

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки
Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра вищої математики

КОМПЛЕКС НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ
навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

підготовки бакалавра
спеціальності 172 – «Телекомунікації та радіотехніка»
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Розробник: Н.П. Стогній, доц. каф. ВМ, к.ф.-м.н.

Схвалено на засіданні кафедри ВМ

Протокол № 2 від 4 жовтня 2017 р.

ХАРКІВ 2017

ЗМІСТ

1.	Робоча програма.....	3
2.	Анотації навчальних посібників	24
3.	Методичні вказівки до самостійної роботи.....	38
4.	Методичні вказівки до практичних занять	
	Частина 1.....	74
	Частина 2.....	169
5.	Методичні вказівки до контрольних завдань.....	248
6.	Екзаменаційні запитання.....	284

Харківський національний університет радіоелектроніки

Кафедра вищої математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Декан факультету ІК

А.В. Снігуров
(підпис, прізвище, ініціали)
«___» _____ 2017 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Вища математика

(шифр і назва навчальної дисципліни)

спеціальність 172 – Телекомунікації та радіотехніка

(шифр і назва спеціальності)

спеціалізація _____

(назва спеціалізації)

напрямок (освітня програма) підготовки телекомунікації, інформаційно-мережна інженерія, інфокомунікаційна інженерія

(назва напрямку (освітньої програми))

факультет інфокомунікацій

(назва факультету)

Харків 2017 р.

Робоча програма з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання за спеціальністю 172 – «Телекомунікації та радіотехніка» освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія».

«___» _____, 2017, – 21 с.

Розробник:

Н.П. Стогній, доц. каф. ВМ, к.ф.-м.н.

Робочу програму схвалено на засіданні кафедри вищої математики

Протокол № ____ від «___» _____ 2017 р.

Завідувач кафедри ВМ

(підпис)

О.Г. Нерух

«___» _____ 2017 р.

Схвалено методичною комісією факультету інфокомунікацій

Протокол № ____ від «___» _____ 2017 р.

Голова методичної комісії

(підпис)

А.І. Костромицький
(ініціали, прізвище)

«___» _____ 2017 р.

© Стогній Н.П., 2017

© ХНУРЕ, 2017

1 ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	
Кількість кредитів ЄКТС - 12	Галузь знань: Електроніка та телекомунікації	Нормативна	
	Напрями підготовки: 1) телекомунікації; 2) інформаційно-мережна інженерія; 3) інфокомунікаційна інженерія		
Модулів - 5	Спеціальність: 172 – Телекомунікації та радіотехніка	Рік підготовки:	
Змістових модулів – 10		1-й	
Індивідуальних завдань: ІДЗ та КР – 5+2		Семестр	
Загальна кількість годин - 360		1-й	2-й
		Кількість годин	
		210	150
		Аудиторні: 1) лекції, год	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4,24 самостійної роботи студента – 5,53		Освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр	44
	2) практичні, год		
	40		30
	3) лабораторні, год		
	-		-
	4) консультації, год		
	14+2		10+2
	Самостійна робота, год		
	110		78
	в тому числі: 1) ІДЗ та КР, год.		
	14		10
	2) курсова робота, год		
-	-		
Вид контролю: комб. іспит			

Примітки

1. Співвідношення кількості годин аудиторних занять до загальної кількості годин (%) для денної форми навчання становить 47%.
2. В розклад занять не введені консультації, тому вони проводяться викладачем згідно графіку консультацій кафедри поза розкладом. Перед іспитом введені 2 год консультацій.

2 МЕТА І ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета курсу вищої математики – оволодіння та засвоєння студентами математичних знань та вмінь, необхідних для професійної підготовки.

Завдання дисципліни:

- оволодіти основними методами дослідження і розв'язування математичних задач;
- розвинути логічне та алгоритмічне мислення студентів;
- розвинути навички використання математичних методів дослідження під час підготовки курсових та дипломних робіт;
- виховати у студентів уміння самостійно поширювати свої математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних інженерних задач;
- підготувати студентів до науково-дослідної роботи, розробки та аналізу математичних моделей, застосування математичних методів під час розв'язування конкретних завдань відповідної галузі.

