110
3.3.1 Похідні та диференціали вищих порядків явно заданої функції. Формула Лейбниця.....	110
3.3.2 Похідні вищих порядків параметрично та неявно заданої функцій...	113
4 Основні теореми диференціального числення.....	115
4.1 Теорема Ферма.....	115
4.2 Теорема Ролля.....	116
4.3 Теореми Коші і Лагранжа.....	118
4.4 Правило Лопітала.....	120
4.5 Формула Тейлора.....	126
4.5.1 Формула Тейлора для многочленів.....	126
4.5.2 Формули Тейлора та Маклорена для довільної функції.....	128
4.5.3 Розкладання деяких функцій за формулою Маклорена.....	129
4.5.4 Наближені обчислення за допомогою формули Тейлора.....	133
5 Застосування теорем диференціального числення для дослідження функцій.....	136
5.1 Монотонність функції.....	136
5.2 Локальний екстремум функції	
5.2.1 Необхідна умова локального екстремуму.....	139
5.2.2 Перша достатня умова локального екстремуму.....	140
5.2.3 Найбільше і найменше значення функції на відрізьку.....	142
5.2.4 Друга достатня умова локального екстремуму.....	144
5.3 Опуклість і вгнутість функції. Точки перегину.....	145
5.4 Асимптоти кривої.....	149
5.5 Схема дослідження функції та побудова її графіка.....	152
5.6 Застосування диференціального числення в наближених методах обчислень.....	158
5.6.1 Наближені методи розв'язування рівнянь.....	158
5.6.2 Інтерполяція й наближення функцій.....	165
Запитання до тесту з теми «Границі. Диференціальне числення функцій однієї змінної»	171

Індивідуальні завдання «Границі функції та послідовності».....	196
Індивідуальні завдання «Похідна функції».....	211
Індивідуальні завдання «Застосування похідних».....	224
Словник ключових слів	232
Відповіді до тесту.....	249
Предметний покажчик.....	250
Рекомендована література.....	253

РОЗДІЛ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Коспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник – Харків: ХТУРЕ, 2012.- 280 с. (517(07) К 49)

<http://catalogue.nure.ua/document=148248>

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Основні позначення	5
Лекція 1 Первісна та невизначений інтеграл. Таблиця основних інтегралів	6
Лекція 2 Методи інтегрування	19
Лекція 3 Інтегрування раціональних функцій.....	31
Лекція 4 Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій	44
Лекція 5 Інтегрування тригонометричних і гіперболічних функцій.	61
Лекція 6 Визначений інтеграл і його властивості	74
Лекція 7 Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.	84
Лекція 8 Методи обчислення визначених інтегралів.....	90
Лекція 9 Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)	99
Лекція 10 Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)	109
Лекція 11 Геометричні застосування визначеного інтеграла (обчислення площі та довжини дуги плоскої кривої)	118
Лекція 12 Геометричні застосування визначеного інтеграла	

(обчислення об'єму та площі поверхні обертання)	135
Запитання до тесту з теми «Невизначений інтеграл»	145
Запитання до тесту з теми «Визначений інтеграл і його застосування» .	177
Індивідуальні завдання	209
Додаток А Комплексні числа та деякі відомості з теорії многочленів	228
Додаток Б Інтеграл, що залежать від параметра	236
Додаток В Наближене обчислення визначених інтегралів	247
Додаток Г Фізичні застосування визначеного інтеграла	256
Словник ключових слів	262
Відповіді до тесту з теми «Невизначений інтеграл».....	275
Відповіді до тесту з теми «Визначений інтеграл і його застосування»	276
Предметний покажчик	277
Рекомендована література	280

РОЗДІЛ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Конспект лекцій з дисципліни " Вища математика ". Розділ "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" для студентів інженерно-технічних спеціальностей / упоряд. Г. В. Сова ; МОН України, ХНУРЕ. – Харків : ХНУРЕ, 2006. – 56 с. **(517(07) К 65)**

<http://catalogue.nure.ua/document=50147>

ЗМІСТ

Вступ.	4
1 Функція, її границя та неперервність.	5
1.1 Функція багатьох змінних. Означення та символіка.	5
1.2 Границя функції багатьох змінних.	8
1.3 Неперервність функції багатьох змінних.	11
Контрольні запитання та завдання.	13
2 Похідні та диференціали функції багатьох змінних.	14
2.1 Частинні похідні.	14
2.2 Диференційовність функції.	18

2.3 Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій і похибок. Диференціали вищих порядків.	20
2.4 Похідна складеної функції. Повна похідна. Інваріантність форми повного диференціала.	23
2.5 Диференціювання неявної функції.	26
Контрольні запитання та завдання.	28
3 Деякі застосування частинних похідних.	29
3.1 Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.	29
3.2 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.	31
3.3 Формула Тейлора для функції двох змінних.	37
3.4 Локальні екстремуми функції двох змінних.	39
3.5 Найбільше та найменше значення функції.	43
3.6 Умовний екстремум.	44
Контрольні запитання та завдання.	47
Термінологічний словник.	48
Список рекомендованої літератури	51

РОЗДІЛ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Звичайні диференціальні рівняння : тексти лекцій / упоряд.: В. О. Дорошенко, М. Г. Зуєв, О. М. Титаренко; МОН України, Харк.нац.ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2007. – 112 с. **(517(07) З 43)**

<http://catalogue.nure.ua/document=56190>

ЗМІСТ

Передмова.....	4
1 Диференціальні рівняння першого порядку	5
2 Розв'язання диференціального рівняння першого порядку.....	15
3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.....	24
4 Диференціальні рівняння у повних диференціалах	33
5 Диференціальні рівняння вищих порядків	42
6 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків	53
7 Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	62

8 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	70
9 Системи диференціальних рівнянь.....	78
10 Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь.....	83
11 Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів...	92
12 Гіпергеометричне рівняння. Рівняння Бесселя.....	99
Програма розділу "Звичайні диференціальні рівняння".....	109
Перелік використаної та рекомендованої літератури.....	111

РОЗДІЛ «ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

Тексти лекцій з теорії рядів/ Упоряд.: Л.І. Константинова, Д.О. Колесніков,
Г.В. Сова. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 120 с. (517(07) Т 30)

<http://catalogue.nure.ua/document=97328>

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Додавання нескінченної множини чисел.....	5
2 Нескінченні числові ряди	7
2.1 Частинні суми ряду	7
2.2 Збіжність і розбіжність ряду	9
2.3 Деякі властивості рядів, що збігаються	13
2.4 Залишковий член ряду і його властивості	16
2.5. Критерій Коші	17
3 Знакопостійні ряди.....	19
3.1 Поняття знакопостійного ряду	19
3.2 Десяткові дроби як ряди	19
3.3 Достатні ознаки збіжності	20
4 Збіжність рядів з доданками довільного знака	29
5 Функціональні ряди	33
5.1 Область збіжності функціонального ряду.....	33
5.2 Рівномірна збіжність функціональних рядів.....	37
5.3 Властивості рівномірно збіжних рядів.....	41
6 Степеневі ряди.....	47
6.1 Поняття степеневого ряду. Область збіжності	47
6.2 Рівномірна збіжність степеневого ряду	51

6.3 Розвинення функцій у степеневі ряди.....	52
7 Функції Бесселя.....	55
7.1 Рівняння Бесселя. Функції Бесселя першого роду.....	55
7.2 Функції Бесселя другого роду.....	57
8 Ортогональні системи. Ряди Фур'є.....	60
8.1 Ряди за ортогональною системою функцій.....	60
8.2 Ряди Фур'є в дійсній формі.....	61
8.3 Ряди Фур'є для парних функцій.....	65
8.4 Ряди Фур'є для непарних функцій.....	67
8.5 Ряди Фур'є в комплексній формі.....	68
Додаток А. Основні поняття та формули.....	73
Додаток Б. Задачі та запитання з теорії рядів.....	79
Перелік рекомендованої літератури.....	120

РОЗДІЛ «ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Тексти лекцій з дисципліни “Вища математика”, розділ «Операційне числення» для студентів інженерно-технічних спеціальностей [Електронне видання] / Упоряд. В.В. Дорошенко, О.О. Ремаєва, Н.П. Клімова. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 74 с.

<http://catalogue.nure.ua/document=166093>

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Перетворення Лапласа	5
1.1 Оригінали	5
1.2 Зображення.....	6
2 Основні властивості перетворення Лапласа.....	8
2.1 Властивість лінійності	8
2.2 Властивість подібності	9
2.3 Властивість зміщення.....	10
2.4 Властивість запізнювання	11
2.5 Зображення періодичної функції	16

2.6 Диференціювання оригіналу	17
2.7 Диференціювання зображення.....	18
2.8 Інтегрування оригіналу	19
2.9 Інтегрування зображення	20
2.10 Згортка функцій та її властивості.....	21
2.11 Згортка оригіналів та множення зображень	22
3 Відновлення оригіналу за зображенням	23
3.1 Деякі способи знаходження оригіналів за їх зображеннями	24
3.2 Множення зображень	25
3.3 Зворотне перетворення Лапласа. Теорема розкладання.....	29
4 Застосування операційного числення	33
4.1 Розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами операторним методом	33
4.2 Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами операторним методом	39
4.3 Застосування операційного числення до розв'язання деяких задач теоретичної механіки.....	40
4.4 Застосування операційного методу до розрахунків електричних контурів	43
5 Запитання до тесту з теми «Операційне числення».....	48
Додаток А Таблиця оригіналів і зображень.....	70
Додаток Б Таблиця основних властивостей перетворення Лапласа	72
Рекомендована література	73

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до самостійної роботи з навчальної дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
(прискорена форма навчання)**

для студентів денної форми навчання
спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка

освітньої програми підготовки
«Інформаційно-мережна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО

кафедрою вищої математики.

Протокол № 1 від 01.09.2021 р.

ХАРКІВ 2021

Методичні вказівки до самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітньої програми «Інфокомунікаційна інженерія (прискорена форма навчання)», [Електронний документ] / Упоряд. Н.С. Бутенко– Харків: ХНУРЕ, 2021. – 16 с.

Упорядник Н.С. Бутенко, старший викладач каф. ВМ

Рецензент: Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

ВСТУП

Самостійна робота студента – це важлива частина підготовки майбутнього фахівця, що дозволяє йому навчитися працювати з різноманітними науковими та літературними джерелами, а також навчитися обробляти та аналізувати отриману інформацію. Така форма роботи, як самостійне вивчення студентами окремих тем чи розділів навчальних предметів включено у підготовку бакалаврів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації»,

Метою методичних рекомендацій є ознайомлення студентів з практичними порадами та завданнями щодо самостійного вивчення матеріалу. За складом матеріалу, змістом та структурою вони повністю узгоджені з навчальним планом.

Методичні рекомендації призначені для студентів першого курсу денної форми навчання освітньої програми «Інфокомунікаційна інженерія».

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ

Кожна самостійна робота виконується на аркушах формату А4. На першій сторінці повинні бути вказані тема самостійної роботи, номер варіанта, прізвище, ім'я, по батькові студента, номер групи та назва факультету, а також вказані данні викладача, який перевіряє вказану роботу.

Розв'язання всіх задач та пояснення до них повинні бути короткими, але обґрунтованими. При необхідності варто посилатися на відповідні питання теорії з використання формул, теорем тощо. Рисунки та графіки потрібно виконувати акуратно, з дотриманням масштабу у вибраній системі координат, пояснення до задач повинні відповідати позначенням на рисунку.

Перед виконанням кожної роботи студент вивчає відповідний лекційний матеріал, розбирає приклади розв'язаних задач, розв'язує типові задачі до кожної теми. Далі студент знаходить свій варіант завдань за номером прізвища в журналі групи.

2 МЕТА І ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета курсу вищої математики – оволодіння студентами необхідним математичним апаратом, що допомагає аналізувати, моделювати та розв'язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням, де це можливо, обчислювальної техніки.

Завдання курсу вищої математики для бакалаврів:

- розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів;
- оволодіння студентами основними методами дослідження і розв'язку математичних задач;
- виховання у студентів уміння самостійно поширювати свої математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних задач;
- розвиток у студентів навичок використання математичних методів дослідження під час підготовки курсових та дипломних робіт;
- підготовка студентів до науково-дослідної роботи, розробка та аналіз математичних моделей, застосування математичних методів під час розв'язання конкретних завдань галузі.

Для реалізації цієї мети студент повинен опанувати основні методи аналітичної геометрії, лінійної алгебри та математичного аналізу, тобто вільно розв'язувати задачі середньої складності та добре диференціювати і інтегрувати функції. Ці вміння та навички дадуть можливість добре засвоїти теоретичні і практичні основи теорії рядів, операційного числення, кратних інтегралів, тобто розділів курсу, які необхідні для подальшого навчання в технічному університеті.

3 ПЕРЕЛІК ТЕМ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕРІАЛУ

№	Тема	Кільк. год.	Практика	Теорія	Форми контролю		Завдання для СР
Модуль 2					Поточний: перевірка конспекту, розв'язання задач та усна співбесіда. Підсумковий: екзамен	Самостійно опрацювати теми розділу, які перелічені, за вказаним змістом, підготувати конспект, розв'язувати задачі.	
1	Геометричні застосування визначеного інтеграла	8	[2]: ІЗ 3.3 №5,6, 7	[1]:			
Модуль 3							
2	Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів	8	[4]: ІДЗ 12-3 №4	[1]:			

4 ІНСТРУКЦІЯ ПО ВИВЧЕННЮ ОКРЕМИХ ТЕМ

Самостійне вивчення окремих тем представлені великою різноманітністю видів робіт: робота з підручником, довідником, науково-популярною літературою, конспектування прочитаного тощо; розв'язання вправ, спрямованих на набуття практичних навичок і вмінь; відповіді на контрольні питання, які дають змогу ще раз повторити вивчений матеріал і закріпити знання. Джерела інформації (з переліку літератури) містяться в таблиці п.3.

Читання підручника

1. Вивчаючи матеріал по підручнику, варто переходити до наступного питання тільки після правильного розуміння попереднього, виконуючи на папері всі обчислення (у тому числі й ті, які заради стислості опущені в підручнику).

2. Особливу увагу варто привертати на визначення основних понять курсу, які відбивають кількісну сторону або просторові властивості реальних об'єктів і процесів і виникають у результаті абстракції із цих властивостей і процесів. Без цього неможливо успішне вивчення математики. Студент повинен докладно розбирати приклади, які пояснюють такі визначення, і вміти будувати аналогічні приклади самостійно.

3. При вивченні матеріалу по підручнику корисно відразу вести конспект, у який рекомендується виписувати визначення, формулювання теорем, формули, рівняння й т.п.

Розв'язання задач

1. Вивчення вищої математики повинне супроводжуватися розв'язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит.

2. Розв'язання задач і прикладів варто викладати докладно, обчислення повинні розташовуватися в строгому порядку, при цьому рекомендується відокремлювати допоміжні обчислення від основних. Помилкові записи варто не стирати, а закреслювати. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно й відповідно до даних умов.

3. Розв'язання кожної задачі повинно доводити до відповіді, необхідної згідно умови, і, по можливості, в загальному вигляді з висновком формули. Потім в отриману формулу підставляють числові значення (якщо такі дані). У проміжних обчисленнях не слід уводити наближені значення коренів, числа π й т.п.

4. Розв'язання задач певного типу потрібно продовжувати до придбання твердих навичок у їхньому розв'язку.

5. ДОПОМІЖНИЙ МАТЕРІАЛ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ З КОЖНОЇ ТЕМИ

5.1 Геометричні застосування визначеного інтеграла

1. Обчислення площі плоскої фігури D :

а) декартова система координат

$$D: y = f_1(x), y = f_2(x), x = a, x = b, a \leq b;$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, (f_2(x) > f_1(x), f_1(x) > 0);$$

б) полярна система координат

$$D: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta;$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi;$$

в) параметричне задання кривої

$$D: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta],$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt.$$

2. Обчислення довжини кривої L :

а) декартова система координат

$$L: y = f(x), a \leq x \leq b;$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx;$$

б) полярна система координат

$$L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta;$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi;$$

в) параметричне задання кривої

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta; \end{cases}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

3. Об'єм тіла за площею паралельного перерізу

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox , $a \leq x \leq b$.

4. Об'єм тіла, яке утворене обертанням області D навколо відповідної осі

а) декартова система координат

$D: y = f(x), y = 0, x = a, x = b$; вісь обертання – Ox ;

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

$D: x = \varphi(y), x = 0, y = c, y = d$; вісь обертання – Oy ;

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy;$$

б) полярна система координат

$D: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$;

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

4. Площа поверхні, яка утворена обертанням кривої l навколо відповідної осі

а) декартова система координат

$l: y = y(x), \alpha \leq x \leq b$;

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx;$$

б) полярна система координат

$l: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$;

$$S = 2\pi \int_a^b |\rho \sin \varphi| \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\varphi)} d\varphi;$$

в) параметрична система координат

$l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta; \end{cases}$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

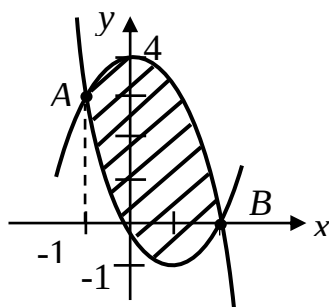
Приклади розв'язання типових задач

Приклад №1. Обчислити площу області, обмеженої параболою

$$y = 4 - x^2 \text{ і } y = x^2 - 2x.$$

Розв'язання

Розв'яжемо систему рівнянь заданих парабол і знайдемо точки перетину цих ліній.



$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \text{ або } x^2 - x - 2 = 0,$$

звідки $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

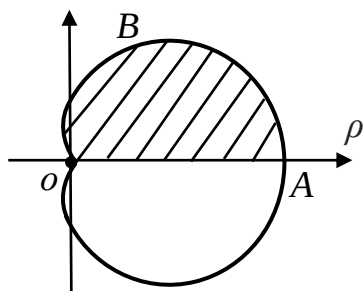
Підставляючи ці значення в рівняння будь-якої параболу, отримуємо координати точок перетину $A(-1; 3)$ і $B(2; 0)$. Маємо відшукати площу заштрихованої області. Задана область обмежена зверху параболою $y = 4 - x^2$, а знизу параболою $y = x^2 - 2x$. Тому:

$$S = \int_{-1}^2 ((4 - x^2) - (x^2 - 2x)) dx \rightarrow S = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx.$$

Після обчислень маємо $S = \left(4x - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = 9 \text{ (кв. од.)}.$

Приклад №2. Обчислити площу області, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Розв'язання



Кардіоїда симетрична відносно полярної осі. Тому шукана площа дорівнює подвоєній площі криволінійного сектора OAB . Дуга ABO описується кінцем полярного радіуса ρ при зміні полярного кута φ від 0 до π .

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi.$$

Виконаємо піднесення до квадрату в підінтегральному виразі.

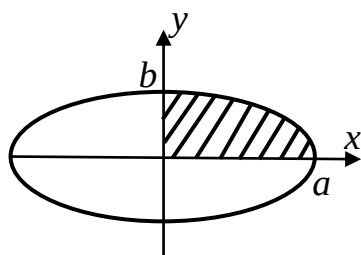
$$I = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \left(\int_0^{\pi} d\varphi + 2 \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right).$$

Перші два інтеграли табличні, у третьому інтегралі скористаємось тригонометричною формулою зниження степеня.

$$\begin{aligned} I &= a^2 \left(\int_0^{\pi} d\varphi + 2 \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) = \\ &= a^2 \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ (кв.од.)}. \end{aligned}$$

Приклад №3. Обчислити площу області, обмеженої еліпсом $x = a \cos t, y = b \sin t$.

Розв'язання



Осі координат співпадають з осями симетрії даного еліпса, тому вони ділять еліпс на чотири однакові частини.

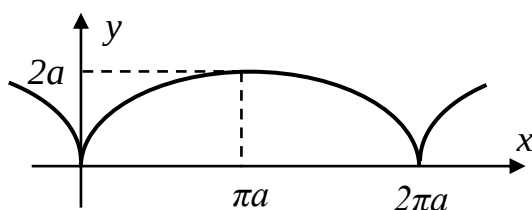
Оскільки $x'(t) = -a \sin t$, то
$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt = -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt.$$

Застосувавши тригонометричну формулу зниження степеня, маємо

$$S = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi ab \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад №4. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

Розв'язання



При проходженні однієї арки циклоїди параметр t змінюється від 0 до 2π .

$$x'_t = a(1 - \cos t), y'_t = a \sin t. \text{ Тому}$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = a^2(2 - 2 \cos t) = 2a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} = 4a^2 \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right).$$

Отримуємо $L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt$. Для обчислення зазначимо, що $dt = 2d\left(\frac{t}{2}\right)$. Отже,

$$L = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a.$$

5.2 Розкладання у ряд Фур'є $2l$ -періодичної функції, заданої графічно

1. Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом $2l$, визначеної на відріжку $[-l, l]$ має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

2. Якщо функція $f(x)$ парна на відріжку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

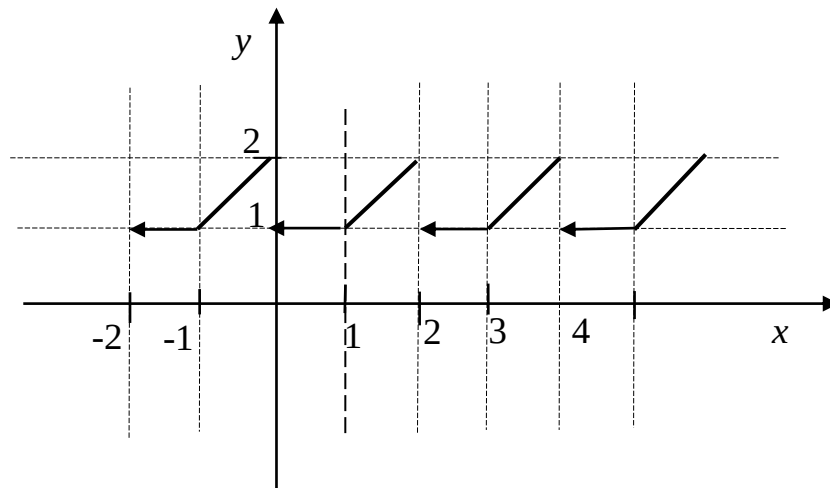
$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = 0.$$

3. Якщо функція $f(x)$ непарна на відріжку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад №1. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану графіком.



Запишемо задану функцію в аналітичному вигляді: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Задана функція задовольняє умови Діріхле і може бути розкладена в ряд Фур'є. Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$ має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Застосовуватимемо вказані формули, в яких покладемо $l = 1$. Інтервал інтегрування $(0; 2)$ точкою $x = 1$ розіб'ємо на дві частини, оскільки у кожній з них функція задана різними формулами:

$$a_0 = \int_0^1 dx + \int_1^2 x dx = x \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

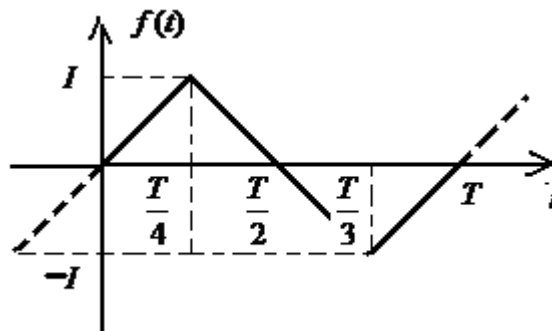
$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \cos \pi n x dx + \int_1^2 x \cdot \cos \pi n x dx = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos \pi n x dx \\ du = dx & v = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \end{array} \right| + \\ &+ x \cdot \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_1^2 - \frac{1}{\pi n} \int_1^2 \sin \pi n x dx = 0 + 0 + \frac{\cos \pi n x}{\pi^2 n^2} \Big|_1^2 = \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n - \text{парне} (n \rightarrow 2n), \\ \frac{2}{\pi^2 n^2}, & n - \text{непарне} (n \rightarrow 2n - 1). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int \sin \pi n x dx + \int x \cdot \sin \pi n x dx = -\frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin \pi n x dx \\ du = dx & v = \frac{-\cos \pi n x}{\pi n} \end{array} \right| \\
 &= -x \cdot \frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_1^2 + \frac{1}{\pi n} \int_1^2 \cos \pi n x dx = -\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} - \frac{2 - (-1)^n}{\pi n} + \frac{\sin \pi n x}{\pi^2 n^2} \Big|_1^2 = \\
 &= \frac{-(-1)^n + 1 - 2 + (-1)^n}{\pi n} = -\frac{1}{\pi n}.
 \end{aligned}$$

Шуканий розклад даної функції має вигляд

$$f(x) = \frac{5}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n}.$$

Приклад №2. Розкласти в ряд Фур'є сигнал, заданий графічно.