Для реалізації мети та завдання курсу студент повинен опанувати основні методи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу, тобто вільно розв'язувати задачі середньої складності та добре диференціювати і інтегрувати функції. Ці вміння та навички дадуть можливість добре засвоїти теоретичні і практичні основи теорії рядів, операційного числення, кратних інтегралів, тобто розділів курсу, які необхідні для подальшого навчання в технічному університеті.

У результаті вивчення навчальної дисципліни **студент повинен**

знати: поняття визначника, матриці, системи лінійних алгебраїчних рівнянь; поняття векторної алгебри; рівняння лінійних і квадратичних геометричних об'єктів; визначення функції; визначення границі функції; правила дії з функціями, що мають границі; правила розкриття невизначеностей; визначення похідної функції, диференціалу функції; таблицю похідних елементарних функцій; правила диференціювання; основні теореми для функцій, що мають похідну; правила Лопіталю; визначення первісної, невизначеного інтегралу, основні властивості невизначеного інтегралу, таблицю невизначених інтегралів; визначення визначеного інтегралу, формулу Ньютона-Лейбніца, основні властивості визначеного інтегралу; комплексні числа і дії над ними; основні методи розв'язання геометричних і фізичних за допомогою визначеного інтегралу; поняття невластивого інтегралу першого та другого родів; поняття подвійного інтегралу і зведення його до повторних інтегралів; визначення збіжності числових рядів, основні ознаки збіжності; визначення області збіжності функціонального ряду; радіус збіжності степеневому ряду; розкладання основних елементарних функцій в степеневий ряд; поняття тригонометричного ряду Фур'є та методи розкладання функцій в такий ряд; поняття диференційного рівняння першого або вищого порядків; методи розв'язання лінійних диференційних рівнянь; поняття перетворення Лапласу; основні теореми операційного числення; розв'язання диференційних рівнянь операційним методом;

вміти: обчислювати визначники, виконувати дії з матрицями, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду; виконувати дії з векторами; розв'язувати геометричні задачі з прямою та площиною аналітичними засобами; обчислювати границі функції; вміти розкривати невизначеності; обчислювати похідну та диференціал функції; обчислювати границю за допомогою правила Лопіталю; знаходити первісну функції, обчислювати визначений інтеграл; виконувати дії з комплексними числами; застосовувати визначений інтеграл для розв'язання геометричних і фізичних задач; оцінювати збіжність невластивого інтегралу першого та другого родів; обчислювати подвійні інтеграли; визначати збіжність числових рядів за допомогою ознак збіжності; визначати область збіжності функціонального ряду; радіус збіжності степеневому ряду; розкладати функції в степеневий ряд; розкладати функцію в тригонометричний ряд Фур'є; розв'язувати диференційні

рівняння першого та вищих порядків; застосовувати операційне числення для розв'язання диференціальних рівнянь;

володіти (перелік сформованих компетенцій): методами розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду; методами аналітичної геометрії для розв'язання геометричних задач; методами математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох змінних; методами перетворень Лапласа для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, тобто методами основних розділів курсу, які необхідні для подальшого навчання в технічному університеті.

3 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

3.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

Змістовний модуль 0. Основні формули елементарної математики.

Змістовний модуль 1. Лінійна алгебра.

Тема 1. Визначники, їх властивості та обчислення.

Тема 2. Матриці, дії з матрицями. Ранг матриці.

Тема 3. Обернена матриця. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь в матричному виді. Формули і теорема Крамера.

Тема 4. Теорема Кронекера-Капеллі для систем лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду. Метод Гаусса.

Змістовний модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія.

Тема 1. Системи координат. Геометричні вектори. Розкладання вектора за базисом.

Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

Тема 2. Рівняння прямої на площині, загальне, з нормальним вектором, з направляючим вектором.

Тема 3. Площина у просторі. Загальне рівняння, відстань від точки до площини. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами. Умова паралельності та перпендикулярності площин. Рівняння площини у відрізках.

Тема 4. Пряма у просторі. Канонічні рівняння, параметричні рівняння. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Перехід від загального рівняння до канонічних. Відстань від точки до прямої.

Тема 5. Рівняння і властивості кривих другого порядку.

Змістовний модуль 3. Вступ до математичного аналізу. Теорія границь.