Аналізуючи графік, бачимо, що задано непарну функцію. Тому

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} t, \text{ де } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt, \quad l = \frac{T}{2}.$$

Достатньо описати функцію на множині $\left[0; \frac{T}{2}\right]$:
$$f(t) = \begin{cases} \frac{4I}{T}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ -\frac{4I}{T}t + 2I, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Тоді, } b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/4} \frac{4I}{T} t \sin \frac{2n\pi}{T} t dt + \int_{T/4}^{T/2} \left(-\frac{4I}{T}t + 2I \right) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt \right) = \\
 &= \frac{8I}{T} \left[\frac{2}{T} \left(\frac{-T}{2n\pi} t \cos \frac{2n\pi}{T} t + \frac{T^2}{4n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) \right]_{T/4}^{T/2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{-2t}{T} + 1 \right) \frac{-T}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi}{T} t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \frac{T^2}{4n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi}{T} t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = \\
& = \frac{8I}{T} \left[\frac{T}{n\pi} \left(-\frac{1}{4} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{T}{2n\pi} \left(0 - \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{T}{2n\pi} \left(0 - \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{2} \right) - - \frac{T}{2n^2\pi^2} \left(0 - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] = \frac{8I}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, n=2k \\ (-1)^k, n=2k+1, k=0,1, \end{cases}$

то дістаємо, $b_{2k+1} = \frac{8I(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{8I}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{2(2k+1)\pi}{T} t$.

Приклад №3. Розкласти в ряд Фур'є сигнал $f(t)$, заданий графічно.

Знайдемо спочатку власну частоту сигналу. Оскільки при $t = \frac{T}{2}; \sin w_0 t = 0$, то $w_0 t|_{t=\frac{T}{2}} = \pi$, а $w_0 = \frac{2\pi}{T}$. Тому на множині $[0; T]$ одержимо

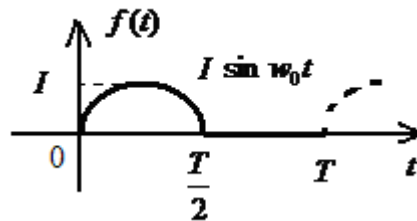


Рис. 1

$$f(t) = \begin{cases} I \sin \frac{2\pi}{T} t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}.$$

Припустивши, що $T = 2l$ - період функції, запишемо її ряд Фур'є

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t, \text{ де } l = \frac{T}{2}.$$

Дістанемо:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T} t}{2} dt = \frac{I}{2},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I \sin \frac{2\pi}{l} t \cos \frac{2n\pi}{T} t dt = |n \neq 1| \\
&= \frac{I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\sin \frac{2\pi}{T} t + \sin \frac{2\pi(1-n)}{T} t \right) dt = \\
&= \frac{-I}{T} \left(\frac{T}{2\pi(n+1)} \cos \frac{2\pi(n+1)}{T} t + \frac{T}{2\pi(1-n)} \cos \frac{2\pi(1-n)}{T} t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{-I}{2\pi} \left[\frac{1}{n+1} (\cos \pi(n+1) - 1) - \frac{1}{n-1} (\cos \pi(n-1) - 1) \right].
\end{aligned}$$

Отже, маємо: $a_{2k+1} = 0$; $a_{2k} = \frac{-I}{2\pi} \left(\frac{-2}{2k+1} - \frac{-2}{2k-1} \right) = \frac{-2I}{\pi(4k^2-1)}$, де $k = 1; 2; \dots$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{l} \int_0^T f(t) \cos \frac{\pi}{l} t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I \sin \frac{2\pi}{T} t \cos \frac{2\pi}{T} t dt = \\
&= \frac{I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{4\pi}{T} t dt = \frac{I}{T} \left(-\frac{T}{4\pi} \right) \cos \frac{2\pi(1+n)}{T} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = 0,
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi}{l} t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I \sin \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2n\pi}{T} t dt = |n \neq 1| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos \frac{2\pi(1-n)}{T} t - \cos \frac{2\pi(1+n)}{T} t \right) dt = \\
&= \frac{I}{T} \left(\frac{T}{2\pi(1-n)} \sin \frac{2\pi(1-n)}{T} t - \frac{T}{2\pi(1+n)} \sin \frac{2\pi(1+n)}{T} t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = 0,
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{l} \int_0^T f(t) \sin \frac{\pi}{l} t dt = \frac{2I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi}{T} t \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T} t}{2} dt = \frac{I}{2}.$$

Відповідь: $f(t) = \frac{I}{4} - \frac{2I}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos \frac{4k\pi}{T} t + \frac{I}{2} \sin \frac{2\pi}{T} t$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Призва Г. Й. Вища математика : підручник [Текст]: у 2 кн. / Призва Г. Й., Плахотник В. В., Гординський Л. Д., Васильченко І. П. - 2-ге вид., перероб. й доп.; за ред. Г. Л. Кулініча. - К. : Либідь - 2003. - 400 с.: іл. - Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 4. к Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – Харків: ХНУРЕ, 2004. – 553 с. (517 (07) T29)
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) B55).
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Высшейш. шк., 1991. – 287 с. (517(07) C23).
4. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. Ч.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» – ХНУРЕ, 2018. – 268 с. (517 (07) П-61).
5. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 196 с. (517 (07) П-61).
6. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 340 с. (517 (07) П-61).
7. Бутенко Н.С. Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Стислий довідник з вищої математики – ХНУРЕ, 2018.

Електронний документ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітньої програми «Інфокомунікаційна інженерія
(прискорена форма навчання)»

Упорядник Бутенко Ніна Семенівна

Відповідальний випусковий О.Г. Нерух

Авторська редакція

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до практичних занять з навчальної дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
(прискорена форма навчання)**

для студентів денної форми навчання
спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка

освітньої програми підготовки
«Інформаційно-мережна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО

кафедрою вищої математики.

Протокол № 1 від 01.09. 2021 р.

ХАРКІВ 2021

Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія (прискорена форма навчання)», [Електронний документ] / Упоряд. Н.С. Бутенко— Харків: ХНУРЕ, 2021. — 89 с.

Упорядник Н.С Бутенко, ст. викл. каф. ВМ

Рецензент: Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

ЗМІСТ

1. Заняття 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної. Похідна складеної функції.
2. Заняття 2. Похідні і диференціали вищих порядків.
3. Заняття 3. Монотонність функцій однієї змінної. Екстремуми.
4. Заняття 4. Опуклість, вгнутість графіків функцій однієї змінної. Асимптоти.
5. Заняття 5. Функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали.
6. Заняття 6. Застосування частинних похідних.
7. Заняття 7. Контрольна робота №1. «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних»
8. Заняття 8. Комплексні числа.
9. Заняття 9. Невизначений інтеграл. Табличне інтегрування.
10. Заняття 10. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.
11. Заняття 11. Інтегрування раціональних, ірраціональних і тригонометричних функцій.
12. Заняття 12. Визначений інтеграл. Обчислення.
13. Заняття 13. Аудиторна самостійна робота «Інтегральне числення функцій однієї змінної»
14. Заняття 14. Числові ряди.
15. Заняття 15. Степеневі ряди.
16. Заняття 16. Ряди Фур'є для 2π і $2l$ – періодичних функцій.
17. Заняття 17. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. Ряди Фур'є в комплексній формі.
18. Заняття 18. Аудиторна самостійна робота «Ряди».
19. Заняття 19. Диференціальні рівняння I-го порядку.
20. Заняття 20. Диференціальні рівняння II-го порядку однорідні (ЛОДР).
21. Заняття 21. Диференціальні рівняння II-го порядку неоднорідні (ЛНДР).
22. Заняття 22. Перетворення Лапласа. Властивості.
23. Заняття 23. Розв'язання ЛНДР операторним методом.
24. Заняття 24. Аудиторна самостійна робота «Диференціальні рівняння».

ЗАНЯТТЯ 1 – 2. Обчислення похідної та диференціала функцій однієї змінної

1-2.1 Мета занять. З'ясувати зміст поняття похідної; навчитися використовувати правила диференціювання та таблицю похідних; знаходити похідні явно заданих функцій. Продемонструвати правила диференціювання неявно заданої та параметричної функцій; навчити використовувати логарифмічне диференціювання. Пояснити геометричний зміст диференціала функції.

1-2.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

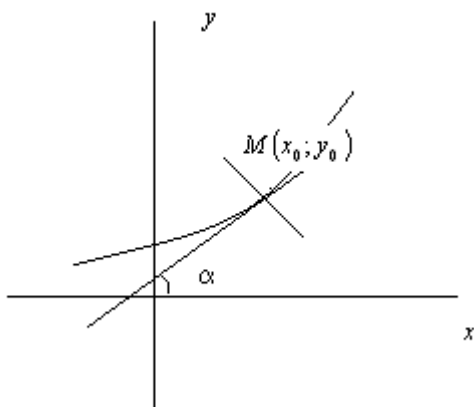
Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому інтервалі $(a;b)$. *Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

За означенням: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Похідна функції $f(x)$ є деяка функція $f'(x)$, отримана за вказаним правилом із даної функції.

Функція $y = f(x)$, що має похідну у кожній точці інтервалу $(a;b)$ називається *диференційованою* на цьому інтервалі. Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням.

Фізичний зміст похідної: якщо функція $y = f(x)$ описує який-небудь фізичний процес, то похідна y' є швидкістю протікання цього процесу.



Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ у точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої дорівнює x .

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0).$$

Його легко отримати із умови перпендикулярності дотичної та нормалі у точці $x = x_0$.

Основні правила диференціювання

$$1 \ (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$2 \ (u \cdot v)' = u'v + uv' \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

$$3 \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u', \quad \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{Cu'}{u^2}.$$

$$4 \ y = f(\varphi(x)); \ y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій ($u = u(x)$):

$$1 \ (C)' = 0.$$

$$2 \ (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$3 \ (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$4 \ (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u', \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} u'.$$

$$5 \ (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$6 \ (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$7 \ (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$8 \ (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$9 \ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$10 \ (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$11 \ (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$12 \ (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$13 \ (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$$

$$14 \ (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$$

$$15 \ (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$$

$$16 \ (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

Для обчислення похідних потрібно знати тільки правила диференціювання і формули похідних основних елементарних функцій, строго дотримуватися цих правил при виконанні вправ. Також потрібно пам'ятати, що $(x)' = 1$.

Диференціювання функції, що задана неявно

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, що не розв'язується відносно y .

Якщо неявна функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної від y по x треба продиференціювати це рівняння по x , розглядаючи при цьому y як функцію від x , і одержане потім рівняння розв'язати відносно y' .

Диференціювання функції, що задана параметрично

Нехай залежність між аргументом x і функцією y задана параметрично у вигляді двох рівнянь: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ t - параметр.

Тоді похідна такої функції знаходиться за формулою: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Логарифмічне диференціювання

У деяких випадках для знаходження похідної задану функцію спочатку логарифмують, а потім одержаний результат диференціюють. Таку операцію називають логарифмічним диференціюванням.

Існують функції, похідні яких знаходять тільки за допомогою логарифмічного диференціювання. До них належить так звана степеневі - показникова функція $y = u^v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$\begin{aligned} \ln y = v \cdot \ln u &\Rightarrow \frac{1}{y} y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot v' \right), \\ \text{тобто } y' &= u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot v' \right). \end{aligned}$$

Похідні вищих порядків явно заданої функції

Похідна $y' = f'(x)$ функції $y = f(x)$ є також функція від x і називається

похідною першого порядку.

Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається y'' або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Тобто, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається y''' або $\frac{d^3 y}{dx^3}$. Тобто, $y''' = (y'')'$.

Похідною n -го порядку (або n -ю похідною) називається похідна від похідної $(n-1)$ порядку $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Похідні порядку вище першого, називаються похідними вищих порядків.

Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно у вигляді рівняння $F(x; y) = 0$. Продиференціюємо це рівняння по x і розв'яжемо одержане рівняння відносно y' . Таким чином знайдено похідну першого порядку. Продиференціюємо по x першу похідну і одержимо другу похідну від неявно заданої функції. До неї ввійдуть x, y, y' . Підставимо уже знайдене значення y' у вираз другої похідної і виразимо y'' через x і y . Аналогічно діємо для знаходження похідної третього порядку.

Похідні вищих порядків від функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Як відомо, перша похідна y'_x обчислюється за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Друга похідна від функції, що задана параметрично - за формулою $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. За аналогією,

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ і так далі.}$$

Диференціал функції

Диференціалом першого порядку функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, що лінійно залежить від приросту незалежної змінної x $\Delta x = dx$. Диференціал dy функції дорівнює її похідній помноженій на диференціал незалежної змінної x $dy = y'dx = f'(x)dx$.

Диференціалом n -го порядку функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціалу $(n-1)$ -го порядку цієї функції, тобто $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Якщо дана функції $y = f(x)$, де x незалежна змінна, то $d^2 y = y'' dx^2$, $d^3 y = y''' dx^3$, ..., $d^n y = y^{(n)} dx^n$.

Якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $d^2 y = y'' \cdot (du)^2 + y' \cdot d^2 u$, причому диференціювання функції y виконується по змінній u .

Оскільки диференціал функції відрізняється від її приросту на нескінченно малу вищого порядку в порівнянні з величиною dx , то $\Delta y \approx dy$ або $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot dx$, звідки $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$.

Одержана формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малому прирості Δx незалежної змінної x .

1-2.3. Контрольні запитання і завдання.

1. Що таке похідна функції, який її геометричний та фізичний зміст?
2. Основні правила диференціювання.
3. Написати таблицю похідних основних елементарних функцій.
4. Які функції називаються функціями заданими неявно та параметрично?
5. Написати формули для похідної функції, яка задана параметрично.
6. Написати основну логарифмічну тотожність.
7. Сформулюйте означення диференціала. Який його геометричний зміст?
8. Дайте означення похідної n -го порядку.
9. Як знаходяться похідні першого та другого порядку від функції, заданої параметрично?
10. Як знаходяться похідні першого та другого порядку від функції, заданої неявно?
11. Дайте означення диференціала n -го порядку.

1-2.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [5] №№ 8.1 – 8.3, 8.10, 8.8, 8.15, 8.44, 8.65-8.68, 8.73, 8.93, 8.19, 8.21.

Домашні задачі: [5] №№ 8.4-8.6, 8.9, 8.12, 8.69, 8.94, 8.20, 8.23.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \sin 2x \cdot \ln 3x$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x \cdot \ln 3x)' = (\sin 2x)' \cdot \ln 3x + (\sin 2x) \cdot (\ln 3x)' = \\ &= \cos 2x \cdot (2x)' \cdot \ln 3x + \sin 2x \cdot \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 2 \cos 2x \cdot \ln 3x + \sin 2x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \\ &= 2 \cos 2x \cdot \ln 3x + \frac{\sin 2x}{x}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2 + 1}{e^{2x}}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + 1}{e^{2x}} \right)' = \frac{(x^2 + 1)' \cdot e^{2x} - (e^{2x})' \cdot (x^2 + 1)}{(e^{2x})^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}(2x)'(x^2 + 1)}{e^{4x}} = \\ &= \frac{2xe^{2x} - e^{2x} 2(x^2 + 1)}{e^{4x}} = \frac{2e^{2x}(x - x^2 - 1)}{e^{4x}}. \\ y'(0) &= \frac{2e^{2 \cdot 0} \cdot (0 - 0^2 - 1)}{e^{4 \cdot 0}} = \frac{2 \cdot (-1)}{1} = -2, \text{ так як } e^0 = 1. \text{ Відповідь: } y'(0) = -2. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \cos(\ln^{12} 2x)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= (\cos(\ln^{12} 2x))' = (-\sin(\ln^{12} 2x)) \cdot (\ln^{12} 2x)' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x (\ln 2x)' = \\ &= -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{2x} (2x)' = -12 \sin(\ln^{12} 2x) \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції y , що задана рівнянням $x^2 + y^3 - 2xy = 0$.

Розв'язання.

Функція y задана неявно. Диференціюємо обидві частини даної рівності по x : $2x + 3y^2 y' - 2(x'y + xy') = 0$; $2x + 3y^2 y' - 2(x'y + xy') = 0$.

$$\text{Звідки знаходимо } y'(3y^2 - 2x) = 2y - 2x \quad y' = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}.$$

Приклад 5. Нехай $\begin{cases} x = t^3 + 2t + 1, \\ y = t^2 - 3t + 8. \end{cases}$ Знайти y'_x .

Розв'язання.

$$\text{Маємо } x'_t = 3t^2 + 2, \quad y'_t = 2t - 3. \text{ Значить, } y'_x = \frac{2t - 3}{3t^2 + 2}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = (\cos 3x)^{x^3 + 5}$.

Розв'язання.

Скористаємося логарифмічним диференціюванням:

$$\ln y = (x^3 + 5) \cdot \ln \cos 3x; \quad \frac{1}{y} y' = 3x^2 \cdot \ln \cos 3x + (x^3 + 5) \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x);$$

$$y' = (\cos 3x)^{x^3+5} \cdot (3x^2 \cdot \ln \cos 3x - 3(x^3 + 5) \cdot \operatorname{tg} 3x).$$

Приклад 7. Знайти похідну третього порядку функції $y = \sin 2x$.

Розв'язання.

$$y' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x. \quad y'' = (2 \cos 2x)' = 2(-2 \sin 2x) = -4 \sin 2x.$$

$$y''' = (-4 \sin 2x)' = -4 \cdot 2 \cos 2x = -8 \cos 2x.$$

Приклад 8. Знайти y'' , якщо $2x^2 + y^2 = 2$.

Розв'язання.

Диференціюємо рівняння $2x^2 + y^2 = 2$ по x : $4x + 2y \cdot y' = 0$. Звідки

$$y' = -\frac{2x}{y}. \quad \text{Далі маємо: } y'' = -\frac{2y - 2xy'}{y^2}, \text{ тобто}$$

$$y'' = -\frac{2y - 2x\left(-\frac{2x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{2y + \frac{4x^2}{y}}{y^2} = -\frac{2y^2 + 4x^2}{y^3} = -2 \frac{y^2 + 2x^2}{y^3} = -2 \frac{2}{y^3} = -\frac{4}{y^3},$$

оскільки $2x^2 + y^2 = 2$ за умовою. Отже, $y'' = -\frac{4}{y^3}$.

Приклад 9. Знайти другу похідну функції $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Розв'язання.

За формулою $y'_x = \frac{(\sin 2t)'_t}{(\cos 2t)'_t} = \frac{2 \cos 2t}{-2 \sin 2t} = -\operatorname{ctg} 2t$. Тоді за формулою

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} 2t)'_t}{(\cos 2t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 2t} \cdot 2}{-2 \sin 2t} = -\frac{1}{\sin^3 2t}.$$

Приклад 10. Знайти диференціал функції $y = x^4 - 5^x$.

Розв'язання.

Знаходимо похідну даної функції і, помноживши її на диференціал

незалежної змінної, одержимо шуканий диференціал $y' = 4x^3 - 5^x \cdot \ln 5$,

$$dy = (4x^3 - 5^x \cdot \ln 5)dx.$$

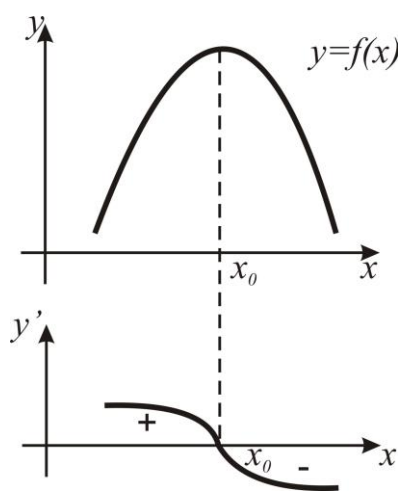
ЗАНЯТТЯ 3 –4. Дослідження функцій однієї змінної і побудова графіків

3-4.1. Мета занять. Навчитись досліджувати функції однієї змінної та будувати їх графіки.

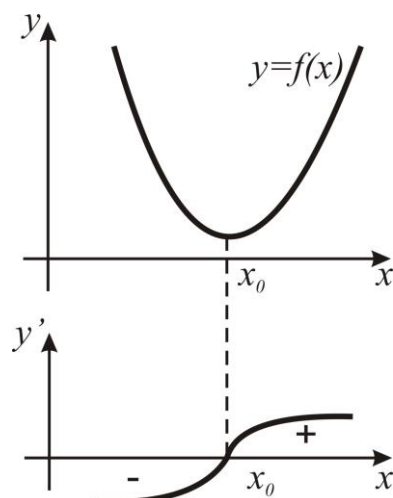
3-4.2 Методичні вказівки з самостійної роботи студентів.

Основні поняття

1. **Монотонність функції (зростання та спадання)**
 Якщо $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
 то $f(x)$ зростає на (a, b) .
 Якщо $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
 то $f(x)$ спадає на (a, b) .
2. **Умови монотонності функції**
 $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b) \Leftrightarrow f(x)$ зростає при $x \in (a, b)$;
 $f'(x) < 0$ при $x \in (a, b) \Leftrightarrow f(x)$ спадає при $x \in (a, b)$.
3. **Екстремуми функції (максимум та мінімум)**
 $f(x_0) > f(x_0 \pm \delta) \Rightarrow x_0$ – точка максимуму,
 $f(x_0) < f(x_0 \pm \delta) \Rightarrow x_0$ – точка мінімуму.
4. **Необхідна умова локального екстремуму функції $f(x)$ в точці x_0**
 Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує (x_0 – критична точка).
5. **Перша достатня умова екстремуму (x_0 – критична точка)**



x_0 – точка максимуму

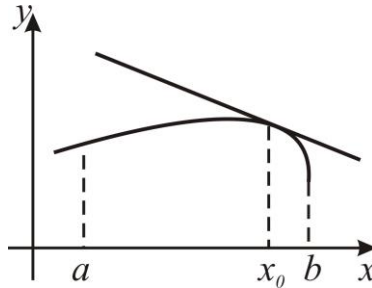


x_0 – точка мінімуму

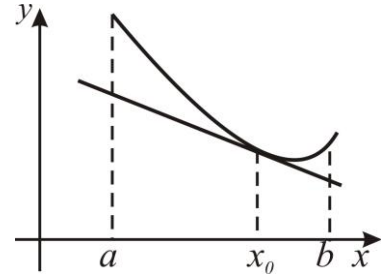
6. Друга достатня умова екстремуму (x_0 – критична точка)

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ – точка максимуму,
 $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ – точка мінімуму.

7. Опуклість та вгнутість графіка функції



графік функції,
 опуклий на проміжку
 (a,b)



графік функції,
 вгнутий на проміжку
 (a,b)

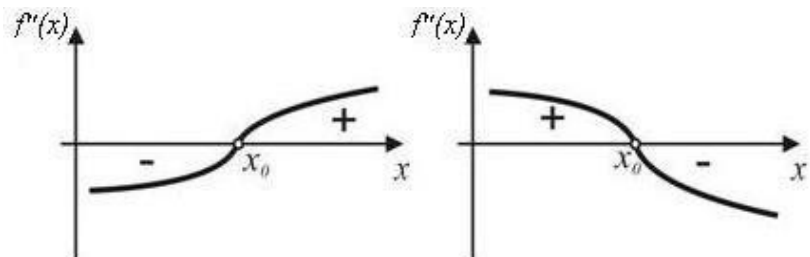
8. Достатня умова опуклості (вгнутості), графіка функції

$f''(x) > 0, x \in (a, b) \Leftrightarrow$ графік функції є вгнутим на (a,b),
 $f''(x) < 0, x \in (a, b) \Leftrightarrow$ графік функції є опуклим на (a,b).

9. Точка перегину

Точка графіка яка відділяє його опуклу частину від вгнутої.

10. Достатня умова існування точки перегину



x_0 – точка перегину.

11. Асимптоти графіка функції:

Вертикальні асимптоти:

$$x = a \text{ (якщо } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{)}.$$

Похилі асимптоти:

$$y = kx + b, \text{ де } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x).$$

Алгоритм загального дослідження функцій однієї змінної

- 1) знайти область визначення функції (це може бути один або декілька проміжків, скінченних або нескінченних);
- 2) знайти точки розриву функції та визначити їх характер;
- 3) з'ясувати змінювання функції при прямуванні аргументу до кінців проміжків області визначення (для цього необхідно знайти відповідні однобічні границі);
- 4) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
- 5) знайти проміжки зростання і спадання функції (досліджуючи знак її першої похідної);
- 6) знайти точки екстремуму функції (за допомогою першої або другої похідної, а також шляхом виявлення точок, в яких функція не має похідної або має нескінченну похідну);
- 7) обчислити значення екстремумів (для чого обчислити значення функції в точках екстремумів);
- 8) знайти проміжки опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину (шляхом дослідження знака другої похідної і знаходження точок, в яких друга похідна дорівнює нулю і змінює знак при переході через відповідну точку);
- 9) знайти асимптоти графіка функції (вертикальні і похилі);
- 10) знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

1. Знайдіть область визначення функції.

Функція існує скрізь, крім точок $x = \pm 1$, $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2. Знайдіть точки перетину графіка функції з координатними осями.

Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Отже, графік функції проходить через початок координат.

3. Дослідіть функцію на парність, непарність.

Маємо $y(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -y(x)$. Виконання цієї умови є ознакою

непарної функції. Отже, задана функція непарна, тому її графік симетричний відносно точки $(0;0)$. Ця обставина спрощує побудову графіка функції. Подальше дослідження проводитиметься тільки для $x \geq 0$.

4. Знайдіть точки розриву і визначте їхній характер.

Точками розриву є точки $x = 1$ і $x = -1$.

Знайдемо однобічні границі функції в точці $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x}{\sqrt[3]{(x-1) \cdot (x+1)}} = \pm \infty.$$

(якщо $x \rightarrow 1 + 0$, то $x - 1 > 0$; якщо $x \rightarrow 1 - 0$, то $x - 1 < 0$).

Точки $x = 1$ і $x = -1$ (в силу симетрії) є точками розриву другого роду, а прямі $x = \pm 1$ – вертикальними асимптотами графіка функції

5. Знайдіть похилі асимптоти графіка функції.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \infty.$$

Отже, при $x \rightarrow +\infty$ похилої асимптоти немає. Із симетрії графіка випливає, що при $x \rightarrow -\infty$ похила асимптота теж відсутня.

6. З'ясуйте поведінку функції при $x \rightarrow \pm \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{x} = \pm \infty.$$

7. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції та її екстремуми.

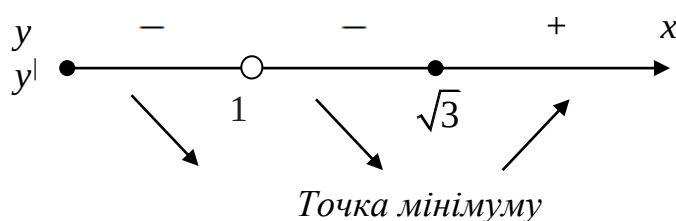
Знайдемо першу похідну функції.

$$y'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{3(x^2-1) - 2x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{x^2-3}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^4}}.$$

$y'(x)$ не існує в точках $x = \pm 1$, тобто у тих точках, де не існує і сама функція, тому критичними будуть лише точки, в яких y' обертається в нуль. Бачимо, що $y' = 0$ при $x = \pm\sqrt{3}$.

Розіб'ємо область визначення критичними точками на інтервали, визначимо знак першої похідної, а відповідно і поведінку функції в кожному інтервалі.

Зауважимо, що з огляду на непарність функції дослідження достатньо провести лише при $x \geq 0$, ліва половина графіка відновлюється за принципом непарної симетрії.



Аналіз показує, що в інтервалах $(0;1) \cup (1;\sqrt{3})$ функція спадає, в інтервалі $(\sqrt{3}; +\infty)$ функція зростає. У точці $x = \sqrt{3}$ функція досягає мінімуму: $y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1,37$.

8. Знайдіть проміжки опуклості та вгнутості графіка функції та точки перегину.

Знайдемо другу похідну функції.

$$y''(x) = \left(\frac{x^2 - 3}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} \right)' = \frac{2x \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4} - (x^2 - 3) \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)} \cdot 2x}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^8}} =$$

$$= \frac{6x \cdot (x^2 - 1) - 8x \cdot (x^2 - 3)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}} = \frac{2x(3x^2 - 3 - 4x^2 + 12)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}} = \frac{2x(9 - x^2)}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}.$$

$$y''(x) = 0 \text{ при } x = \pm 3.$$

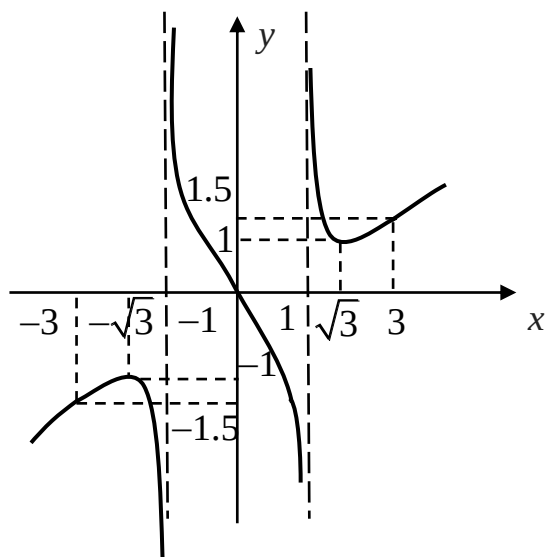
Дослідимо знак другої похідної, а відповідно і опуклість і вгнутість функції.



Із наведеної схеми видно, що в інтервалах $(0;1)$ і $(3;+\infty)$ крива опукла, а в інтервалі $(1;3)$ – вгнута. В точці $x=3$ має місце перегин графіка функції, $y_{\text{перег.}} = y(3) = 1,5$.

9. Побудуйте графік функції.

Враховуючи результати дослідження, будуємо графік функції для $x \geq 0$. Насамперед проводимо асимптоти графіка, потім наносимо всі знайдені точки графіка (точку перетину з осями координат, точку екстремуму і точку перегину). З'єднуємо точки, враховуючи поведінку функції у відповідних інтервалах, в критичних точках, при $x \rightarrow \pm\infty$, а також той факт, що $x=1$ є вертикальною асимптотою. Ліва половина графіка (при $x < 0$) отримується за правилом непарної симетрії (поворотом на 180° відносно початку координат).



Приклад 2. Дослідити функцію $y = \frac{1-x^3}{x^2}$ та побудувати її графік.

1. Знайдіть область визначення функції.

Функція існує скрізь, крім точки $x=0$: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Знайдіть точки перетину графіка функції з координатними осями.

При $x=0$ функція не існує, отже графік функції не перетинає вісь Oy . Якщо $y=0$, то $x=1$, отже в точці $(1;0)$ графік функції перетинає вісь Ox .

3. Дослідіть функцію на парність.

$$y(-x) = \frac{1-(-x)^3}{(-x)^2} = \frac{1+x^3}{x^2}.$$

Функція не є ні парною, ні непарною, ні періодичною. Така функція називається функцією загального виду.

4. Знайдіть точки розриву і визначте їхній характер.

Точкою розриву є точка $x = 0$. Знайдемо однобічні границі в цій точці.

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1 - x^3}{x^2} = +\infty \text{ (якщо } x \rightarrow \pm 0, \text{ то } x^2 > 0).$$

Точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду. Тому графік функції має вертикальну асимптоту, рівняння якої $x = 0$.

5. Знайдіть похилі асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^3}{x^3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Таким чином, пряма $y = -x$ є похилою асимптотою і при $x \rightarrow +\infty$, і при $x \rightarrow -\infty$. Інших асимптот немає.

6. З'ясуйте поведінку функції при $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{x^2} = +\infty.$$

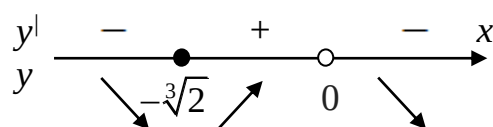
7. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції та її екстремуми (якщо вони є).

Знаходимо першу похідну функції.

$$y'(x) = \left(\frac{1 - x^3}{x^2} \right)' = \frac{-3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - x^3)}{x^4} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4} = -\frac{x^3 + 2}{x^3}.$$

$y'(x)$ не існує в точці $x = 0$, тобто у тій точці, де не існує і сама функція, тому критичною буде лише та точка, в якій y' обертається в нуль. $y' = 0$, якщо $x^3 + 2 = 0$, тобто при $x = -\sqrt[3]{2}$.

Розбиваємо область визначення критичною точкою на інтервали, визначаємо знак першої похідної в цих інтервалах і досліджуємо поведінку функції у цих інтервалах.



Точка мінімуму

Визначивши знаки першої похідної, зробимо перші висновки про поведінку функції. В інтервалах $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$ і $(0; +\infty)$ функція спадає, а в інтервалі $(-\sqrt[3]{2}; 0)$ – зростає. У точці $x = -\sqrt[3]{2}$ функція досягає мінімуму, оскільки перша похідна при переході через цю точку зліва направо міняє знак з «мінуса» на «плюс», причому

$$y_{\min} = y(-\sqrt[3]{2}) = \frac{1+2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

8. Знайдіть проміжки опуклості та вгнутості графіка функції та точки перегину.

Знайдемо другу похідну функції.

$$y''(x) = \left(-\frac{x^3 + 2}{x^3} \right)' = -\frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^3 + 2)}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}, \quad y'' \neq 0.$$

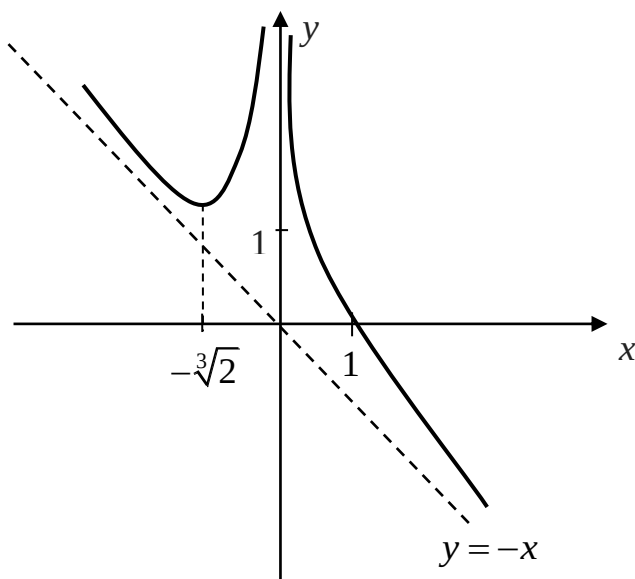
$y''(x)$ не існує при $x = 0$, але це значення не може бути абсцисою точки перегину, оскільки воно є точкою розриву функції. Отже, графік функції не має точок перегину. У всій області визначення функції

$$y'' = \frac{6}{x^4} > 0, \text{ тому її графік скрізь вгнутий.}$$

9. Побудуйте графік функції.

За результатами проведеного дослідження, будуємо графік функції.

Проводимо вертикальну ($x=0$) і похилу ($y=-x$) асимптоти, наносимо точку перетину з віссю Ox ($1;0$) і точку мінімуму $(-\sqrt[3]{2}; \frac{3}{\sqrt[3]{4}})$.



ЗАНЯТТЯ 5 –6. Частинні похідні функцій багатьох змінних

5-6.1. Мета занять. Навчитися знаходити частинні похідні, повні диференціали першого і вищих порядків для функцій багатьох змінних.

5-6.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функції багатьох (кількох) змінних

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y) . Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x, y)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y – незалежними змінними (аргументами).

Множину пар (x, y) значень x та y , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають $D(f)$ або D . Множину значень z позначають $E(f)$ або E . Областю визначення $D \subset R_2$ функції є деяка множина точок площини Oxy . Зокрема, областю визначення функції може бути вся площина, або частина площини, обмежена певними лініями.

Лінію, що обмежує область D , називають *межею області визначення*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. *Графіком функції* $z = f(x, y)$ у прямокутній системі $Oxyz$ називається геометричне місце точок $M(x; y; f(x, y))$, проекції яких $(x; y)$ належать області D .

Поняття функції двох змінних узагальнимо на випадок трьох і більшого числа незалежних змінних.

Нехай D – деяка множина упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, тобто точок $M(x; y; z)$ тривимірного простору R_3 .

Якщо кожній точці $(x; y; z) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x , y і z та записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$.

Якщо кожній точці $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію u від n змінних: $x_1, x_2, \dots, x_n$ і записують $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $u = f(M), M \in R_n$.

Частинні похідні. Частинний приріст $\Delta_x z$ функції за змінною x : $\Delta_x z = f(x, y + \Delta x) - f(x, y)$, за змінною y : $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в точці $M(x; y)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right)$, то вона називається *частинною похідною за x (за y)* функції $z = f(x; y)$ у точці $(x; y)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}, z'_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}, z'_y \right)$.

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ за змінною x* і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або $f''_{xx} : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ або $f''_{xx} = (f'_x)'_x$.

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ за змінною y , то цю похідну називають *мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$* і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або $f''_{xy} : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ або $f''_{xy} = (f'_x)'_y$.

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають *частинними похідними третього порядку функції $f(x, y)$* .

Якщо функція $f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0 , то в цій точці $f''_{xy}|_{M_0} = f''_{yx}|_{M_0}$.

Повний диференціал функції та диференціали вищих порядків. Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ визначається за формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Аналогічна формула має місце для диференційованої функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

Диференціал другого порядку визначають за формулою

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Формула для диференціала n -го порядку $d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z$

Похідна складеної функції. Повна похідна.

Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовані в точці t , а функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x, y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційована в точці t . Похідну цієї функції знаходять за формулою $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

Якщо $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Зокрема, якщо $u = f(x, y, z)$, а $y = y(x)$, $z = z(x)$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} - \text{формула для обчислення повної похідної.}$$

Якщо функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ диференційовані в точці $M_1(u, v)$, а функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M_2(x(u, v); y(u, v))$, то складена функція $f(x(u, v), y(u, v))$ диференційована в точці $M_1(u, v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$.

Диференціювання неявної функції

Нехай задана неявна функція $y = \varphi(x)$ рівнянням $F(x, y) = 0$. Похідна цієї функції знаходиться за формулою $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Частинні похідні z'_x і z'_y неявної функції $z = \varphi(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, визначаються за формулами

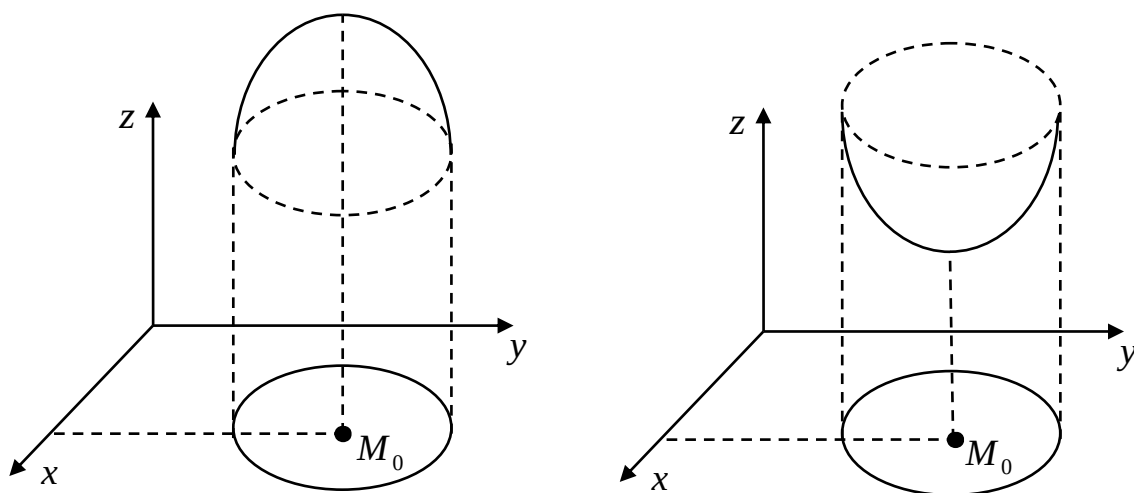
Екстремум функції багатьох змінних

Необхідні умови екстремуму функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку у цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} z'_x(M_0) = 0, \\ z'_y(M_0) = 0, \end{cases} (M_0 - \text{стаціонарна точка}).$$

Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна з частинних похідних не існує, називаються **критичними точками** функції. Критичні точки є «підозрілими» на екстремум.



Достатні умови екстремуму функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Нехай $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}$. Можливі такі випадки:

- 1) якщо $\Delta(M_0) > 0$ і $z''_{xx}(M_0) > 0$ ($z''_{yy}(M_0) > 0$), то M_0 – точка мінімуму;
- 2) якщо $\Delta(M_0) > 0$ і $z''_{xx}(M_0) < 0$ ($z''_{yy}(M_0) < 0$), то M_0 – точка максимуму;
- 3) якщо $\Delta(M_0) < 0$ – екстремуму в точці M_0 немає;
- 4) якщо $\Delta(M_0) = 0$ – потрібне додаткове дослідження.

Увага! З умови $\Delta(M_0) > 0$ випливає, що z''_{xx} і z''_{yy} мають однакові знаки.

5-6.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дати означення частинної похідної функції двох змінних за однією з них.

2. Як визначають частинні похідні другого і третього порядку від функції двох змінних?
3. В якому випадку рівні другі мішані похідні?
4. Дати означення диференційованості функції $z = f(x, y)$.
5. Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження.
6. Записати формулу для знаходження диференціала n -го порядку функції $z = f(x, y)$.
7. Як знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = f(x(t), y(t))$?
8. Що називається повною похідною?
9. Написати формулу для знаходження похідних z'_x і z'_y , якщо $z = f(u, v, t)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $t = t(x, y)$.
10. Записати правила диференціювання неявних функцій однієї і двох змінних.
11. Запишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, якщо поверхня задана у явному або неявному вигляді.
12. Сформулюйте необхідні умови існування екстремумів функції двох змінних.
13. Сформулюйте достатні умови існування екстремумів функції двох змінних.

5-6.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [6] №№ 4.41, 4.50, 4.51, 4.53, 4.64, 4.67, 4.73.

Домашні задачі: [6] №№ 4.42, 4.49, 4.54, 4.56, 4.65, 4.68, 4.72.

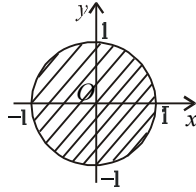
Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй

геометричну інтерпретацію: $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$

Розв'язання.

Функція визначена, якщо $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є коло з центром $(0; 0)$ та радіусом 1.



Приклад 2. Знайти диференціал другого порядку функції $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$.

Розв'язання.

Послідовно отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$\text{Маємо } d^2z = 6ydx^2 + 2(6x - 2)dxdy + 2dy^2.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні z'_u і z'_v складеної функції $z = x^2 \ln y$, де

$$x = \frac{u}{v}, \quad y = uv.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} v = \frac{u}{v^2} (1 + 2 \ln(uv)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \ln y \frac{1}{v} \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y} u = \frac{u^2}{v^2} (1 - 2 \ln(uv)).$$

Приклад 4. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці $M_0(1; -1; 2)$.

Розв'язання.

Обчислимо частинні похідні заданої функції в точці M_0 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2yz; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 2 + 4 = 6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2xz; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = -2 - 4 = -6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2xy; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 4 + 2 = 6.$$

$$\text{Запишемо } \text{grad } u = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Приклад 5. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$S: x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0 \text{ у точці } M(1; 2; -1).$$

Розв'язання.

Рівняння дотичної площини P і нормалі N в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ знаходимо за формулами

$$P: F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$N: \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Знайдемо усі необхідні частинні похідні і обчислимо їхні значення в точці $M(1; 2; -1)$. Позначимо $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$.

$$F'_x = 3x^2 + yz; F'_x(M) = 3 - 2 = 1. F'_y = 3y^2 + xz; F'_y(M) = 3 \cdot 4 - 1 = 11.$$

$$F'_z = 3z^2 + xy; F'_z(M) = 3 + 2 = 5.$$

Рівняння дотичної площини: $1 \cdot (x - 1) + 11 \cdot (y - 2) + 5 \cdot (z + 1) = 0$ або

$$x + 11y + 5z - 18 = 0. \text{ Рівняння нормалі: } \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}.$$

Приклад 6. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні першого порядку функції z .

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y); z'_y = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x).$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (x^3 - 1) = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Знайшли дві точки $M_1(0; 0)$ і $M_2(1; 1)$. Обидві точки є стаціонарними, оскільки функція z визначена на всій площині xOy .

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 6x; z''_{yy} = 6y; z''_{xy} = z''_{yx} = -3. \text{ Складемо визначник } \Delta(x, y):$$

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}. \text{ Дослідимо стаціонарну точку } M_1(0; 0). \quad \text{Обчислимо}$$

$$\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0. \text{ Згідно з достатньою умовою в точці } M_1$$

екстремуму немає. Дослідимо стаціонарну точку $M_2(1;1)$. Обчислимо

$$\Delta(M_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0. \text{ Згідно з достатньою умовою точка } M_2 \text{ є}$$

точкою мінімуму ($z''_{xx}(M_2) = 6 > 0$). Обчислимо значення функції z в точці M_2 . В результаті маємо $z_{\min} = z(M_2) = 1 + 1 - 3 = -1$.

ЗАНЯТТЯ 7 Аудиторна самостійна робота «Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних»

ЗАНЯТТЯ 8. Комплексні числа

8.1 Мета заняття. Вміти записувати комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах та виконувати дії з комплексними числами.

8.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Комплексним числом z називається вираз вигляду $z = x + iy$, де x та y – дійсні числа, а i – так звана *уявна одиниця*, $i^2 = -1$.

Якщо $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ називається *суто уявним*; якщо $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ ототожнюється з *дійсним числом* x , а це означає, що множина всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$ є підмножиною множини $\mathbf{C}$ усіх комплексних чисел, тобто $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z та позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y – *уявною частиною* z та позначається $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексних числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються *рівними* ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх дійсні та їх уявні частини: $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Зокрема, комплексне число $z = x + iy$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$.

Геометричне зображення комплексних чисел

Будь-яке комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою $M(x, y)$ площини Oxy такою, що $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Площина, на якій зображені комплексні числа, називається *комплексною площиною*. Вісь абсцис називається *дійсною віссю* тому, що на ній лежать дійсні числа $z = x + i \cdot 0 = x$. Вісь ординат називається *уявною віссю*, бо на ній лежать суто уявні комплексні числа $z = 0 + iy = iy$.

Комплексне число $z = x + iy$ можна задавати за допомогою радіус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$. Довжина вектора $\vec{r}$, який зображує комплексне число z , називається *модулем* цього числа та позначається $|z|$ або r . Модуль комплексного числа визначається за формулою

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Величина кута між додатним напрямом дійсної осі та вектором $\vec{r}$, який зображує комплексне число, називається *аргументом* цього числа та позначається $\operatorname{Arg} z$ або φ .

Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ є величиною багатозначною та визначається з точністю до доданка $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$): $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, де $\arg z$ – *головне значення аргументу*, що знаходиться в проміжку $(-\pi; \pi]$, тобто $-\pi < \arg z \leq \pi$ (іноді головне значення аргументу може належати проміжку $[0; 2\pi)$). Аргумент φ визначається з формул:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \sin \varphi = \frac{y}{r}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Оскільки $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$, то

$$\cos \varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z),$$

$$\sin \varphi = \sin(\arg z + 2\pi k) = \sin(\arg z),$$

де

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Форми запису комплексних чисел

Запис числа z у вигляді $z = x + iy$ називають **алгебраїчною формою** комплексного числа.

Запис числа z у вигляді $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ називають **тригонометричною формою**. При переході від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної достатньо визначити лише головне значення аргументу комплексного числа z , тобто мати на увазі, що $\varphi = \arg z$.

Використовуючи *формулу Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

комплексне число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ можна записати в так званій **показниковій (або експоненціальній) формі** $z = re^{i\varphi}$.

Згідно з формулою Ейлера, функція $e^{i\varphi}$ є періодичною з основним періодом 2π . Для запису комплексного числа z у показниковій формі достатньо знайти модуль r та головне значення аргументу комплексного числа, тобто обчислити $\varphi = \arg z$.

Дії з комплексними числами

Нехай два комплексних числа задані в алгебраїчній формі: $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$.

Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі виконуються так:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Зауваження.

Неважко перевірити, що коли в рівностях **1 – 3** кожне комплексне число z замінити спряженим $\bar{z}$, то і результати вказаних дій заміняться спряженими числами.

Нехай два комплексних числа задані в тригонометричній формі: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Дії з комплексними числами в тригонометричній формі виконуються так:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

$$3. z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ (формула Муавра).}$$

$$4. \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

8.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення комплексного числа.

2. Яке число називається комплексно спряженим для комплексного числа $z = x + iy$?

3. Чому дорівнює дійсна та уявна частини комплексного числа $z = x + iy$?

4. Дайте означення модуля та аргументу комплексного числа.

5. Наведіть формули для обчислення модуля та аргументу комплексного числа.

6. Наведіть три форми запису комплексного числа.

7. Як виконуються дії з комплексними числами, які задані в алгебраїчній формі?

8. Як виконуються дії з комплексними числами, які задані в тригонометричній або показниковій формах?

9. Наведіть формулу Муавра.

8.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [7] №№ 3.1, 3.7, 3.9, 3.19, 3.31, 3.21.

Домашні задачі: [7] №№ 3.2, 3.6, 3.20, 3.22.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити $(2 - 5i)^2 - i^{13} + \frac{4}{i}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (2 - 5i)^2 - i^{13} + \frac{4}{i} &= 4 - 20i + 25i^2 - (i^2)^6 \cdot i + \frac{4 \cdot i}{i \cdot i} = |i^2 = -1| = \\ &= 4 - 20i - 25 - i - 4i = -21 - 25i. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $(1 + \sqrt{3}i)^9$, використовуючи формулу Муавра.

Розв'язання.

Представимо комплексне число в тригонометричній формі $z = r(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Застосуємо формулу Муавра для піднесення до відповідної степені.

$$z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3} \right) = 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 (-1) = -512.$$

ЗАНЯТТЯ 9. Невизначений інтеграл. Безпосереднє інтегрування

9.1 Мета заняття. Вивчити поняття первісної та невизначеного інтеграла, зрозуміти геометричний зміст невизначеного інтеграла, знати основні властивості невизначеного інтеграла, вивчити таблицю основних інтегралів і вміти її застосовувати.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функція $F(x)$, що визначена на проміжку X , називається **первісною** функції $f(x)$, якщо $F(x)$ неперервна на проміжку X , у кожній внутрішній точці проміжку X функція $F(x)$ є диференційованою і

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)dx \quad \forall x \in X.$$

Теорема (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на X , то для будь-якого числа $C \in \mathbb{R}$ функція $F(x) + C$ є також первісною функції $f(x)$ на X .

Теорема (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

Множина всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ на цьому проміжку та позначається $\int f(x)dx$. Отже, якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Символ $\int$ називають **знаком невизначеного інтеграла** (читається “інтеграл”, що означає “цілий”, “увесь”), функцію $f(x)$ – **підінтегральною функцією**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, букву x – **змінною інтегрування**.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ при фіксованому C являє таку криву $y = F(x) + C$, у кожній точці якої напрям дотичної визначається значенням підінтегральної функції в цій точці.

Властивості невизначеного інтеграла

Нехай існує $\int f(x)dx = F(x) + C$ та $F'(x) = f(x)$.

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \forall x \in X$.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \forall x \in X$.

3. Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{або} \quad \int dF(x) = F(x) + C \quad \forall x \in X.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтегрування, тобто $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad \forall x \in X$ та $\forall k \in R(k \neq 0)$.

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій, тобто

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \quad \forall x \in X.$$

6. Властивість *інваріантності* формул інтегрування.

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = u(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

При обчисленні невизначених інтегралів корисно мати на увазі наступні правила.

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів

Щоб успішно застосовувати інтегральне числення під час розв'язання задач, необхідно насамперед оволодіти технікою знаходження невизначених інтегралів від елементарних функцій. Одним із основних моментів успішного оволодіння технікою інтегрування елементарних функцій є досконале знання таблиці основних інтегралів. Ця таблиця є сукупністю формул, які необхідно

знати напам'ять, і складена за таблицею похідних із використанням властивості інваріантності формули інтегрування. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона дорівнюватиме підінтегральній функції.

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, яка на проміжку X має неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

1. $\int 0 \cdot du = C.$
2. $\int 1 \cdot du = \int du = u + C.$
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$ або $\int \frac{du}{u} = \ln |Cu|.$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$
6. $\int e^u du = e^u + C.$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
8. $\int \cos u du = \sin u + C.$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arcctg} u + C.$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos x + C.$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$
15. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C.$
16. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$

$$17. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$18. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

$$19. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$20. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$21. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$22. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$$

Інтеграли 1 – 22 називаються *табличними інтегралами*, за їх допомогою можна знаходити й інші інтеграли. Мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод ґрунтується на розкладі підінтегральної функції в лінійну комбінацію більш простих функцій та на застосуванні властивостей невизначеного інтеграла:

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_i| > 0 \right)$$

9.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення первісної функції. Наведіть приклади.
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Поясніть, чому при інтегруванні з'являється довільна стала.
4. В чому полягає геометричний зміст сукупності первісних функцій?
5. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
6. Наведіть приклади використання властивості інваріантності невизначеного інтеграла.
7. Як складається таблиця основних інтегралів?
8. В чому полягає метод безпосереднього інтегрування?

9.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [6] №№ 1.1 – 1.15 (непарні), 1.17 – 1.35.

Домашні задачі: [6] №№ 1.2 – 1.14 (парні), 1.16 – 1.36.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int \left(3\sin x - 5 + 4x^3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$.

Розв'язання.

Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

$$I = 3 \int \sin x dx - 5 \int dx + 4 \int x^3 dx - \int \frac{dx}{x} + 6 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Використовуючи формули 7, 2, 3, 4, 12 таблиці основних інтегралів, знаходимо:

$$3 \int \sin x dx = 3(-\cos x + C_1) = -3\cos x + 3C_1;$$

$$-5 \int dx = -5(x + C_2) = -5x - 5C_2;$$

$$4 \int x^3 dx = 4 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_3 \right) = x^4 + 4C_3;$$

$$-\int \frac{dx}{x} = -(\ln|x| + C_4);$$

$$6 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 6(\arcsin x + C_5) = 6\arcsin x + 6C_5).$$

Таким чином,

$$I = -3\cos x - 5x + x^4 - \ln|x| + 6\arcsin x + (3C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4 + 6C_5).$$

Всі довільні сталі підсумовуємо, результат позначаємо однією буквою, тому $C = 3C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4 + 6C_5$, та остаточно отримуємо

$$\int \left(3\sin x - 5 + 4x^3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = -3\cos x - 5x + x^4 - \ln|x| + 6\arcsin x + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання.

Інтеграл не є табличним, тому перетворимо підінтегральну функцію.

Оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то інтеграл можна записати у вигляді

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Застосовуючи властивість 5 невизначеного інтеграла та використовуючи формули 9 і 10, остаточно маємо

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int (x^2 + 5)^3 dx$.

Розв'язання.

За формулою знаходимо $(x^2 + 5)^3 = x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int (x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125) dx = \frac{x^7}{7} + \frac{15x^5}{5} + \frac{75x^3}{3} + 125x + C = \\ &= \frac{x^7}{7} + 3x^5 + 25x^3 + 125x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{9 + 2x^2}{x^2(9 + x^2)} dx$.

Розв'язання.

Оскільки $9 + 2x^2 = (9 + x^2) + x^2$, то

$$I = \int \frac{(9 + x^2) + x^2}{x^2(9 + x^2)} dx = \int \frac{(9 + x^2)}{x^2(9 + x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(9 + x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{9 + x^2}.$$

За формулою 3 маємо $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_1 = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C_1$. За

формулою 13, де $a = 3$, маємо $\int \frac{dx}{9 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C_2$. Тоді

$$I = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C, \text{ де } C = C_1 + C_2.$$

ЗАНЯТТЯ 10. Введення під диференціал. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами

10.1 Мета заняття. Вміти застосовувати основні методи інтегрування: виконувати заміну змінних при інтегруванні функцій і формулу інтегрування частинами.

10.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Метод заміни змінної інтегрування

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження шуканого інтеграла до табличного, тобто перейти до

безпосереднього інтегрування. Такий метод називається методом заміни змінної.

Теорема (про інтегрування за допомогою заміни змінної). Нехай $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку X , тобто $\int f(x)dx = F(x) + C \quad \forall x \in X$, а функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку T , множиною значень якої є проміжок X . Тоді справджується рівність

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \quad \forall t \in T.$$

Метод підведення під знак диференціала

Припустимо, що в інтегралі $\int f(x)dx = F(x) + C$ від підінтегральної функції $f(x)$ можна відокремити функцію $\varphi(x) = u$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du.$$

Тоді за теоремою маємо

$$\int f(x)dx = \int g(u)du.$$

Вказане перетворення називається підведенням функції $u = \varphi(x)$ під знак диференціала.

При операції підведення під знак диференціала часто використовують такі перетворення диференціала:

$$dx = d(x + a)$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

$$\frac{dx}{x+a} = d(\ln(x+a)) \quad x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1} + a)$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

$$\sin x dx = -d(\cos x)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$$

Метод підстановки

При знаходженні невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ користуються підстановкою $x = \psi(u)$, де функція $\psi(u)$ є, по-перше, диференційованою $\forall u \in U$, по-друге, $\psi'(u) \neq 0 \quad \forall u \in U$ та, по-третє, має обернену функцію $u = \psi^{-1}(x)$.

Метод інтегрування частинами –

базується на використанні формули диференціювання добутку двох функцій.

Теорема (про формулу інтегрування частинами). Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ такі, що $\forall x \in X$ існують $u'(x)$ і $v'(x)$. Тоді

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Формула $\int u dv = uv - \int v du$ називається **формулою інтегрування частинами невизначеного інтеграла**.

Ефективність використання формули інтегрування частинами залежить від уміння вибрати потрібні u і dv , що здобувається практикою.

Але можна вказати на деякі типи інтегралів, які зручно інтегрувати частинами.

1. Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin bxdx$, $\int P(x)\cos bxdx$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня від x , $a \neq 0, b \neq 0$ – дійсні числа. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$. Після застосування n раз формули інтегрування частинами ці інтеграли зводяться відповідно до інтегралів $\int e^{ax} dx$, $\int \sin bxdx$, $\int \cos bxdx$.

2. Інтеграли вигляду $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\text{arcctg} x dx$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня від x . Тут за u слід брати множники $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \text{arcctg} x$.

3. Інтеграли вигляду $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$, $a \neq 0, b \neq 0$ – дійсні числа.

Після дворазового застосування формули інтегрування частинами у правій частині отримуємо заданий інтеграл. Це дає змогу знайти інтеграл як розв'язок рівняння.

10.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Напишіть формулу заміни змінної у невизначеному інтегралі. За яких умов ця формула справедлива?

2. Напишіть формулу інтегрування частинами. За яких умов ця формула справедлива?

3. Наведіть типи інтегралів, обчислення яких доцільно виконувати методом інтегрування частинами.

10.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [6] №№ 1.101 – 1.115 (непарні).

Домашні задачі: [6] №№ 1.100 – 1.114 (парні).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int e^{x^2} x dx$.

Розв'язання.

По-перше, можна застосувати підстановку $u = x^2$, звідки $du = 2x dx$, а $x dx = \frac{1}{2} du$. Підставимо в інтеграл і матимемо $I = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$.

Повернемося до попередньої змінної x . Тоді

$$I = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

По-друге, можна ввести функцію під знак диференціала, тобто записати $x dx = \frac{1}{2} dx^2$. Тоді на підставі властивості інваріантності маємо

$$I = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Розв'язання.

Оскільки $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, а $d(1-x^2) = -2x dx$, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int \arcsin x d(\arcsin x) + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin x d(\arcsin x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{2} + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

По-перше, для обчислення інтеграла можна застосувати підстановку

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

По-друге, можна ввести функцію під знак диференціала

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int (x+1) \sin x dx$.

Розв'язання.

Позначимо $u = x+1$, $dv = \sin x dx$. Знайдемо du і v , які містяться в правій частині формули інтегрування частинами: $du = (x+1)' dx = dx$, а $v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x$, а. Таким чином,

$$I = -(x+1) \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Нехай тепер $u = \sin x$, $du = x dx$. Тоді $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$, $du = \cos x dx$. Отже,

$I = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx$. У правій частині отримали невизначений інтеграл, який є складнішим, ніж заданий. Отже, необхідно зробити заміну $u = x+1$, $dv = \sin x dx$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int \ln^2 x dx$.

Розв'язання.

Нехай $u = \ln^2 x$, $dv = dx$. Тоді $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$, $v = \int dx = x$. Отже,

$$I = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx.$$

Невизначений інтеграл $\int \ln x dx$ також інтегруватимемо частинами. Нехай

$$u = \ln x, \quad dv = dx. \quad \text{Тоді } du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x. \quad \text{Отже,}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Остаточно маємо $I = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C$.

Формалізований запис такий:

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2(x \ln x - \int dx) = \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C. \end{aligned}$$

ЗАНЯТТЯ 11. Інтегрування раціональних, ірраціональних і тригонометричних функцій

11.1 Мета заняття. Вміти інтегрувати найпростіші раціональні, ірраціональні і тригонометричні дробі, навчитися розкладати правильний дріб на найпростіші дробі та інтегрувати будь-яку раціональну функцію. Навчитися інтегрувати різні класи тригонометричних функцій.

11.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Розглянемо дробово-раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ – той же многочлен, а $Q(x)$ – многочлен степеня m , який має вигляд $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m$, де b_j ($j = \overline{0, m}$) – дійсні числа.

Згадаємо деякі знання з теорії многочленів і алгебраїчних дробів. Алгебраїчний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника, тобто $n < m$. Коли $n \geq m$, то алгебраїчний дріб називають *неправильним*.

Якщо даний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильний, то з нього можна виділити цілу

частину, а саме многочлен $G(x) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k$, ділячи чисельник на знаменник:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $R(x)$ – многочлен, степінь якого менше, ніж степінь многочлена $Q(x)$,

тобто $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильний алгебраїчний дріб.

Отже,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int G(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Ця рівність показує, що інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного дробу. Інтеграл від многочлена знаходиться безпосередньо. Оскільки правильний дріб можна представити у вигляді скінченної суми елементарних дробів, то інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться до інтегралів від елементарних дробів.

Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування

Найпростішими дробами називаються правильні дроби виглядів:

$$1) \frac{A}{x-a}; 2) \frac{A}{(x-a)^n}; 3) \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; 4) \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де $n \geq 2$ – ціле додатне число, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має комплексні корені.

Розглянемо інтеграли від елементарних алгебраїчних дробів деяких типів.

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A \ln |x-a| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \text{ за умови } \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Для інтегрування цього дробу виділимо у чисельнику похідну знаменника. Для цього додамо і віднімемо число $\frac{Mp}{2}$ у чисельнику. Матимемо

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{\left(Mx + \frac{Mp}{2}\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{x^2 + px + q} dx = \\
&= \int \frac{Mx + \frac{Mp}{2}}{x^2 + px + q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \\
&= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Таким чином, одержали в першому інтегралі, що у чисельнику вираз $(2x + p)$ є похідною знаменника, а другий інтеграл заміною $t = x + \frac{p}{2}$ зводиться

до табличного $\int \frac{dt}{t^2 + k^2}$, де $k = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, оскільки за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$

$$\begin{aligned}
\text{Отже, } \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2} = \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{k} + C = \\
&= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.
\end{aligned}$$

У першому інтегралі опущений знак модуля, бо $x^2 + px + q > 0$.

Розклад правильного раціонального дробу на найпростіші дроби

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\frac{R(x)}{Q(x)}$ розкладено на

множники $Q(x) = a_0(x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu$, де

$\alpha + \dots + \beta + 2(\mu + \dots + \nu) = m$, тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \dots + \dots + \frac{L_v x + F_v}{(x^2 + lx + s)^v},$$

де $A_1, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, \dots, B_\beta, M_1, N_1, \dots, M_\mu, N_\mu, L_1, F_1, \dots, L_v, F_v$ – невідомі коефіцієнти. Цей вираз називається *розкладом правильного раціонального дробу на найпростіші дробу*.

Методи обчислення невідомих коефіцієнтів

1. Метод невизначених коефіцієнтів.

2. Метод окремих значень аргумента.

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Як було показано раніше, інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного дробу.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int G(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходиться безпосередньо. Основні труднощі виникають при інтегруванні правильних раціональних дробів.

Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$, треба:

- розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;

- виразити правильний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$ через суму елементарних раціональних дробів із невизначеними коефіцієнтами та відшукати ці коефіцієнти;

- знайти $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ як суму інтегралів від знайдених елементарних раціональних дробів.

Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

1. Інтеграл $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ після виділення повного квадрата в

підкореновому виразі зводиться до табличного за допомогою підстановки

$$t = x + \frac{b}{2a}. \text{ Дійсно, } ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

При цьому матимемо:

$$\text{а) якщо } a > 0, \text{ то } I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| + C, \text{ де}$$

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \pm k^2;$$

$$\text{б) якщо } a < 0, \text{ то } I_1 = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{k} + C, \text{ де } \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = k^2.$$

$$2. \text{ Інтеграл } I_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \text{ після виділення в чисельнику похідної}$$

підкоренового виразу $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$, необхідно перетворити таким чином:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

оскільки $Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax + b) - \frac{Ab}{2a} + B$. Тут перший інтеграл зводиться до інтеграла від степеневі функції, а другий є вже розглянутий інтеграл типу I_1 .

$$\text{Інтеграли типу } I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$$

Ці інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій підстановкою

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

Тоді матимемо $t^n = \frac{ax + b}{cx + d}$, звідки $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $dx = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$. Тому

$$I = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \cdot \frac{ad - bc}{(a - ct^n)^2} n t^{n-1} dt = \int r(t) dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція нової змінної t .

Інтегрування тригонометричних функцій

Найбільш вживані типи інтегралів від виразів, які містять тригонометричні:

I-й тип. $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Будь-який інтеграл такого виду обчислюється за допомогою «універсальної» тригонометричної підстановки:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

II-й тип. $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx$.

Для обчислення інтеграла зручно використовувати підстановку $\operatorname{tg} x = t$,

$$\text{звідки } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

III-й тип. $\int R(\sin^m x \cdot \cos^n x) dx$.

1) m або n – непарне додатне число.

Для обчислення інтеграла слід:

- а) виділити в непарному степені множник першого степеня;
- б) внести цей множник під знак диференціала;
- в) виразити парну степінь, яка залишилася, через кофункцію;
- г) обчислити отриманий інтеграл.

2) m і n – парні числа, $m > 0, n > 0$

Інтеграли обчислюються за допомогою тригонометричних формул

$$\text{зниження степеня } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

3) $(m+n) = -2p, \quad p > 0, p \in \mathbb{N}$.

Якщо в чисельнику дробу знаходиться степінь $\sin x$, то більш зручною

$$\text{є підстановка } \operatorname{tg} x = t, \text{ звідки } \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Якщо в чисельнику дробу знаходиться степінь $\cos x$, то більш

$$\text{зручною є підстановка } \operatorname{ctg} x = t, \text{ звідки } \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Якщо чисельник дробу стала величина, то застосовується будь-яка з попередніх підстановок ($\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$).

4) $m + n = -(2p + 1)$.

Можливі такі способи розв'язування (в залежності від умови прикладу):

а) застосування універсальної тригонометричної підстановки;

б) зведення до окремого випадку I.1 або I.2, наприклад,

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \frac{-d(\cos x)}{1 - \cos^2 x}. \text{ Далі застосовується підстановка } \cos x = t;$$

в) заміна одиниці в чисельнику виразом $\sin^2 x + \cos^2 x$ і подальше застосування інтегрування частинами.

IV-й тип. $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Інтегруємо за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} x$.

V-й тип. $\int \left[\frac{\sin}{\cos} \right] mx \cdot \left[\frac{\sin}{\cos} \right] nx dx$.

Застосовуються тригонометричні формули

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

11.3 Контрольні запитання і завдання.

1. До інтегралів яких типів приводить інтегрування раціональних дробів?
2. Які дробі називають найпростішими?
3. Як інтегруються найпростіші раціональні дробі?
4. Наведіть схему інтегрування правильних раціональних дробів.
5. За допомогою яких методів обчислюються невідомі коефіцієнти при розкладанні правильного раціонального дробу на найпростіші?
6. Як інтегрується неправильний раціональний дріб?
7. Як обчислюються інтеграл типу $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$?

8. Як обчислюються інтеграл типу $I = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$?

9. Як обчислюються інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

10. Чому підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ називається універсальною?

11. Як обчислюються інтеграли типу $\int R(\sin^m x \cdot \cos^n x) dx$ в залежності від парності чи непарності показників степеня m і n ?

12. Як обчислюються інтеграли типу $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$?

11.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [6] №№ 1.121, 1.123, 1.125, 1.128. 1.142, 1.144, 1.147, 1.149, 1.177.

Домашні задачі: [6] №№ 1.122, 1.124, 1.126, 1.129. 1.143, 1.145, 1.148, 1.150, 1.178.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{(2x + 3)dx}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є правильним дробом. Знайдемо корені знаменника:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x - 2)(x + 1).$$

Знаменник має різні дійсні корені $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$. Тому дріб розкладається на найпростіші дробі I типу:

$$\frac{2x + 3}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Для знаходження чисел A, B, C можна скористатися методом окремих значень аргумента.

Підставимо $x = 0$ в ліву частину рівняння, попередньо помноживши її на

$$x. \text{ Отримаємо } A = -\frac{3}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}.$$

Підставимо $x = 2$ в ліву частину рівняння, попередньо помноживши її на

$$(x - 2). \text{ Отримаємо } B = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}.$$

Підставимо $x = -1$ в ліву частину рівняння, попередньо помноживши її на $(x+1)$. Отримаємо $C = \frac{2 \cdot (-1) + 3}{(-1) \cdot (-3)} = \frac{1}{3}$.

Таким чином,

$$\frac{2x+3}{x(x-2)(x+1)} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{7}{6} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln |x| + \frac{7}{6} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є правильним дробом. Оскільки знаменник має і дійсний, і комплексні корені, то розкладання даного дробу на найпростіші буде таким:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Зведемо до одного знаменника праву частину рівності та прирівняємо чисельники, отримаємо

$$1 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + Cx + (4A-C).$$

Для знаходження чисел A, B, C скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Прирівняємо в утвореній рівності коефіцієнти при однакових степенях x , отримуємо алгебраїчну систему з трьох рівнянь, з яких і визначаємо невідомі коефіцієнти A, B, C .

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 4A-C=1, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A, \\ C=0, \\ A=\frac{1+C}{4}, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4}, \\ C=0, \\ A=\frac{1}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким чином, $I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+4} =$

$$= \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{4} \ln |x-1| + \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-((x+2)^2-9)}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \left| \begin{matrix} t = x+2 \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+2}{3} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} &= \left| \begin{matrix} 3x+1 = \frac{3}{2}((2x+4)-4)+1 = \frac{3}{2}(2x+4)-6+1 = \\ = \frac{3}{2}(2x+4)-5 \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx - 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}} = \\ &= \frac{3}{2} \int (x^2+4x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+4x+1) - 5 \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-3}} = \\ &= 3 \frac{(x^2+4x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 5 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+1}| + C = \\ &= 6\sqrt{x^2+4x+1} - 5 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+1}| + C. \end{aligned}$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання.

Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{6}$ є число 6, тому робимо підстановку: $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, звідки

$$\begin{aligned}
 I &= 6 \int \frac{t^5(1+t)}{1+t^2} dt = 6 \int (t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2}) dt = \\
 &= 6 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \operatorname{arctg} t \right) + C.
 \end{aligned}$$

Повертаючись до змінної x , маємо

$$\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = 6 \left(\frac{1}{5} x^{5/6} + \frac{1}{4} x^{2/3} - \frac{1}{2} x^{1/2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^{1/3}) - \operatorname{arctg} x^{1/6} \right) + C.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{1}{3+\frac{5-5t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int (1-t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{2} \int \sin^2 2x d \sin 2x \right) = \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$.

Розв'язання.

Покладемо $x = 3 \sin t$, $dx = 3 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{3}$. Тоді

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt = \int \frac{9\cos^2 t}{9\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = \\
&= -\operatorname{ctg} t - t + C = C - \arcsin \frac{x}{3} - \operatorname{ctg}(\arcsin \frac{x}{3}) = C - \arcsin \frac{x}{3} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}, \\
&\text{оскільки } \operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

ЗАНЯТТЯ 12. Визначений інтеграл. Обчислення визначеного інтеграла (заміна змінної, частинами)

12.1 Мета заняття. Вивчити формулу Ньютона-Лейбніца та вміти її застосовувати. Вивчити різні методи обчислення визначених інтегралів і вміти їх застосовувати. Вміти обчислювати площу плоскої фігури у декартових координатах.

12.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Теорема (про обчислення визначеного інтеграла). Якщо $F(x)$ є первісною неперервної функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

яка називається *формулою Ньютона-Лейбніца*. Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символом $F(x)|_a^b$.

Теорема (про заміну змінної у визначеному інтегралі). Нехай виконуються умови:

- 1) функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) функція $x = \varphi(t)$ та її похідна $x' = \varphi'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha; \beta]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ і $a < \varphi(t) < b \quad \forall t \in (\alpha; \beta)$.

Тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Теорема (про формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла).
Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні, то має місце формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Обчислення площі, якщо крива задана в декартових координатах.

Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ є неперервною та набуває додатних значень, площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і дугою кривої $y = f(x)$, дорівнює

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx .$$

Якщо крива задана рівнянням $x = \varphi(y)$, де функція $\varphi(y)$ на відрізку $[c; d]$ є неперервною та набуває на цьому відрізку додатних значень, то площа фігури, обмеженої відрізками прямих $y = c$, $y = d$, $x = 0$ і дугою кривої $x = \varphi(y)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d x dy .$$

11.3 Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть формулу Ньютона-Лейбніца.
2. Чому при заміні змінної у визначеному інтегралі можна не повертатися до попередньої змінної?
3. Доведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Де конкретно використана при доведенні формули неперервність вхідних функцій $u(x)$ і $v(x)$?
4. Як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат?

11.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [6] №№ 1.211 – 1.229 (непарні).

Домашні задачі: [6] №№ 1.212 – 1.230 (парні).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \arcsin \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} + \int_0^1 \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \frac{\pi^2}{16} \right). \end{aligned}$$

$$|[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}]| = |-4(\vec{a} \times \vec{b})| = 4 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$.

Розв'язання.

Застосуємо підстановку $x = 2 \sin t$. При розв'язанні рівнянь $\sqrt{3} = 2 \sin t$ і $-\sqrt{3} = 2 \sin t$ маємо, що $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$. Функція $x = \varphi(t) = 2 \sin t$ на відрізку

$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ задовольняє всі умови теореми про заміну змінної у визначеному

інтегралі та $\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Тоді $dx = 2 \cos t dt$,

$\sqrt{4 - x^2} = 2|\cos t| = 2 \cos t$, оскільки $\cos t > 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Отже,

шуканий інтеграл дорівнює

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x = 0$, $x = 2$ та

кривими $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

Розв'язання.

Оскільки функція $y = 2x - x^2$ досягає максимуму в точці $x = 1$, а функція

$y = 2^x \geq 1$ на відрізку $\int_a^b f(x)dx$, тобто $2^x \geq 2x - x^2$ на $[0; 2]$, то

$$S = \int_0^2 [2^x - (2x - x^2)] dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^2 - \left. \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

ЗАНЯТТЯ 13. Аудиторна самостійна робота «Інтегральне числення функцій однієї змінної».

ЗАНЯТТЯ 14. Числові ряди

14.1 Мета заняття. Вивчити ознаки збіжності знакопостійних рядів, навчитися досліджувати знакопостійні ряди на збіжність.

14.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Нескінченним числовим рядом називається послідовність чисел, з'єднаних знаками додавання. Ці числа, які називаються членами ряду, позначимо a_n , а ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ запишемо у вигляді $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Сума $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i = S_n$ називається частинною сумою ряду.

Сумою S ряду, що збігається, називається границя послідовності його частинних сум, тобто $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i$.

Деякі властивості рядів, що збігаються:

1) Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або не існує, то ряд розбігається.

2) Якщо ряд збігається, то збігаються і ряди, отримані з нього приєднанням або відкиданням скінченної кількості членів.

Залишковим членом r_n збіжного ряду називається різниця між сумою S ряду й частинною сумою S_n його перших n доданків: $r_n = S - S_n$.

Очевидно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Знакопостійним рядом називається ряд, всі члени якого, крім, може бути, скінченної їхньої множини, числа того самого знака (або додатні або від'ємні).

Достатні ознаки збіжності знакопостійних рядів:

1) Ознака порівняння.

Нехай $0 < a_n \leq b_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Якщо ряд:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

збігається, то збігається й ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots,$$

причому $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ розбігається, то розбігається й ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

2) Ознака Даламбера

Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то

ряд збігається при $l < 1$; ряд розбігається при $l > 1$.

3) Ознака Коші збіжності ряду

Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тоді знакододатний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається, якщо $l < 1$ і

розбігається, якщо $l > 1$.

4) Інтегральна ознака збіжності рядів

Якщо $f(x)$ неперервна невід'ємна й не зростаюча на множині $[1, \infty)$ функція, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними так і від'ємними, називають знакозмінними. Серед рядів з доданками змінного знака виділяють ряди, в яких знаки членів строго чергуються, тобто ряди виду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ (або $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$), де $a_n > 0$. Такі ряди називають знакопочережними. Для таких рядів справедлива наступна достатня ознака збіжності.

Теорема Лейбніца. Якщо члени ряду, знаки якого строго чергуються $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ не зростають по абсолютній величині: $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_k| \geq \dots$ і виконується необхідна ознака збіжності рядів: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд збігається.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*.

Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів:

1) Сума умовно збіжного ряду залежить від порядку членів.

2) Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається умовно, то яким би не було число L , то

члени ряду можливо переставити так, щоб здобутий ряд збігався до L .

3) Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, здобутий з нього будь-яким переставленням членів, збігається до того ж самого числа, що й поданий ряд, крім того здобутий ряд збігається абсолютно.

4)

14.3 Контрольні запитання і завдання.

1) Дайте означення числового ряду, частинної суми і суми ряду.

2) Сформулюйте ознаку порівняння знакопостійних рядів.

3) Сформулюйте ознаку Даламбера збіжності ряду.

4) Сформулюйте ознаку Коші збіжності ряду.

5) Сформулюйте інтегральну ознаку збіжності ряду.

6) Дайте означення знакозмінного та знакопозначеного рядів.

7) Сформулюйте теорему Лейбніца.

8) Дайте означення абсолютної і умовної збіжності знакозмінних

рядів.

9)

14.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 2.2, 2.5, 2.9, 2.18, 2.31, 2.34, 2.70, 2.71

Домашні задачі: [2] №№ 2.4, 2.7, 2.10, 2.19, 2.32, 2.35, 2.72.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p - \text{const}$)

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) Нехай } f(x) = \frac{1}{x^p}. \text{ Тоді } \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \\ &= \begin{cases} \ln x \Big|_1^{\infty} & (p=1) \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} & (p \neq 1) \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & p \leq 1 \\ \text{const}, & p > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p > 1$ і розбігається до $+\infty$, якщо $p \leq 1$.

Отже, заданий ряд збігається при $p > 1$ і розбігається в протилежному випадку.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Розв'язання Маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$. Даний ряд збігається, оскільки виконані умови теореми Лейбніца:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ Причому збігається умовно, тому що}$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, утворений із модулів його членів, розбігається.

ЗАНЯТТЯ 15. Функціональні ряди. Степеневі ряди.

15.1 Мета заняття. Вивчити функціональних рядів, вміти знаходити область збіжності. Вивчити степеневі ряди, навчитися знаходити радіус збіжності, навчитися розкладати функцію у степеневий ряд.

15.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функціональним рядом називається сума $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, де $u_1(x); u_2(x); \dots;$

$u_n(x); \dots$ деякі функції визначені на деякій множині D .

Для кожного числового значення змінної x функціональний ряд перетворюється в деякий числовий ряд. Деякі із цих рядів будуть збіжними, а

інші - розбіжними. Точка x називається точкою збіжності (розбіжності) функціонального ряду, якщо збігається (розбігається) відповідний числовий ряд. Множина точок збіжності (розбіжності) називається областю збіжності D_1 (розбіжності - D_2) функціональних рядів.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* на множині D_1 до граничної функції $S(x)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall x \in D_1 \forall n > N |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається мажорованим на множині Q , якщо існує такий збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами, що, починаючи з деякого n ,

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in Q. \text{ Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ називається мажоруючим рядом.}$$

З означення випливає, що будь-який ряд, мажорований на множині Q , абсолютно збігається на цій множині.

Достатня ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності рядів. Будь-який функціональний ряд, мажорований на множині Q , рівномірно збігається на цій множині.

Властивості рівномірно збіжних рядів:

1) Сума рівномірно збіжного числового ряду, складеного з неперервних функцій, неперервна.

2) Сума рівномірно збіжного на $[a; b]$ ряду неперервних функцій інтегровна і справедлива формула почленного інтегрування (тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів).

$$\int_a^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt, \text{ де } x \in [a; b]$$

3) Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, складений з неперервно диференційовних функцій, збігається в кожній точці множини $[a; b]$, а ряд, складений з похідних, рівномірно збігається, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ допускає почленне диференціювання, тобто,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Серед великого різноманіття функціональних рядів найбільш простим у теоретичному відношенні й, разом з тим, найбільш важливим для більшості застосувань є клас степеневих рядів.

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

де $a, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні числа.

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

Поклавши $x-a=t$, одержимо степеневий ряд за степенями t . Тому, не порушуючи спільності, надалі будемо розглядати ряди вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Загальна форма області збіжності степеневого ряду є простим наслідком наступної найважливішої властивості рядів цього класу.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ збігається в точці $\alpha \neq 0$,

то він збігається абсолютно на множині $(-|\alpha|; +|\alpha|)$. Якщо в точці $x = \beta$ степеневий ряд розбігається або збігається умовно, то даний ряд розбігається всюди, де $|x| > |\beta|$.

Наслідком теореми Абеля є наявність існування для степеневого ряду інтервалу збіжності $(-R, R)$. Число R називається *радіусом збіжності степеневого ряду*. Для визначення радіусу збіжності користуються однією з формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}$$

Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ рівномірно збігається на будь-якій замкненій підмножині своєї області збіжності.

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

При $a = 0$ ряд Тейлора приймає вигляд

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Цей ряд називають *рядом Маклорена*.

Формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Легко перевірити, що радіус збіжності отриманих рядів дорівнює нескінченності, тобто областю їхньої збіжності є вся числова вісь.

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

Якщо $m = -1$, маємо

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1;1)$$

15.3 Контрольні запитання і завдання.

- 1) Дайте означення функціонального ряду та області його збіжності.
- 2) Дайте означення рівномірно збіжного функціонального ряду.
- 3) За яких умов функціональний ряд можна почленно диференціювати, інтегрувати?
- 4) Дайте означення степеневому ряду та області його збіжності
- 5) Сформулюйте теорему Абеля
- 6) Як знаходиться радіус збіжності степеневому ряду
- 7) Наведіть формули розкладання основних елементарних функцій в ряд Маклорена.

15.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 2.82, 2.83, 2.89, 2.100, 2.102, 2.105.

Домашні задачі: [2] №№ 2.84, 2.85, 2.88, 2.101, 2.104.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти область збіжності наступних функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{|x|n}}{n}$

Розв'язання.

а) Оскільки $\left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, то за ознакою порівняння

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right|$ також збігається $\forall x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, $x \in (-\infty; +\infty)$ — область

абсолютної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$ — сума геометричної прогресії зі знаменником $q = \cos x$.

Оскільки $|\cos x| \leq 1$, то ряд збігається, якщо $|\cos x| < 1$ і розбігається, якщо $|\cos x| = 1$. Таким чином, $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) — точки розбіжності ряду, а $\forall x \neq k\pi$ ряд збігається абсолютно.

в) Оскільки $\frac{e^{n|x|}}{n} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонічний ряд) розбігається, то за

ознакою порівняння $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n|x|}}{n}$ є розбіжним рядом $\forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти область збіжності рядів а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (x+1)^n}{n!}$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (x+1)^n}{2^n}$

Розв'язання

а) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n (n+1)!}{n! 5^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty.$

Отже, ряд збігається на множині $(-\infty; \infty)$.

б) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n 2^{n+1}}{2^n 5^{n+1}} \right| = \frac{2}{5}.$

Ряд збігається на множині $(-1-R, -1+R)$, поза цією множиною розбігається. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності точки $-1 \pm R$:

При $x = -1 - R = -\frac{7}{5}$, маємо $\sum_0^{\infty} \frac{5^n (-\frac{7}{5} + 1)^n}{2^n} = \sum_0^{\infty} (-1)^n$ який є розбіжним.

При $x = -1 + R = -\frac{3}{5}$, дістаємо ряд $\sum_0^{\infty} \frac{5^n (-\frac{3}{5} + 1)^n}{2^n} = \sum_0^{\infty} 1^n$ який також

розбіжний. Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал: $\left(-\frac{7}{5}; -\frac{3}{5}\right)$

Приклад 3. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \arctg x$.

Розв'язання

Якщо у формулі $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $x \in (-1; 1)$ покласти $-x^2$ замість x і

ряд проінтегрувати, то отримаємо:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ тобто } \arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1; 1).$$

ЗАНЯТТЯ 16. Ряди Фур'є для функції заданої на періоді 2π і на довільному періоді

16.1 Мета заняття. Навчитися розкладати в ряди Фур'є 2π та $2l$ періодичні функції.

16.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Тригонометричним рядом називається ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a_0, a_n, b_n - задані числа, $n = 1, 2, \dots$

Рядом Фур'є функції періодичної функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[-\pi, \pi]$, називається ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

Числа a_0, a_n, b_n називаються коефіцієнтам Фур'є.

Теорема Діріхле. Якщо $f(x)$ кусково-гладка на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є збігається в кожній точці цього відрізку, причому для будь-якої точки t_0 сума ряду

$$S(t_0) = \frac{f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)}{2}.$$

Якщо функція парна на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ непарна відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ де}$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом $2l$, визначеної на відрізку $[-l, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \text{ де}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна на відрізку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ непарна на відрізку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

16.3 Контрольні запитання і завдання.

- 1) Дайте означення тригонометричного ряду.
- 2) Запишіть ряд Фур'є для функції періодичної з періодом 2π .
- 3) Запишіть ряд Фур'є для функції парної на відрізку $[-\pi, \pi]$, непарної на відрізку $[-\pi, \pi]$.
- 4) Запишіть ряд Фур'є для функції періодичної з періодом $2l$.
- 5) Запишіть ряд Фур'є для функції парної на відрізку $[-l, l]$, непарної на відрізку $[-l, l]$.

16.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 2.211, 2.216, 2.235, 2.249.

Домашні задачі: [2] №№ 2.212, 2.217, 2.234, 2.248.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{x}{2}$, $0 < x < 2\pi$. Розв'язання

Функція не є ні парною, ні непарною. Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cdot \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x \cdot \sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cdot \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x \cdot \cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{1}{n}$$

Підставляючи отримані значення a_0, a_n, b_n у загальну формулу, отримуємо шуканий розклад заданої функції в ряд Фур'є:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |\sin x|$, $[-\pi; \pi]$. Користуючись отриманим розкладом, знайти суму S ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Розв'язання

Функція задовольняє умови Діріхле. Дана функція є парною. В інтервалі $[0; \pi]$ функція визначається формулою $y = \sin x$.

Ряд Фур'є для **парної періодичної функції** $f(x)$ з періодом 2π має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx,$$

$$\text{де } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx.$$

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} (-1 - 1) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(1+n)x + \sin(1-n)x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(1+n)x}{1+n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1 - \cos(1-n)\pi}{1-n} \right). \quad (*)$$

Якщо n парне, то $\cos(1 \pm n)\pi = -1$ і

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = \frac{4}{\pi(1-n^2)}, \quad n=2k.$$

Якщо n непарне, $n \neq 1$, то $\cos(1 \pm n)\pi = 1$ і

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1-1}{1+n} + \frac{1-1}{1-n} \right) = 0, \quad n=2k-1, \quad n \neq 1.$$

При $n=1$ отриманий тут загальний вираз (*) для a_n не прийнятний, внаслідок чого коефіцієнт a_1 обчислюємо окремо, поклавши $n=1$ в

$$\text{загальну формулу: } a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{\pi} \Big|_0^\pi = 0.$$

Шуканий розклад має вигляд:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(1-(2n)^2)} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Знайдемо суму заданого в умові числового ряду.

При $x=0$ отриманий розклад перетворюється в рівність

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \right),$$

звідки і визначається сума числового ряду, вказаного в умові:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot S, \quad S = \frac{1}{2}.$$

ЗАНЯТТЯ 17. Неповні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є.

Інтеграл Фур'є

17.1 Мета заняття. Навчитися розкладати в неповні ряди Фур'є неперіодичні функції. Вивчити інтеграл та перетворення Фур'є.

17.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

1. Комплексна форма ряду Фур'є має вигляд:

- для 2π періодичної функції:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- для функції з періодом $2l$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Вважатимемо, що функція $f(x)$ задовольняє такі умови:

- 1) визначена на всій числовій осі,
- 2) кусково-гладка на будь-якому скінченному проміжку,
- 3) абсолютно інтегровна на всій числовій осі.

Тоді в точках неперервності функції має місце формула

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \right) d\omega,$$

яка називається інтегральною формулою Фур'є. Ця формула також може бути

записана у вигляді $f(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega$, де

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Якщо функція $f(x)$ парна, тоді

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = 0$$

Якщо функція непарна

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad A(\omega) = 0$$

Інтеграл Фур'є може бути представлено в комплексній формі

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega$$

З наведеними формулами пов'язані інтегральні перетворення.

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt - \text{перетворення Фур'є}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega - \text{обернене перетворення Фур'є.}$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - \text{косинус перетворення Фур'є.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega - \text{обернене косинус перетворення Фур'є.}$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt - \text{синус перетворення Фур'є.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega - \text{обернене синус перетворення Фур'є.}$$

17.3 Контрольні запитання і завдання.

- 1) За яких умов має місце інтегральна формула Фур'є? Наведіть цю формулу.
- 2) Який вигляд має інтеграл Фур'є для парних та непарних функцій?
- 3) Який вигляд має інтеграл Фур'є в комплексній формі?
- 4) Наведіть косинус-перетворення Фур'є, синус-перетворення Фур'є.

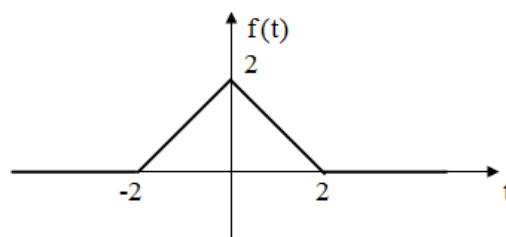
17.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 2.211, 2.213, 2.235, 2.248.

Домашні задачі: [2] №№ 2.212, 2.215, 2.237, 2.249.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(t) = \begin{cases} t+2, -2 \leq t < 0 \\ -t+2, 0 \leq t \leq 2, \\ 0, |t| < 2 \end{cases}$



Розв'язання

Задана функція є парною, тому скористаємось формулою

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = 0$$

Знайдемо $A(\omega)$.

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^2 (-t+2) \cos \omega t dt = \left| \begin{array}{ll} u = -t+2 & du = -dt \\ dv = \cos \omega t dt & v = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{array} \right| =$$

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\omega} (-t+2) \sin \omega t \Big|_0^2 + \frac{1}{\omega} \int_0^2 \sin \omega t dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \Big|_0^2 \right) = -\frac{2}{\pi \omega^2} (\cos 2\omega - 1)$$

$$\text{Тоді } f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega \cos \omega x d\omega.$$

Приклад 2. Зобразити інтегралом Фур'є в комплексній формі функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\text{Скористаємось формулою } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega$$

Обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt = \frac{1}{1+i\omega}$$

$$\text{Відповідь: } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+i\omega} d\omega.$$

ЗАНЯТТЯ 18. Аудиторна самотійна робота «Ряди»

ЗАНЯТТЯ 19. Диференціальні рівняння першого порядку

19.1 Мета заняття — навчити студентів розв'язувати диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними та лінійні рівняння.

19.2. Методичні вказівки з організації самотійної роботи студентів

Диференціальне рівняння з відокремленими змінними — це рівняння, які можна записати у вигляді $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$. Інтегруючи ліву та праву частини цього рівняння, отримаємо його загальний інтеграл

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$, де $f_1(x), f_2(x)$ — функції тільки від x , $g_1(y), g_2(y)$ — функції тільки від y . Поділивши обидві частини початкового диференціального рівняння на $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0,$$

загальний інтеграл якого

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Диференціальне рівняння вигляду $y' + P(x)y = Q(x)$ називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним (це рівняння $y' + P(x)y = 0$), у протилежному випадку — лінійним неоднорідним.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку можна інтегрувати методом Бернуллі, який полягає у тому, що розв'язок рівняння шукається у вигляді добутку двох функцій $U = U(x)$ і $V = V(x)$, тобто $y = UV$. Для визначення цих функцій маємо систему

$$\begin{cases} V' + P(x)V = 0, \\ U'V = Q(x). \end{cases}$$

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку можна інтегрувати методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа). Цей метод полягає в тому, що спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного рівняння, тобто рівняння $y' + P(x)y = 0$. Цей загальний розв'язок має вигляд $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$. Вважаючи у цьому співвідношенні величину C функцією від x , шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$. Для цього підставляємо y і y' , які визначаються із співвідношення $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$, в задане рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, а

потім із отриманого диференціального рівняння визначаємо функцію $C(x)$. Таким чином, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння отримаємо у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Рівняння (нелінійне) вигляду $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ (де $m \neq 0, m \neq 1$) називається рівнянням Бернуллі. Його можна перетворити у лінійне рівняння, виконавши заміну невідомої функції за допомогою підстановки $z = y^{1-m}$, внаслідок чого початкове рівняння буде мати вигляд

$$\frac{z'}{1-m} + P(x) \cdot z = Q(x).$$

Рівняння Бернуллі можна також розв'язати, безпосередньо використавши підстановку $y = U \cdot V$, а також використовуючи метод варіації довільної сталої.

19.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення диференціального рівняння.
2. Дайте означення порядку диференціального рівняння.
3. Що таке розв'язок диференціального рівняння?
4. Дайте означення загального розв'язку та загального інтегралу диференціального рівняння 1-го порядку.
5. Що таке початкові умови для диференціального рівняння першого порядку?
6. Що таке задача Коші?
7. Сформулюйте теорему Коші про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
8. Наведіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремленими змінними.
9. Наведіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
10. Наведіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку.
11. В чому полягає метод Бернуллі розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?

19.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 1.9, 1.14, 1.26, 1.73, 1.79.

Домашні задачі: [2] №№ 1.10, 1.23, 1.70, 1.80

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві частини рівняння на $y\sqrt{1 + x^2}$, отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{(1 + y^2)dy}{y} = 0. \text{ Інтегруючи, маємо:}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} + \int \left(\frac{1}{y} + y \right) dy = C \Rightarrow \frac{1}{2} \int (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 + x^2) + \int \frac{dy}{y} + \int y dy = C \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Отримали загальний інтеграл початкового рівняння, де C – довільна стала.

$$\text{Відповідь: } \sqrt{1 + x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Покладемо $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' у початкове рівняння, отримаємо: $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2 \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2$.

Поклавши $v' + \frac{v}{x} = 0$, приходимо до наступної системи рівнянь для знаходження u та v :

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0; \\ u'v = x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо v , а з другого функцію u . Розв'язуючи перше рівняння, отримаємо $v = \frac{1}{x}$ (довільну постійну під час знаходження не записуємо). З рівняння (2):

$$u' = \frac{x^2}{v} = x^3 \Rightarrow u = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C, \text{ звідси маємо для } y:$$

$$y = uv = \left(\frac{x^4}{4} + C \right) \frac{1}{x} = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.$$

ЗАНЯТТЯ 20-21. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку

20-21.1 Мета заняття — навчити студентів розв'язувати ЛОДР і ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

20-21.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Диференціальне рівняння виду $ay'' + by' + cy = 0$, де a, b, c — сталі ($a \neq 0$), називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння). Загальний розв'язок y лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку $ay'' + by' + cy = 0$ має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

де y_1, y_2 — лінійно незалежні розв'язки цього рівняння. Початкове диференціальне рівняння $ay'' + by' + cy = 0$ можна привести до виду $y'' + py' + qy = 0$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно скласти

характеристичне рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Залежно від характеру коренів λ_1, λ_2 , можливі три випадки:

1) корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 дійсні і різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ — загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$;

2) корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 дійсні та співпадаючі, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (λ — двократний корінь характеристичного рівняння). Тоді

$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$ — загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$.

3) корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 комплексно-спряжені $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тоді загальний розв'язок початкового рівняння $y'' + py' + qy = 0$ має вигляд $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Диференціальне рівняння вигляду $ay'' + by' + cy = f(x)$, де $f(x)$ — деяка функція, яка не дорівнює нулю тотожно, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння). Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку $ay'' + by' + cy = f(x)$ дорівнює сумі загального розв'язку Y відповідного однорідного рівняння і якогось частинного розв'язку y^* рівняння $ay'' + by' + cy = f(x)$. Таким чином, $y = Y + y^*$.

Диференціальне рівняння виду $y'' + py' + qy = f(x)$, де p, q — сталі, $f(x)$ — деяка функція, яка не дорівнює нулю тотожно, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Принцип накладання розв'язків (принцип суперпозиції). Якщо права

частина рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ є сумою кількох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ і якщо $Y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — відповідні частинні розв'язки диференціальних рівнянь $y'' + py' + qy = f_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$, то сума $y^* = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ є частинним розв'язком початкового диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$.

У найпростіших випадках, коли права частина заданого неоднорідного диференціального рівняння має спеціальний вигляд, вказаний частинний розв'язок y^* можна знайти з використанням методу невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо два спеціальних вигляди правої частини.

1) $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ — многочлен n -го степеня. Тоді можливі наступні три випадки:

а) Число α не є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

У цьому випадку частинний розв'язок y^* шукається у вигляді

$$y^* = R_n(x)e^{\alpha x} = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n)e^{\alpha x}.$$

б) Число α є простим (однократним) коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок y^* шукається у вигляді $y^* = xR_n(x)e^{\alpha x}$.

в) Число α є двократним коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок y^* шукається у вигляді $y^* = x^2R_n(x)e^{\alpha x}$.

2) $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos \beta x + Q_n(x)\sin \beta x)$, де $\beta \neq 0$,

$P_m(x), Q_n(x)$ — многочлени m -го та n -го степеней відповідно. Тоді можливі наступні два випадки:

а) Число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок y^* шукається у вигляді $y^* = e^{\alpha x}(U(x)\cos \beta x + V(x)\sin \beta x)$ де $U(x), V(x)$ — многочлени, степені яких дорівнює найбільшому з чисел m і n .

б) Число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок y^* шукається у вигляді $y^* = xe^{\alpha x}(U(x)\cos \beta x + V(x)\sin \beta x)$.

Розв'язання рівняння методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)

Нехай відомий загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$, тобто $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Тоді загальний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ може бути знайденим за формулою $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, де функції $C_1(x), C_2(x)$ визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

20-21.3 Контрольні запитання і завдання.

Дайте означення лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку.

- 1) Дайте означення лінійно залежних і лінійно незалежних функцій на відріжку.
- 2) Яка система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння називається фундаментальною?
- 3) Як записувати загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?
- 4) Яке рівняння називається характеристичним? Як його знаходять?
- 5) Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?
- 6) Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні?
- 7) Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені?
- 8) Дайте означення лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку.
- 9) У чому полягає теорема про структуру загального розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку?
- 10) У чому полягає метод варіації довільних сталих?
- 11) Як записується частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має вигляд $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$?

12) Як записується частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має вигляд $f(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x$?

13) Як записується частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x)$?

20-21.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2]: №№ 1.252, 1.261, 1.263, 1.270, 1.274, 1.279, 1.288, 1.304, 1.311.

Домашні задачі: [2]: №№ 1.254, 1.262, 1.264, 1.271, 1.276, 1.278, 1.289, 1.306, 1.312.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 6$. Характеристичне рівняння має дійсні і різні корені. Звідси загальний розв'язок початкового диференціального рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$ має вигляд: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^{IV} - 81y = 0.$$

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння $k^4 - 81 = 0 \Rightarrow$

$$k = \sqrt[4]{81} = 3 \left(\cos \frac{2\pi m}{4} + i \sin \frac{2\pi m}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{\pi m}{2} + i \sin \frac{\pi m}{2} \right).$$

Припускаючи $m = 0; 1; 2; 3$, отримаємо $k_{1,2} = \pm 3, k_{3,4} = \pm 3i$. Таким чином, характеристичне рівняння має чотири корені. Звідси загальний розв'язок початкового диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x, \text{ де } C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

Відповідь: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.

Приклад 3.

Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}} \text{ методом варіації довільних сталих.}$$

Розв'язання. Розв'язуючи відповідне однорідне

рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$, отримаємо $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Шукаємо

розв'язок початкового рівняння у вигляді $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Тоді для знаходження $C_1(x)$ і $C_2(x)$ отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0; \\ C_1' e^x + C_2' \cdot 2e^{2x} = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}. \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо $C_1' = -\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$, $C_2' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$. Інтегруючи,

знаходимо: $C_1 = C_1(x) =$

$$= -\int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^{2x}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + e^{2x})}{1 + e^{2x}} = -\frac{1}{2} \ln |1 + e^{2x}| + \tilde{C}_1 = -\ln \sqrt{1 + e^{2x}} + \tilde{C}_1 ;$$

$$C_2 = C_2(x) = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \operatorname{arctg}(e^x) + \tilde{C}_2 ,$$

де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — довільні сталі. Таким чином, загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$y = \left(-\ln \sqrt{1 + e^{2x}} + \tilde{C}_1 \right) e^x + \left(\operatorname{arctg}(e^x) + \tilde{C}_2 \right) e^{2x}.$$

Відповідь: $y = \left(-\ln \sqrt{1 + e^{2x}} + \tilde{C}_1 \right) e^x + \left(\operatorname{arctg}(e^x) + \tilde{C}_2 \right) e^{2x}$.

Приклад 4.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y = \sin x, \text{ що задовольняє початкові умови } y(0) = y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Початкове рівняння — це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння $y'' + 4y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корні $k = \pm 2i$. Загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді

$y = y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Частинний розв'язок початкового неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = y^* = A \sin x + B \cos x$. Знаходимо $(y^*)'$, $(y^*)''$ та, підставляючи y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ у початкове диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} (y^*)' &= A \cos x - B \sin x, \quad (y^*)'' = -A \sin x - B \cos x, \\ (-A \sin x - B \cos x) + 4(A \sin x + B \cos x) &= \sin x \Rightarrow \\ 3A \sin x + 3B \cos x &= \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = 0. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок початкового рівняння має вигляд

$$y = y + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x.$$

Для знаходження C_1 і C_2 використовуємо початкові умови:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{1}{3} \sin 0 = 1 \\ -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 + \frac{1}{3} \cos 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тепер можна записати шуканий частинний розв'язок:

$$y = \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x.$$

Відповідь: $y = \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$.

ЗАНЯТТЯ 22. Властивості перетворення Лапласа. Відновлення оригіналу функції за відомим зображенням.

22.1 Мета заняття. Уміти знаходити зображення функції на основі властивостей перетворення Лапласа та таблиці зображень.

22.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функцією оригіналом називається довільна комплексна функція $f(t) = u(t) + iv(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє такі умови:

- 1) $f(t)$ неперервна або кусково неперервна на всій осі t , тобто $f(t)$ інтегровна на будь-якому скінченному проміжку
- 2) $f(t) = 0$ при $t < 0$

3) $|f(t)|$ зростає при $t \rightarrow +\infty$ не швидше показникової функції, тобто існують такі сталі $M > 0$ і $s_0 > 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, число s_0 називається показником росту функції.

Найпростішою функцією оригіналом є одинична функція Хевісайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

У подальшому під заданою функцією $f(t)$ будемо розуміти $f(t)\eta(t)$, тобто вважати, що $f(t)=0$ при $t < 0$. Функцію Хевісайда будемо також позначати 1.

Зображенням функції оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається інтегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \text{ Цей інтеграл збігається у півплощині } \operatorname{Re} p > s_0, \text{ } s_0 \text{ є}$$

показником росту функції $f(t)$, тобто функція $F(p)$ визначена при $\operatorname{Re} p > s_0$. В цій же півплощині вона є аналітичною. Перетворення, що ставить у відповідність функції $f(t)$ функцію $F(p)$, називається перетворенням Лапласа. Позначається $f(t) \rightarrow F(p)$, $F(p) \leftarrow f(t)$.

Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, а $g(t) \rightarrow G(p)$, то $\alpha f(t) + \beta g(t) \rightarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

2. Теорема подібності

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, то $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

3. Теорема запізнювання

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$, то $f(t - \tau)\eta(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} F(p)$

4. Теорема зміщення

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $p_0 \in \mathbb{C}$, тоді $e^{p_0 t} f(t) \rightarrow F(p - p_0)$

5. Диференціювання оригіналу

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \rightarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6. Диференціювання зображення

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $F'(p) \leftarrow -t \cdot f(t)$,

$$F''(p) \leftarrow t^2 \cdot f(t),$$

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-1)^n t^n \cdot f(t)$$

7. Інтегрування оригіналу

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}$

8. Інтегрування зображення

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ і інтеграл $\int_p^{+\infty} F(p) dp$ збігається, то $\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp$

9. Теорема множення (теорема про згортку)

Якщо $F_1(p) \leftarrow f_1(t)$, $F_2(p) \leftarrow f_2(t)$, то $F_1(p)F_2(p) \leftarrow f_1(t) * f_2(t)$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \text{ -згортка функцій.}$$

Таблиця зображень основних функцій

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$

У багатьох випадках задане зображення можливо перетворити до такого вигляду коли оригінал неважко знайти безпосередньо за допомогою властивостей перетворення Лапласа та таблицею зображень.

1) Якщо $F(p)$ є правильним раціональним дробом, тоді зображення записують у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{A}{p-a}, \frac{A}{(p-a)^k}, \frac{Ap+B}{p^2+ap+b}, \frac{Ap+B}{(p^2+ap+b)^k}$$

Для кожного з дробів знаходимо оригінал, користуючись властивостями перетворення Лапласа

2) Якщо зображення має вигляд $F_1(p) \cdot F_2(p)$, тоді спочатку знаходять оригінали функцій $F_1(p)$ і $F_2(p)$, а потім користуються теоремою про згортку.

3) Якщо зображення має вигляд $F(p)e^{-p\tau}$, тоді спочатку знаходять оригінал функції $F(p)$, а потім користуються теоремою запізнювання.

22.3 Контрольні запитання і завдання.

- 1) Дайте означення функції оригіналу.
- 2) Що називається зображенням функції-оригіналу.
- 3) Дайте означення перетворення Лапласа.
- 4) Наведіть властивості перетворення Лапласа.
- 5) Наведіть таблицю зображень основних функцій.
- 6) Як знаходити оригінал за його зображенням?
- 7) Наведіть метод знаходження оригіналу, якщо зображення є
- 8) правильний раціональний дріб.
- 9) Яка теорема використовується для знаходження оригіналу для
- 10) зображення вигляду $F_1(p)F_2(p)$?
- 11) Яка теорема використовується для знаходження оригіналу для зображення вигляду $F(p)e^{-p\tau}$?

22.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 4.6 (а,б), 4.7 (а,б), 4.8 (а), 4.9 (а). 4.12, 4.16, 4.26, 4.29, 4.31.

Домашні задачі: [2] №№ 4.6 (в,г), 4.7 (г,д), 4.8 (б), 4.9 (в). 4.13, 4.17, 4.27, 4.30.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Використовуючи властивості лінійності знайти зображення функцій: $\sinh \alpha t$, $\ch \alpha t$, $\sin \alpha t$, $\cos \alpha t$.

Розв'язання. У кожному з випадків представляємо функцію у вигляді лінійної комбінації експоненціальних функцій, зображення яких відомі

$$\begin{aligned}\sh \alpha t &= \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{2} \frac{1}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \\ \ch \alpha t &= \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + \alpha} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \\ \cos \alpha t &= \frac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p - i\alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + i\alpha} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \\ \sin \alpha t &= \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} \frac{1}{p - i\alpha} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + i\alpha} = \frac{1}{2i} \frac{2i\alpha}{p^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}\end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{\sin 2t - \sin t}{t}$

Розв'язання

Зображення функцій $\sin 2t$ та $\sin t$ знайдемо виходячи з таблиці

$$\sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4}, \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$$

Скористаємось теоремою про інтегрування зображення

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp. \quad \text{Тоді}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2t - \sin t}{t} &\rightarrow \int_p^{+\infty} \left(\frac{2}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) dp = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{p}{2} - \arctg p \right) \Big|_p^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(\arctg \frac{N}{2} - \arctg N \right) - \left(\arctg \frac{p}{2} - \arctg p \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{2} + \arctg p = \arctg p - \arctg \frac{p}{2}\end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти оригінали функцій:

$$\begin{aligned}(\text{а}) \quad F(p) &= \frac{1}{p^2(p+3)}, \quad (\text{б}) \quad F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}, \quad (\text{в}) \quad F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2 + 1}, \\ (\text{г}) \quad F(p) &= \frac{e^{-p}}{p(p-1)}\end{aligned}$$

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$$

Розкладаємо дріб на суму найпростіших та, використовуючи таблицю і властивість лінійності, знаходимо

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3},$$

$$\text{де } A = -\frac{1}{9}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Тоді } \frac{1}{p^2(p+3)} = -\frac{1}{9} \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{p+3} \leftarrow -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

б) Спочатку виділяємо у знаменнику повний квадрат, потім користуємося таблицею зображень

$$\frac{p}{p^2+2p+5} = \frac{p}{(p+1)^2+2^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\cos 2t \rightarrow \frac{p}{p^2+2^2}, \sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2+2^2}$$

$$e^{-t} \cos 2t \rightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}, e^{-t} \sin 2t \rightarrow \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\text{Тоді } \frac{p}{p^2+2p+5} \leftarrow e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2+1}$$

Спочатку за таблицею знайдемо оригінал для дробу

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2+1}$$

$$\text{За теоремою запізнювання: } \sin(t-3)\eta(t-3) \rightarrow \frac{e^{-3p}}{p^2+1}$$

г) Спочатку розкладемо дріб на найпростіші, а потім скористаємося теоремою запізнювання

$$\frac{1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} \leftarrow -1 + e^t$$

$$\frac{e^{-p}}{p(p-1)} \leftarrow -\eta(t-1) + e^{t-1}\eta(t-1)$$

ЗАНЯТТЯ 23. Застосування перетворення Лапласа для розв'язання диференціальних рівнянь

24.1 Мета заняття.. Уміти знаходити оригінал функції за відомим зображенням. Уміти застосовувати операційне числення до розв'язку диференціальних рівнянь та систем.

24.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Нехай потрібно знайти розв'язання $x(t)$ лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t),$$

(де $f(t)$ – оригінал), яке задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Застосуємо до обох частин (4.1) перетворення Лапласа та використаємо теорему про диференціювання оригіналу та властивість лінійності перетворення Лапласа. Таким чином, дістанемо операторне рівняння

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

де $X(p)$ – зображення функції $f(t)$, а $Q(p)$ – деякий многочлен, тотожний нулю, коефіцієнти якого залежать від початкових даних $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, якщо $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$.

З отриманого операторного рівняння знаходимо операторне розв'язання

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)},$$

де $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристичний многочлен даного диференціального рівняння. Знаходячи за $X(p)$ оригінал $x(t)$, ми таким чином знайдемо $x(t)$ – розв'язання задачі Коші. Коротко алгоритм розв'язання можна сформулювати так:

- 1) Визначити лінійне диференціальне рівняння на просторі оригіналів.
- 2) Використовуючи перетворення Лапласа та його властивості, звести розв'язання задачі Коші до розв'язання операторного рівняння.
- 3) Розв'язати операторне рівняння відносно зображення невідомої функції.
- 4) Знайти невідому функцію (розв'язання задачі Коші) за її зображенням.
- 5)

24.3 Контрольні запитання і завдання.

- 1) Що таке операторне рівняння?
- 4) У чому полягає метод розв'язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з використанням операційного числення?
- 5)

24.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [2] №№ 4.31, 4.38, 4.45, 4.54.

Домашні задачі: [2] №№ 4.33, 4.37, 4.47, 4.52.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти розв'язання диференціального рівняння при заданих початкових умовах $x'' - 2x' + 2x = \sin t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$, тоді $x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0)$, $x''(t) \rightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0)$. Використовуючи початкові умови $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, маємо $x'(t) \rightarrow pX(p)$, $x''(t) \rightarrow p^2X(p) - 1$. Оскільки $\sin t \rightarrow 1/(p^2 + 1)$, операторне рівняння має вигляд $(p^2X(p) - 1) - 2pX(p) + 2X(p) = 1/(p^2 + 1)$ або

$$(p^2 - 2p + 2)X(p) - 1 = 1/(p^2 + 1).$$

$$\text{Звідки } X(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \left(\frac{1}{p^2 + 1} + 1 \right) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 - 2p + 2}.$$

Для знаходження $x(t)$ за відомим зображенням $X(p)$ використовуємо властивості лінійності, зсуву та теорему про множення зображень:

$$\frac{1}{p^2 - 2p + 2} = \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \leftarrow e^t \sin t,$$

$$\frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow (e^t \sin t) * \sin t = \int_0^t e^\tau \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau =$$

$$= \left| \sin \tau \cdot \sin(t - \tau) = \frac{1}{2} (\cos(2\tau - t) - \cos t) \right| = \frac{1}{2} \int_0^t e^\tau \cos(2\tau - t) d\tau = e^\tau \cos(2\tau - t) \Big|_0^t +$$

$$+ 2 \int_0^t e^\tau \sin(2\tau - t) d\tau = e^t \cos t - \cos t + 2 \left[e^\tau \sin(2\tau - t) \Big|_0^t - 2 \int_0^t e^\tau \cos(2\tau - t) d\tau \right].$$

$$\int_0^t e^\tau d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1.$$

$$\int_0^t e^\tau \cos(2\tau - 1) d\tau = \frac{1}{5} (e^t - 1) \cos t + \frac{2}{5} (e^t + 1) \sin t;$$

$$- \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \frac{1}{5} (e^t + 1) \sin t + \frac{2}{5} (1 - e^t) \cos t;$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \leftarrow \frac{1}{5} (6e^t + 1) \sin t + \frac{2}{5} (1 - e^t) \cos t.$$

Звідки $x(t) = \frac{1}{5} (6e^t + 1) \sin t + \frac{2}{5} (1 - e^t) \cos t.$

ЗАНЯТТЯ 24. Аудиторна самостійна робота «ЛДНР II-го порядку»

Література

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. - 440 с.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г., Головка Н.О. Вища математика у прикладах та задачах. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. - Харків: ХНУРЕ, 2002. - 596 с.
3. Бутенко Н.С. Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Стислий довідник з вищої математики – ХНУРЕ, 2018.

4. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. Ч.П. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» – ХНУРЕ, 2018. – 268 с. (517 (07) П-61).
5. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 196 с. (517 (07) П-61).
6. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 340 с. (517 (07) П-61).
7. Дорошенко В.О., Зуєв М.Г., Титаренко О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тексти лекцій. – Харків: ХНУРЕ, 2007. - 112 с. (517(07) З 43)
8. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.О. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Тести.– Харків: ХНУРЕ, 2016. 256с. (512(07)К49).
9. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної. – Конспект лекцій. Тести.– Харків: ХНУРЕ, 2018.–280с. (517(07)К49).
- 10.Дорошенко В.О., Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Операційне числення. Тексти лекцій. Комп'ютерні індивідуальні завдання. .– Харків: ХНУРЕ, 2018.– 122с. (512(07)Д69).

Електронний документ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з навчальної дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів денної форми навчання
освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія
(прискорена форма навчання)»

Упорядник Бутенко Ніна Семенівна

Відповідальний випусковий О. Г. Нерух

Авторська редакція

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з навчальної дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(прискорена форма навчання)

для студентів денної форми навчання
спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка

освітньої програми підготовки
«Інформаційно-мережна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО

кафедрою вищої математики.

Протокол № 1 від 01.09.2021 р.

ХАРКІВ 2019

Контрольні завдання з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія (прискорена форма навчання)» [Електронний документ] / Упоряд. Н.П. Бутенко Н.С.. – Харків: ХНУРЕ, 2019. – 20 с.

Упорядник Н.С. Бутенко, ст.. викл. каф. ВМ

Рецензент: Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

ВСТУП

Оцінювання знань, вмінь та навичок студентів враховує види занять, які згідно з робочою програмою дисципліни «Вища математика» передбачають практичні заняття та самостійну роботу в таких формах:

- виконання практичних робіт;
- виконання самостійних робіт;
- виконання контрольних робіт.

Дане видання покликане допомогти в організації самостійної роботи студентів під час підготовки до виконання контрольних робіт з курсу вищої математики. Наведено загальні методичні поради, програма навчальної дисципліни і зразки виконання типового варіанту всіх 6 контрольних робіт. Кожний варіант складається з задач, які охоплюють змістові модулі вищої математики. Метою даних методичних рекомендацій є ознайомлення студентів з практичними порадами та завданнями щодо самостійної підготовки до контрольних робіт. За складом, змістом та структурою матеріал повністю узгоджено з навчальним планом.

Методичні рекомендації призначені для студентів першого курсу освітньої програми «Телекомунікації (прискорена форма навчання)».

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ

Методичні рекомендації призначені для студентів першого курсу освітньої програми «Телекомунікації (прискорена форма навчання)».

Зміст контрольних робіт та їх послідовність відповідають робочій програмі курсу «Вища математика».

Завданням поточного контролю є перевірка розуміння та засвоєння певного матеріалу з даної теми, вироблення вмінь та навичок самостійно розв'язувати задачі, вироблення здатності осмислювати зміст теми (модуля) у взаємозв'язку з попередніми темами. Перед виконанням кожної контрольної роботи студент вивчає відповідний лекційний матеріал, проглядає приклади розв'язування задач, розв'язує типові задачі та вправи з кожної теми.

При виконанні контрольної роботи розв'язки всіх задач та пояснення до них повинні бути короткими, але обґрунтованими. При необхідності слід включати до описання розв'язування задачі теоретичний матеріал з використанням формул, теорем, зауважень тощо. Рисунки та графіки потрібно

виконувати акуратно, з дотриманням масштабу у вибраній системі координат. Пояснення до розв'язування задач повинні відповідати позначенням на рисунках та графіках.

2 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних.

Тема 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної, їх геометричний та фізичний зміст. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідна складеної функції.

Тема 2. Похідні і диференціали вищих порядків. Формули Тейлора і Маклорена.

Тема 3. Дослідження функцій однієї змінної та побудова графіків.

Тема 4. Функції багатьох змінних. Область визначення. Границя функції. Неперервність функції в точці і на множині. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал. Похідна за напрямом. Градієнт функції.

Тема 5. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Похідна складеної функції. Екстремум функції багатьох змінних.

Змістовий модуль 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Тема 1. Комплексні числа.

Тема 2. Первісна, її властивості. Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій. Інтегрування заміною змінної.

Тема 3. Інтегрування введенням під диференціал. Інтегрування частинами.

Тема 4. Інтегрування раціональних, ірраціональних функцій та тригонометричних функцій.

Тема 5. Визначений інтеграл, його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінних і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 6. Геометричні застосування визначеного інтегралу: площа плоскої фігури, об'єм тіла, довжина дуги кривої.

Змістовий модуль 3. Ряди: числові, степеневі, Фур'є. Інтеграл Фур'є.

Тема 1. Числові ряди. Необхідна умова збіжності ряду. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами. Властивості збіжних рядів.

Тема 2. Знакопочережні ряди. Абсолютно і умовно збіжні ряди.

Тема 3. Функціональні ряди. Степеневі ряди, радіус збіжності степеневому ряду. Ряди Тейлора і Маклорена.

Тема 4. Ряд Фур'є для функції, заданої на періоді 2π і на довільному періоді. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій. Неповні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є.

Тема 5. Застосування рядів Фур'є до аналізу сигналів.

Тема 6. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є.

Змістовий модуль 4. Диференціальні рівняння. Операційне числення.

Тема 1. Визначення диференціального рівняння, його загального і частинного розв'язку. Розв'язок спеціальних типів рівнянь першого порядку: зі змінними, що розділяються, однорідні рівняння, лінійні рівняння, рівняння Бернуллі.

Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Однорідні ЛДР. Лінійно незалежна система розв'язків. Фундаментальна система розв'язків ЛДР.

Тема 3. Неоднорідні ЛДР зі сталими коефіцієнтами, побудова фундаментальної системи розв'язків. Метод підбору розв'язку ЛНДР за виглядом правої частини. Метод варіації довільних сталих.

Тема 4. Перетворення Лапласа. Зображення основних елементарних функцій. Властивості перетворення Лапласа.

Тема 5. Відновлення оригіналу.

Тема 6. Застосування операційного числення для розв'язання диференціальних рівнянь.

3. ТЕМИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ТА РОЗ'В'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Контрольна робота №1

«Диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних»

Робота складається з 3 завдань. Вони відповідають теоретичному матеріалу змістовного модуля 1 робочої програми. Термін проведення контрольної роботи – 2 години. Наведено типовий варіант роботи.

Задача 1. Знайти похідні функцій:

1) $y = (x^2 - 3) \cdot \ln 4x + \arcsin^3 x$; 2) $y = \arctg(\ln 5x)$;

3) $3^x + 3^y = \cos y$; 4) $y = (\sin 3x)^x$; 5) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$

Задача 2. Знайти значення градієнта та похідної функції u у точці $A(1;1;1)$ за напрямом від точки A до точки B , якщо $u = x^3 + y^2 z^2 - 2yz + x y z - z$, $B(3;4;-2)$.

Задача 3. Для заданої поверхні $S: 3x^3 - 2y^3 - z^3 - 2xyz + 4 = 0$ знайти рівняння дотичної площини та нормалі в точці $M(1;1;1)$.

Розв'язання задач

Задача 1. 1)

Для обчислення похідної функції скористаємось правилом диференціювання суми та добутку:

$$y' = (x^2 - 3)' \cdot \ln 4x + (x^2 - 3) \cdot (\ln 4x)' + (\arcsin^3 x)' = 2x \cdot \ln 4x + \frac{x^2 - 3}{x} + \frac{3\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Задача 1. 2)

Задана функція є складеною. Зовнішня функція $\arctg u$, де $u = \ln 5x$.

Знайдемо її похідну:

$$y' = (\arctg(\ln 5x))' = \frac{1}{1 + \ln^2 5x} \cdot (\ln 5x)' = \frac{1}{x(1 + \ln^2 5x)}.$$

Задача 1. 3)

Маємо неявно задану функцію. Для знаходження її похідної дотримуємось відповідного алгоритму. Продиференціюємо по x обидві частини рівності.

$$3^x \cdot \ln 3 + 3^y \cdot \ln 3 \cdot y' = -\sin y \cdot y'.$$

Знайдемо y' . Доданки, які містять y' , перенесемо в ліву частину рівності і винесемо y' за дужки:

$$y'(3^y \cdot \ln 3 + \sin y) = -3^x \cdot \ln 3.$$

Розв'яжемо отриману рівність відносно y' :

$$y' = -\frac{3^x \cdot \ln 3}{3^y \cdot \ln 3 + \sin y}.$$

Задача 1. 4)

Прологарифмуємо обидві частини виразу функції.

Застосовуючи правило логарифмування степеня, отримаємо

$$\ln y = x \cdot \ln \sin 3x.$$

Продиференціюємо обидві частини отриманої рівності.

У лівій частині слід мати на увазі, що $\ln y$ складена функція від x , а до правої слід застосувати правило диференціювання добутку.

$$\frac{y'}{y} = \ln \sin 3x + \frac{3x \cdot \cos 3x}{\sin 3x}.$$

Знайдемо y' . Замінімо y його виразом через x і отримаємо

$$y' = (\sin 3x)^x \cdot (\ln \sin 3x + 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x).$$

Задача 1. 5)

Для знаходження похідних функції, заданої у параметричній формі, маємо формули

$$y''_{xx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \text{ та } y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Знайдемо y'_t , x'_t і визначимо y'_x .

Похідні функцій x і y по змінній t відповідно дорівнюють

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2} \text{ та } y'_t = 2t.$$

За формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ отримуємо, що $y'_x = \frac{2t \cdot (1+t^2)}{2t} = 1+t^2$.

Знайдемо похідну від y'_x по параметру t : $(y'_x)'_t = (1+t^2)'_t = 2t$

Знайдемо другу похідну y''_{xx} .

$$\text{За формулою } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \text{ знаходимо } y''_{xx} = \frac{2t \cdot (1+t^2)}{2t} = 1+t^2.$$

Задача 2.

Згідно до означення градієнт функції $u(x; y; z)$ в точці M_0 є вектор:

$$\text{gradu}|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{M_0} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}|_{M_0} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}|_{M_0} \cdot \vec{k}. \quad (*)$$

Похідна функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_0 за напрямом

$\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ обчислюються за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}|_{M_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}|_{M_0} \cos \gamma. \quad (**)$$

Знайдемо частинні похідні заданої функції $u(x, y, z)$ в точці $A(1; 1; 1)$.

Вважаючи y і z сталими, знаходимо: $u'_x = 3x^2 + yz$; $u'_x(A) = 3 + 1 = 4$.

Вважаючи x і z сталими, знаходимо: $u'_y = 2yz^2 - 2z + xz$; $u'_y(A) = 2 - 2 + 1 = 1$.

Вважаючи x і y сталими, знаходимо: $u'_z = 2y^2z - 2y + xy - 1$;

$u'_z(A) = 2 - 2 + 1 - 1 = 0$.

Знайдемо градієнт заданої функції. Скориставшись формулою (*),

запишемо $\text{gradu}(A) = 4\vec{i} + \vec{j}$. Значення градієнта

$$|\text{gradu}(A)| = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}.$$

Знайдемо модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{l} = \vec{AB}$.

$$\vec{l} = \vec{AB} = (2; 3; -3); |\vec{l}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22};$$

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{2}{\sqrt{22}}; \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{3}{\sqrt{22}}; \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{-3}{\sqrt{22}}.$$

Знайдемо шукану похідну за напрямом. За формулою (**) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_A = u'_x(A) \cdot \cos \alpha + u'_y(A) \cdot \cos \beta + u'_z(A) \cdot \cos \gamma = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{22}} + 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{22}} = \frac{11}{\sqrt{22}}.$$

Задача 3.

Поверхня S задана в неявному вигляді $F(x, y, z) = 0$. Рівняння дотичної площини P і нормалі N в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ знаходять за формулами

$$P: F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \quad (*)$$

$$N: \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (**)$$

Знайдемо усі необхідні частинні похідні і обчислимо їхні значення в точці $M(1;1;1)$. Позначимо $F(x, y, z) = 3x^3 - 2y^3 - z^3 - 2xyz + 4$.

$$F'_x = 9x^2 - 2yz; F'_x(M) = 9 - 2 = 7; F'_y = -6y^2 - 2xz; F'_y(M) = -6 - 2 = -8;$$

$$F'_z = -3z^2 - 2xy; F'_z(M) = -3 - 2 = -5.$$

Запишемо шукані рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.

Підставимо отримані числові значення частинних похідних і координати точки M у формули (*) і (**).

Рівняння дотичної площини: $7 \cdot (x - 1) - 8 \cdot (y - 1) - 5 \cdot (z - 1) = 0$ або

$$7x - 8y - 5z + 6 = 0. \text{ Рівняння нормалі: } \frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-5}.$$

Аудиторна самостійна робота

«Інтегральне числення функцій однієї змінної»

Робота складається з 3 завдань. Вони відповідають теоретичному матеріалу змістовного модуля 2 робочої програми. Термін проведення самостійної роботи – 2 години. Наведено типовий варіант самостійної роботи.

Задача 1. Обчислити невизначені інтеграли:

$$1) \int \frac{x+1}{7x^2+1} dx; \quad 2) \int \frac{e^{\arctg x}}{x^2+1} dx; \quad 3) \int x \sin(x+7) dx.$$

Задача 2. Обчислити невизначені інтеграли:

$$1) \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5}; \quad 2) \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$$

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$4y = 8x - x^2 \text{ та } 4y = x + 6.$$

Розв'язання задач

Задача 1.1) Для розв'язування застосовуємо метод внесення під знак диференціалу.

$$\int \frac{x+1}{7x^2+1} dx = \frac{1}{14} \int \frac{d(7x^2+1)}{7x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{d(\sqrt{7}x)}{(\sqrt{7}x)^2+1} = \frac{1}{14} \ln|7x^2+1| + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg(\sqrt{7}x) + C;$$

Задача 1.2) Для розв'язування застосовуємо метод внесення під знак диференціалу.

$$\int \frac{e^{\arctg x}}{x^2 + 1} dx = \int e^{\arctg x} d(\arctg x) = e^{\arctg x} + C.$$

Задача 1.3) Для розв'язування застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(x+7) dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin(x+7) dx \\ du = dx \quad v = -\cos(x+7) \end{array} \right| = -x \cos(x+7) + \int \cos(x+7) dx = \\ &= -x \cos(x+7) + \sin(x+7) + C. \end{aligned}$$

Задача 2. 1)

1) Застосовуємо «універсальну» тригонометричну підстановку:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4-4t^2+6t+5+5t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = \\ &= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C. \end{aligned}$$

Задача 2.2) Оскільки найменше спільне кратне показників коренів дорівнює чотирьом, то застосуємо підстановку $x = t^4$.

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx = \left| x = t^4 \quad dx = 4t^3 dt \right| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3(1+t)}{t^2(t^2+1)} dt = 4 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt.$$

Маємо інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділимо цілу частину в підінтегральному виразі (поділимо чисельник на знаменник).

$$I = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt = 4 \int dt + 4 \int \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

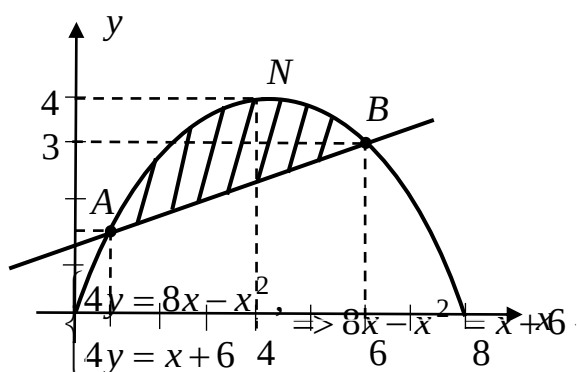
Перший інтеграл табличний, а другий інтеграл є найпростішим дробом III-го типу. Оскільки у його знаменнику вже виділено повний квадрат (t^2) , то:

$$I = 4t + 4 \int \frac{t dt}{t^2+1} - 4 \int \frac{dt}{t^2+1} = 4t + 2 \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 4 \arctg t = 4t + 2 \ln |t^2+1| - 4 \arctg t + C.$$

Повернемось до змінної x ($t = \sqrt[4]{x}$):

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln|\sqrt{x} + 1| - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

Задача 3.



Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь.

$$8x - x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Точками перетину параболи і прямої є точки $A(1; \frac{7}{4})$ і $B(6; 3)$. На рис. шукана площа заштрихована. Область ANB зверху обмежена параболою, знизу прямою, тому:

$$S = \int_1^6 \left(\frac{8x - x^2}{4} - \frac{x + 6}{4} \right) dx = \frac{1}{4} \int_1^6 (7x - x^2 - 6) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right) \Big|_1^6 = \frac{125}{4} \text{ (кв. од.)}.$$

Аудиторна самостійна робота «Ряди»

Робота складається з 3 завдань. Вони відповідають теоретичному матеріалу змістовного модуля 3 робочої програми. Термін проведення контрольної роботи – 2 години. Наведено типовий варіант роботи.

Задача 1. Визначити область збіжності степеневого ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \cdot \left(\frac{x}{3} \right)^n.$$

Задача 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{x}{2}$, $0 < x < 2\pi$..

Задача 3. Подати інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0,5 & \text{при } x = 0, x = 1, \\ 0 & \text{при } x < 0, x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання задач

Задача 1. 1) Для даного ряду $|a_n| = \frac{1}{(n^2 + 1) \cdot 2^n}$.

Оскільки $|a_{n+1}| = \frac{1}{((n+1)^2 + 1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{(n^2 + 2n + 2) \cdot 2^n \cdot 2}$, маємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n + 2) \cdot 2^n \cdot 2}{(n^2 + 1) \cdot 2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n + 2)}{(n^2 + 1)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = 2.$$

Інтервал збіжності ряду $(-2; 2)$.

Дослідимо збіжність ряду при $x = \pm 2$.

При $x = -2$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} \cdot \left(\frac{-2}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} \cdot (-1)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1},$$

який можна досліджувати за ознаками збіжності знакододатного ряду.

Застосуємо до нього граничну ознаку порівняння – порівняємо з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} = 1 \neq 0.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний ($p = 2 > 1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ також збіжний.

При $x = 2$ маємо числовий знакзмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1}$. За достатньою

ознакою збіжності знакзмінних рядів він є збіжним.

Областю збіжності ряду є інтервал $(-2; 2)$, до якого приєднуються точки $x = 2$ і $x = -2$. У підсумку область збіжності є відрізок $[-2; 2]$.

Задача 1. 2) Ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, для цього ряду $|a_n| = \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Оскільки $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$, то $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n \cdot 2}{n \cdot 2^n} = 2$.

За умовою $x_0 = 3$, тому інтервал збіжності такий: $(3-2; 3+2)$ або $(1; 5)$.

Дослідимо збіжність ряду при $x = 1$ і $x = 5$.

При $x = 5$ маємо числовий знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це гармонічний ряд,

який є розбіжним.

При $x = 1$ отримуємо знакопочережний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \text{ До нього застосуємо ознаку Лейбніца:}$$

$$1) \frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots - \text{виконується; } 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 - \text{виконується.}$$

Оскільки обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, то знакопочережний ряд збігається.

Областю збіжності заданого ряду є інтервал $(1;5)$, до якого приєднується точка $x = 1$. Отже, область збіжності: $[1;5)$.

Задача 1. 3) Маємо $|a_n| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}$.

Знайдемо радіус збіжності за формулою $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot 3^n} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 3e,$$

$$\text{де } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \text{друга важлива границя.}$$

Інтервал збіжності ряду $(-3e; 3e)$.

При $x = 3e$ маємо числовий знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot (e)^n$.

Перевіримо для нього виконання необхідної умови збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot (e)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^n} = 1 \neq 0.$$

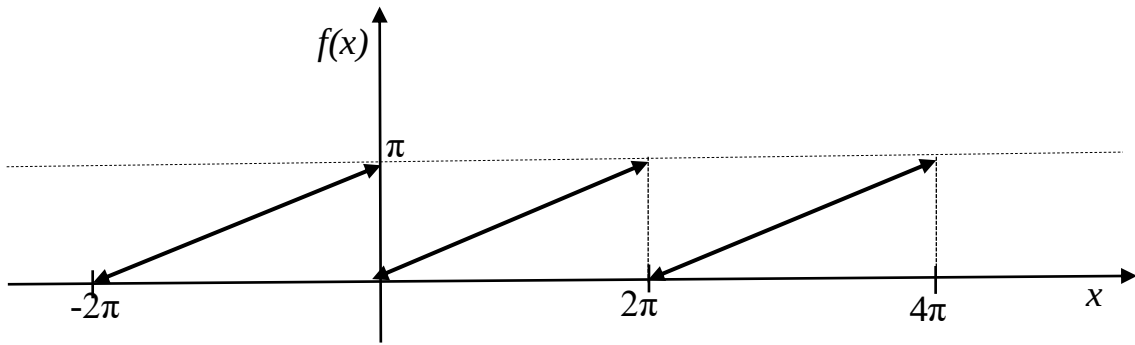
Отже, необхідна умова збіжності числових рядів не виконується, ряд розбігається.

При $x = -3e$ маємо числовий знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} (e)^n$,

який розбігається з тієї самої причини.

Таким чином, область збіжності заданого степеневого ряду: $(-3e; 3e)$.

Задача 2. Зробимо схематичний графік заданої функції.



Ряд Фур'є (тригонометричний ряд) для періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx, \quad (*)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx.$$

Задана функція не є ні парною, ні непарною.

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є для заданої функції.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cdot \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x \cdot \sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cdot \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x \cdot \cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Підставляючи отримані значення a_0, a_n, b_n у формулу (*), отримуємо шуканий розклад заданої функції в ряд Фур'є:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

Задача 3.

Задана функція задовольняє умови Діріхле (є кусково-неперервною, оскільки складається з трьох гладких частин: $y=0$ на $(-\infty;0)$, $y=1$ на $(0;1)$ і $y=0$ на $(1;\infty)$ і має дві точки розриву першого роду при $x=0$ і $x=1$). Очевидно, функція також абсолютно інтегрована на всій числовій осі, оскільки зовні відрізка $[0;1]$ вона дорівнює нулю і інтеграл від неї по всій числовій осі зводиться до інтеграла по відрізку $[0;1]$. Отже, така функція може бути подана інтегралом Фур'є за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos w(t-x) dt.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dw \int_0^1 1 \cdot \cos w(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w(t-x)}{w} \Big|_0^1 dw = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w(1-x) + \sin wx}{w} dw = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w(1-2x)}{2}}{w} dw. \end{aligned}$$

Аудиторна самостійна робота «Диференціальні рівняння»

Самостійна робота складається з 3 завдань. Вони відповідають теоретичному матеріалу змістовного модуля 4 робочої програми. Термін проведення самостійної роботи – 2 години. Наведено типовий варіант контрольної роботи.

Задача 1. Записати структуру окремого розв'язку рівняння:

1) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$; 3) $y'' - 4y' + 13y = x \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x$.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x.$$

Задача 3. Розв'язати задачу Коші операційним методом:

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Розв'язання задач

Задача 1.1) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і

спеціальною правою частиною $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$.

Складемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння.

$$2k^2 + 5k = 0 \rightarrow k(2k + 5) = 0 \rightarrow k_1 = 0, k_2 = -2,5.$$

Запишемо загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

$$y_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{-2,5x}.$$

Запишемо структуру $y_q(x)$ – окремого розв'язку ЛНДР.

Застосуємо метод підбору:

1) права частина рівняння $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ – многочлен другого порядку, $f(x)$ не містить множника $e^{\alpha x}$, не містить також ні синуса, ні косинуса. Це означає, що «контрольне число» $m = \alpha \pm i\beta = 0$;

2) окремий розв'язок попередньо слід знаходити у вигляді многочлена другого порядку, тобто $\bar{y}_q(x) = Ax^2 + Bx + C$;

3) «контрольне число» $m = 0$ є коренем характеристичного рівняння, отже, потрібно помножити «попередній вигляд» окремого розв'язку $\bar{y}_q(x)$ на x .

Остаточно, окремий розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_q(x) = \bar{y}_q(x) \cdot x = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x.$$

Задача 1.2) Задано ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і

спеціальною правою частиною $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$, «контрольне число» $m = 2$.

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння.

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \rightarrow (k - 2)^2 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 2.$$

Запишемо загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

$$y_0 = e^{2x}(C_1 + C_2 \cdot x).$$

Запишемо структуру $y_q(x)$ – окремого розв'язку ЛНДР.

За методом підбору маємо «попередній вигляд» окремого розв'язку заданого ЛНДР: $\bar{y}_q(x) = A \cdot e^{2x}$ (за структурою співпадає з правою частиною рівняння). Оскільки «контрольне число» $m = 2$ є коренем характеристичного рівняння $k_{1,2} = 2$ кратності 2, то $y_q(x) = \bar{y}_q(x) \cdot x^2$.

Остаточно отримуємо $y_q(x) = A \cdot e^{2x} \cdot x^2$.

Задача 1.3) Задано ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і

спеціальною правою частиною $f(x) = x \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x$, «контрольне число» $m = 2 \pm 3i$.

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння.

$$k^2 - 4k + 13 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Запишемо загальний розв'язок ЛОДР.

$$y_0 = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Запишемо структуру $y_u(x)$ – окремого розв'язку ЛНДР.

Права частина заданого рівняння є добутком трьох множників: неповного многочлена першого порядку x , показникової функції e^{2x} і тригонометричної функції. «Попередній вигляд» окремого розв'язку заданого ЛНДР має за структурою співпадати з правою частиною заданого рівняння, тобто $\bar{y}_u(x) = (Ax + B) \cdot e^{2x} \cos 3x + (Cx + D) \cdot e^{2x} \sin 3x$. «Контрольне число» $m = 2 \pm 3i$ співпадає з коренями характеристичного рівняння, кратність яких $s = 1$.

Тому окремий розв'язок шукаємо у вигляді $y_u(x) = \bar{y}_u(x) \cdot x$, а саме

$$y_u(x) = ((Ax + B) \cdot e^{2x} \cos 3x + (Cx + D) \cdot e^{2x} \sin 3x) \cdot x \text{ або}$$

$$y_u(x) = e^{2x} \cdot ((Ax + B) \cdot \cos 3x + (Cx + D) \cdot \sin 3x) \cdot x$$

Задача 2.

Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною $f(x) = 37 \cos 3x$.

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 10 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 1 \pm 3i.$$

Запишемо загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

$$y_0 = e^x \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x).$$

Запишемо вигляд $y_u(x)$ – окремого розв'язку ЛНДР. Скористаємось методом підбору $y_u(x)$:

1) права частина $f(x) = 37 \cos 3x$ ($\alpha = 0, \beta = 3$). «Контрольне число» $m = \pm 3i$;

2) попередньо окремий розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\bar{y}_u(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$$

3) «контрольне число» $m = \pm 3i$ не є коренем характеристичного

рівняння, тому зазначений попередній вигляд $\bar{y}_q(x)$ є остаточним.

Знайдемо коефіцієнти A і B .

$$y'_q = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x, \quad y''_q = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Підставимо y_q, y'_q, y''_q в задане рівняння, отримаємо рівність

$$(A - 6B) \cdot \cos 3x + (B + 6A) \cdot \sin 3x = 37 \cos 3x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$ з обох частин рівняння.

$$\begin{cases} A - 6B = 37, \\ B + 6A = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -6. \end{cases}$$

Отже, $y_q(x) = \cos 3x - 6 \sin 3x$.

Знайдемо загальний розв'язок ЛНДР.

$$y(x) = y_0(x) + y_q(x) = e^x (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x) + \cos 3x - 6 \sin 3x.$$

Задача 3.

Знайдемо зображення лівої і правої частин рівняння.

Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді

$$x'(t) \div p \cdot X(p), \quad x''(t) \div p^2 \cdot X(p).$$

Зображення правої частини рівняння: $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$.

Запишемо операторне рівняння для $X(p)$ і розв'яжемо його.

$$p^2 \cdot X(p) + 2p \cdot X(p) - 3X(p) = \frac{1}{p+1},$$

$$X(p) \cdot (p^2 + 2p - 3) = \frac{1}{p+1},$$

$$X(p) = \frac{1}{(p+1) \cdot (p^2 + 2p - 3)}.$$

Оскільки $X(p) = \frac{1}{(p+1)(p+3)(p-1)}$ – правильний раціональний дріб, то

розкладемо $X(p)$ на суму найпростіших дробів.

$$X(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p-1}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B і C .

$$A = \frac{1}{(p+3)(p-1)} \Big|_{p=-1} = -\frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{(p+1)(p-1)} \Big|_{p=-3} = \frac{1}{8};$$

$$C = \frac{1}{(p+3)(p+1)} \Big|_{p=1} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Отже, } X(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{p+3} + \frac{1}{p-1} \right).$$

$$\text{Знаходимо шуканий оригінал: } x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{8}(e^{-3t} + e^t) = \frac{1}{8}(e^{-3t} + e^t - 2e^{-t}).$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- 1) Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с. (517 (07) T29).
- 2) Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) B55).
- 3) Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с. (517 (07) B55).
- 4) Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) B55).
- 5) Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебн. пособие. в 3 ч. Ч.1. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 270 с. (517(07) C23).
- 6) Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.2. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Высшейш. шк., 1991. – 351 с. (517(07) C23).
- 7) Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Высшейш. шк., 1991. – 287 с. (517(07) C23).
- 8) Бутенко Н.С. Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Стислий довідник з вищої математики – ХНУРЕ, 2018.

- 9) Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. Ч.П. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» – ХНУРЕ, 2018. – 268 с. (517 (07) П-61).
- 10) Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 196 с. (517 (07) П-61).
- 11) Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 340 с. (517 (07) П-61).

Електронний документ

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з навчальної дисципліни ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів денної форми навчання
освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія
(прискорена форма навчання)»

Упорядник Бутенко Ніна Сеиєнівна

Відповідальний випусковий О.Г. Нерух

Авторська редакція

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ЗАПИТАННЯ

з навчальної дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(прискорена форма навчання)

для студентів денної форми навчання
спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка

освітньої програми підготовки
«Інформаційно-мережна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО

кафедрою вищої математики.

Протокол № 1 від 01.09. 2021 р.

ХАРКІВ 2021

Екзаменаційні запитання з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія (прискорена форма навчання)», [Електронний документ] / Упоряд. Н.С. Бутенко– Харків: ХНУРЕ, 2021. – 13 с.

Упорядник Н.С.Бутенко, ст. викладач каф. ВМ

Рецензент: Н.П.Стогній, к. ф. м. н., доц. каф. ВМ

ЗМІСТ

Пояснювальна записка	164
ЧАСТИНА 1	164
1.1 Критерії оцінювання	164
1.2 Перелік теоретичних питань до іспиту	167
1.3 Перелік типових задач до іспиту	169
Література	172

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Рейтингова оцінка за семестр є накопичувальною – підсумовуються бали за кожний модуль, передбачений у семестрі.

Кожний модуль включає наступні **контрольні заходи**:

- виконання індивідуального домашнього завдання;
- позааудиторна самостійна робота (вивчення додаткових тем за літературними джерелами тільки в тих модулях, які передбачені робочою програмою);
- аудиторна контрольна робота.

Кількість балів за кожний вид роботи визначається у кожному модулі окремо. Нижня границя за семестр становить 60 балів, а максимальна – 100. Дисципліна вважається вивченою студентом за умови отримання мінімального рейтингового балу в кожній контрольній точці.

Як форма підсумкового контролю для дисципліни ВМ використовується комбінований іспит. При цьому виді контролю підсумкова оцінка P_{π} обчислюється за формулою: $P_{\pi} = 0,6 \cdot O_{\text{сем}} + 0,4 \cdot O_{\text{ісп}}$, де $O_{\text{сем}}$ – оцінка за семестр у 100-бальній системі, $O_{\text{ісп}}$ – оцінка за іспит у 100-бальній системі. Білет для іспиту складається з двох теоретичних запитань та трьох задач. Теоретичні запитання та кожна задача оцінюються в 20 балів (в сумі – 100 балів).

Комбінований іспит передбачає поєднання таких видів роботи як письмову відповідь на екзаменаційний білет і/або тест (комп'ютерний/бланковий) та усну відповідь екзаменатору.

ЧАСТИНА 1

1.1 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Необхідний обсяг знань та умінь для одержання позитивної оцінки.

ЗНАТИ:

- означення похідної функції в точці, диференціала функції, таблицю похідних елементарних функцій, правила диференціювання;
- означення функції багатьох змінних, її частинні похідні та диференціали; частинні похідні складеної функції багатьох змінних; локальні та умовні екстремуми функції двох змінних;

- комплексні числа і дії над ними;
- невизначений інтеграл, таблицю інтегралів та основні методи інтегрування;
- визначений інтеграл та методи його обчислення;
- визначення збіжності числових рядів за допомогою достатніх ознак;
- функціональні ряди, область збіжності; степеневі ряди, інтервал та радіус збіжності;
- розкладання функцій в ряд Фур'є;
- розв'язання диференціальних рівнянь першого та вищих порядків, а також систем диференціальних рівнянь;
- основні властивості операційного числення.

ВМІТИ:

- диференціювати функції, розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою похідної;
- знаходити частинні похідні та диференціали функції багатьох змінних;
- застосовувати частинні похідні для знаходження рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні;
- розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою частинних похідних;
- виконувати дії над комплексними числами;
- обчислювати невизначений та визначений інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами;
- інтегрувати найпростіші дроби, раціональні, ірраціональні та тригонометричні функції;
- проводити обчислення площі плоскої фігури, довжину плоскої лінії, об'єм тіла.
- розкладати періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є;
- розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку методом підбору;
- розв'язувати диференціальні рівняння операторним методом.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента протягом 1-го семестру

«Задовільно» (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Знати таблицю похідних. Уміти диференціювати функції функції однієї змінної; знаходити частинні похідні функції багатьох

змінних. Уміти знаходити модуль і аргумент комплексного числа. Знати таблицю невизначених інтегралів. Уміти обчислювати невизначений та визначений інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами. Інтегрувати раціональні дроби у випадку простих та дійсних коренів знаменника. Знати за якими формулами визначаються коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π . Вміти визначати коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π , яка задана графічно та складається з двох постійних частин. Вміти розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має спеціальний вигляд, методом невизначених коефіцієнтів та операційним методом (випадок, коли корені характеристичного рівняння дійсні та різні, а права частина така: $Qe^{\alpha t}$, де α не є коренем характеристичного рівняння).

«Добре» (75-89). Твердо знати мінімум, захистити всі індивідуальні завдання, виконати всі контрольні роботи та поза аудиторну самостійну роботу. Уміти диференціювати складені функції однієї змінної. обчислювати невизначений та визначений інтеграли від різних класів функцій; застосовувати інтегральне числення при розв'язанні задач геометрії; виконувати заміну змінних при обчисленні подвійних інтегралів; розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою часткових похідних. Уміти: визначати область збіжності степеневих рядів; розкладати періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є в дійсній формі; використовувати властивості операційного числення для знаходження оригіналів, зображень та розв'язувати диференціальні рівняння операційним методом.

«Відмінно» (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента на іспиті

«Задовільно» (60-74). Показати необхідний мінімум теоретичних знань (означення, формулювання теорем, формули). Знати методи розв'язування практичних завдань та вміти застосовувати їх на практиці.

«Добре» (75-89). Твердо знати теоретичні питання, але доказ тільки в схематичному виді. Показати вміння розв'язувати практичні завдання та обґрунтовувати всі етапи запропонованого розв'язання.

«Відмінно» (90-100). Показати повні знання основного та додаткового теоретичного матеріалу. Безпомилково розв'язати практичні завдання, пояснити та обґрунтувати обраний метод розв'язання.

ПЕРЕЛІК ТЕОРЕТИЧНИХ ЗАПИТАНЬ ДО ІСПИТУ

1. Похідна функції. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі. Неперервність диференційованої функції. Похідна сталої функції, суми, добутку, частки. Похідна складеної функції. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних.
2. Логарифмічне диференціювання. Похідна неявної функції. Похідна від функції, що задана параметрично.
3. Диференціал функції. Геометричний зміст диференціала. Інваріантність диференціала відносно заміни змінної.
4. Похідні та диференціали вищих порядків.
5. Формули Тейлора і Маклорена для довільної функції.
6. Монотонність функції. Необхідна та достатня умова монотонності. Екстремуми функції. Необхідна умова екстремуму. Достатня умова екстремуму. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної. Опуклість. Точки перегину. Достатня умова напряду опуклості. Достатня умова точки перегину. Похилі та вертикальні асимптоти. Необхідна та достатня умова існування похилої асимптоти. Схема повного дослідження функції.
7. Означення функції двох змінних, графік, область визначення.
8. Похідні та диференціали функції багатьох змінних. Частинні похідні. Геометричний зміст частинних похідних. Частинні похідні вищих порядків. Повний та частинні диференціали. Диференціали вищого порядку. Похідна складеної функції. Диференціювання неявної функції.
9. Дотична площина та нормаль до поверхні. Лінії та поверхні рівня. Похідна за напрямом. Градієнт. Теорема про зв'язок градієнта і похідної за напрямом. Властивості градієнта.
10. Локальні екстремуми функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму. Стаціонарні та критичні точки. Достатні умови екстремуму.
11. Комплексні числа. Дії над комплексними числами, що задані в алгебраїчній формі. Модуль та аргумент. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами, що задані в тригонометричній та показниковій формах. Формула Муавра. Знаходження кореня n степеня з комплексного числа.

12. Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Основні методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами.
13. Інтегрування основних класів елементарних функцій: інтегрування раціональних дробів, тригонометричних функцій та деяких ірраціональних функцій.
14. Визначений інтеграл. Означення, геометричний зміст, теорема про достатню умову інтегрованості функції.
15. Властивості визначеного інтеграла: лінійність, адитивність, інтегрування нерівності, властивість модуля визначеного інтеграла, оцінка інтеграла, теорема про середнє значення функції.
16. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами.
17. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоских фігур: величина площі в декартових координатах; обчислення площі, якщо крива задана параметричними рівняннями, обчислення площі сектора, якщо крива задана в полярних координатах. Обчислення довжини дуги плоскої кривої: довжина дуги в декартових координатах, довжина дуги у випадку параметричного рівняння; довжина дуги кривої в полярних координатах.
18. Числові ряди. Основні поняття. Основні теореми про збіжність числових рядів. Ознаки порівняння числових рядів з додатними членами. Ознака Даламбера. Радикальна й інтегральна ознаки Коші.
19. Знакозмінні й знакопозадовні ряди. Основні поняття. Ознака Лейбніца. Умовна й абсолютна збіжність.
20. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Означення. Теорема Абеля. Визначення радіуса збіжності степеневих рядів по Даламберу й Коші.
21. Ряди Тейлора й Маклорена. Розкладання основних елементарних функцій у ряд Тейлора.
22. Ряд і коефіцієнти Фур'є. Умова Діріхле. Розкладання в ряд Фур'є періодичних функцій з періодами 2π , $2l$. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій. Розкладання в ряд Фур'є неперіодичних функцій.
23. Ряд Фур'є в комплексній формі.
24. Інтеграл Фур'є. Інтеграл Фур'є для парних та непарних функцій. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є.
25. Диференціальне рівняння, його порядок та розв'язок. Диференціальні

рівняння першого порядку. Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння. Початкові умови. Загальний розв'язок, частинний розв'язок.

26. Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.
27. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.
28. Диференціальні рівняння вищих порядків. Теорема про існування і єдиність розв'язку. Початкові умови. Загальний розв'язок, частинний розв'язок.
29. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод побудови фундаментальної системи розв'язків.
30. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду.
31. Функція оригінал. Перетворення Лапласа.
32. Властивості перетворення Лапласа: лінійність, теорема подібності, теорема запізнювання, теорема зміщення, диференціювання оригіналу, диференціювання зображення, інтегрування оригіналу, інтегрування зображення, теорема множення (теорема про згортку).
33. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь та їх систем зі сталими коефіцієнтами операторним методом.

1.3 ПЕРЕЛІК ТИПОВИХ ЗАДАЧ ДО ІСПИТУ

1. Знайти похідні функцій: 1) $y = a \cdot x^m - b \sqrt[n]{x^k} + \frac{c}{x^n}$ 2) $y = \frac{2x - \operatorname{tg} 3x}{\sqrt{\sin x + 11}}$;
 3) $y = \operatorname{arctg}(7x) \cdot e^{\cos 5x}$; 4) $y = \log_2(\arcsin 6x)$; 5) $y = 5^{\sin^2(3x)}$;
 6) $y = \operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{2-x^2}\right)$; 7) $y = 3^{x \cdot \ln x}$; 8) $y = \sqrt[3]{2e^x + 2^x + 1} + \ln^5 x$; 9) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.
2. Знайти екстремуми функцій: 1) $y = \frac{9x^2 - 2x}{9x^2 - 2x + 4}$; 2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x - 12}$.
4. Написати рівняння асимптот до графіка функцій: 1) $y = \frac{x^2 - 3x}{2x - 4}$;
 2) $y = \frac{2x^2 - 4x}{2x - 3}$; 3) $y = \frac{4 - x^2}{x^2 + 4}$.

5. Знайти повні диференціали функцій: 1) $z = 5\frac{x^4}{y} + 2\frac{x}{y^3} + \cos(x^5 \cdot y)$;

2) $z = 3x^4 y^3 + 2xy^6 + \frac{1}{x^3} - 2$; 3) $z = 5\frac{y}{x^2} + 2x + 3\sqrt[4]{y}$.

6. Обчислити значення і напрям градієнта функції $u(x; y; z)$ у заданій точці M : $u = x^4 y^3 z - 2y z^4$; $M(1; 1; 1)$.

7. Дослідити на екстремум функції: 1) $z = 6x^2 + 6y^2 - 4xy$;

2) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 4y$; 3) $z = 4x^3 + 4y^3 - 12xy - 2$.

8. Знайти невизначені інтеграли:

а) методом заміни змінної або методом введення під диференціал:

1) $\int (6x - 2)^3 dx$; 2) $\int \frac{x dx}{x^2 - 3}$; 3) $\int x \cdot \sqrt{4 + x^2} dx$; 4) $\int x^4 \cdot \sin(x^5) dx$;

5) $\int \frac{\arcsin(6x)}{\sqrt{1 - 36x^2}} dx$; 6) $\int \frac{\arctg^6(4x)}{1 + 16x^2} dx$; 7) $\int \frac{\ln^3(4x)}{x} dx$;

8) $\int \sin(4x) \cdot \cos^3(4x) dx$; 9) $\int \frac{x^5}{1 + x^{12}} dx$; 10) $\int \frac{\sin(4x) dx}{25 + \cos^2(4x)}$;

б) методом інтегрування частинами:

1) $\int (3x - 2) \cdot \sin(4x) dx$; 2) $\int (6x - 3) \cdot \cos(x) dx$; 3) $\int (3x + 5) \cdot e^{-3x} dx$;

г) від раціональних дробів: 1) $\int \frac{4dx}{(x+4)(x-3)(x-1)}$; 2) $\int \frac{x-1}{x^2 - 4x + 20} dx$;

д) від тригонометричних функцій: 1) $\int \sin x \cdot \cos 4x dx$;

2) $\int \sin 2x \cdot \sin 4x dx$; 3) $\int \cos 3x \cdot \cos 5x dx$; 4) $\int \cos^2(2x) dx$; 5) $\int \sin^2(3x) dx$;

6) $\int \sin^2(2x) \cdot \cos^2(2x) dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x) \cdot \cos^2(3x)}$;

е) від ірраціональних дробів: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}$; 2) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$.

9. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями:

1) $y = 6x^2$, $y = 12 - 6x^2$; 2) $y = x^2 - 8x$, $y = 4x$; 3) $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

10. Знайти область збіжності степеневих рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{3^{n+1}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+5)^n}{2n+1}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-5)^n}{(n+1)7^n}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{(n+1)^2 7^n}$.

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 (x-1)^n}{n^2 4^n} \cdot 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(2\sqrt{n}+1)5^n} \cdot 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{(2n^3+1)4^n}.$$

11. Розкласти в ряд Фур'є:

1) по косинусах функцію $f(x) = x - 2$, що задана на відрізку $[0, 2]$.

2) по косинусах функцію $f(x) = x - \pi$, що задана на відрізку $[0, \pi]$.

3) по синусах функцію $f(x) = x - 5$, що задана на відрізку $[0, 5]$.

4) по синусах функцію $f(x) = x - \pi$, що задана на відрізку $[0, \pi]$.

5) по синусах функцію $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$, що задана на відрізку $[0, 2]$.

12. Зобразити інтегралом Фур'є задану функцію $y = f(x)$ та побудувати її графік.

$$1) \quad y = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (a > 0) \qquad 2) \quad y = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$3) \quad y = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & x \in (-\infty; 0) \cup (\pi; \infty). \end{cases} \qquad 4) \quad y = \begin{cases} 2, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

13. Розв'язати задачу Коші:

$$1) \quad y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0; \quad 2) \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1; \quad 3) \quad y' - \frac{y}{x} = xe^x, y(1) = 0;$$

$$4) \quad y' - \frac{y}{x} = x^5, y(1) = 0; \quad 5) \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$6) \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}, y(1) = 1; \quad 7) \quad y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3};$$

$$8) \quad y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$9) \quad y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}; \quad 10) \quad y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$$

14. Знайти загальний або частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$1) \quad y'' - y' = 2(1-x); \quad y(0) = y'(0) = 1;$$

$$2) \quad y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3); \quad y(0) = y'(0) = 2;$$

$$3) \quad y'' + y = -\sin 2x; \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1;$$

$$4) \quad y'' - 4y' + 3y = e^{5x}; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 9;$$

$$5) \quad y'' - 8y' + 16y = e^{4x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1;$$

$$6) y'' - 3y' + 2y = 2e^x. \quad 7) y'' - 5y' = 2x + 3;$$

$$8) y'' - 6y' + 5y = e^x; \quad 9) y'' - 3y' = x + 1;$$

$$10) y'' + 3y' = 5x - 11; \quad 11) y'' - 3y' + 2y = 7e^x.$$

15. Знайти оригінал за заданим зображенням.

$$1) \frac{15p-1}{(p+2)(p^2-2p+2)}; \quad 2) \frac{3p+2}{(p-1)(p^2+p+1)};$$

$$3) \frac{p+1}{(p^2-4)(p^2+9)}; \quad 4) \frac{p-1}{(p+1)(p^2+4p+5)};$$

$$5) \frac{1-p}{p^3(p^2-9)}; \quad 6) \frac{4p-5}{(p-2)(p^2+4p+5)}.$$

16. Методом операційного числення розв'язати диференціальне рівняння з заданими початковими умовами.

$$1) x'' + 3x' + 2x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$2) x'' - 3x' + 2x = e^{5t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2;$$

$$3) x'' + 4x' + 29x = e^{-2t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$$

$$4) x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0;$$

$$5) x'' - 3x' + 2x = te^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2;$$

$$6) x'' + x' - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$$

Література

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1978. - 624с
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.-М.: Наука, 1975. – 548 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.-М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – к.: Либідь, 2003. –Кн. 1. Основні розділи /Призва Г.Й. та ін. – 400 с.
5. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.О. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Тести.– Харків: ХНУРЕ, 2016.– 256с. (512(07)К49).

6. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної. – Конспект лекцій. Тести.– Харків: ХНУРЕ, 2018.–280с. (517(07)К49).
7. Дорошенко В.О., Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Операційне числення. Тексти лекцій. Комп'ютерні індивідуальні завдання. .– Харків: ХНУРЕ, 2018.–122с. (512(07)Д69).
8. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. Ч.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної» – ХНУРЕ, 2018. – 268 с. (517 (07) П-61).
9. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 196 с. (517 (07) П-61).
10. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Посібник для розв'язування задач з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2020.– 340 с. (517 (07) П-61).
11. Бутенко Н.С. Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Стислий довідник з вищої математики – ХНУРЕ, 2018.

Електронний документ

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ЗАПИТАННЯ

з навчальної дисципліни ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів денної форми навчання
освітньої програми «Інформаційно-мережна інженерія
(прискорена форма навчання)»

Упорядник Бутенко Ніна Семенівна

Відповідальний випусковий О.Г. Нерух

Авторська редакція