Тема 1. Послідовності. Границя послідовності. Число e . Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.

Тема 2. Функції. Екстремуми функції. Обернена функція. Неявна функція. Складена функція. Класи елементарних функцій.

Тема 3. Границя функції. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Арифметичні дії над функціями, що мають границю.

Тема 4. Неперервність функції. Типи розривів. Властивості неперервних функцій.

Тема 5. Порівняння функцій. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції. Перша та друга визначні границі.

Змістовний модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Тема 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної, їх геометричний та фізичний зміст. Правила диференціювання. Таблиця похідних.

Тема 2. Похідні і диференціали вищих порядків. Інваріантність форми першого диференціалу.

Тема 3. Основні теореми для диференційованих функцій: теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші. Правила Лопітала для розкриття невизначеностей в границях.

Тема 4. Екстремуми функції. Необхідна умова екстремуму. Достатня умова екстремуму за першою похідною та за похідними старшого порядку.

Тема 5. Випуклість функції. Точки перегину. Асимптоти функції. Дослідження функції і побудова її графіка.

Змістовний модуль 5. Невизначений інтеграл.

Тема 1. Первісна, її властивості. Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій. Заміна змінних, інтегрування частинами.

Тема 2. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій.

3.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

Змістовний модуль 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Тема 1. Функції багатьох (декількох) змінних. Область визначення. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал.

Тема 2. Властивості диференційованих функцій. Геометричний зміст частинних похідних і диференціалу. Дотична площина. Похідна за напрямком. Градієнт функції.

Тема 3. Частинні похідні і диференціали вищих порядків.

Тема 4. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідна і достатня умови екстремуму функції.

Змістовний модуль 2. Визначені та подвійні інтеграли.

Тема 1. Комплексні числа.

Тема 2. Визначений інтеграл, його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінних і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 3. Застосування визначеного інтегралу: площа плоскої фігури, об'єм тіла.

Тема 4. Невласні інтеграли першого і другого родів. Ознаки абсолютної збіжності невластивого інтегралу.

Тема 5. Подвійні інтеграли. Зведення подвійного інтегралу до повторних. Заміна змінних в подвійних інтегралах. Перехід до полярних координат.

Змістовний модуль 3. Ряди.

Тема 1. Числові ряди. Необхідна умова збіжності ряду. Властивості рядів, що сходяться. Ознаки збіжності рядів з додатними членами. Знакопочережні ряди. Абсолютно і умовно збіжні ряди.

Тема 2. Функціональні ряди. Степеневі ряди, радіус збіжності степеневих рядів.

Тема 3. Тригонометричні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є. Ряд Фур'є для функції, заданої на довільному періоді. Ряд Фур'є для функції, заданої на півперіоді.

Тема 4. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є.

Змістовний модуль 4. Звичайні диференціальні рівняння.

Тема 1. Визначення диференціального рівняння, його загального і часткового розв'язку. Розв'язок спеціальних типів рівнянь першого порядку: зі змінними, що розділяються, лінійні рівняння та рівняння Бернуллі.

Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) n -го порядку. Принцип суперпозиції.

Тема 3. Однорідні ЛДР. Лінійно незалежна система розв'язків. Фундаментальна система розв'язків ЛДР.

Тема 4. Неоднорідні ЛДР. Підбір розв'язку за видом правої частини.

Змістовний модуль 5. Операційне числення.

Тема 1. Перетворення Лапласа. Зображення основних елементарних функцій. Властивості перетворення Лапласа.

Тема 2. Відновлення оригіналу.

Тема 3. Застосування операційного числення для розв'язання диференціальних рівнянь.

4 СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

4.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма)					
	Усього	у тому числі				
		л	пз	лб	конс	с.р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1						
Змістовний модуль 1. Лінійна алгебра						
Тема 1. Визначники, їх властивості та обчислення.	8	2	2			4
Тема 2. Матриці, дії з матрицями. Ранг матриці.	7	2	2			3
Тема 3. Обернена матриця. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь в матричному виді. Формули і теорема Крамера.	6	2	1			3
Тема 4. Теорема Кронекера-Капеллі для систем лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду. Метод Гаусса.	10	2	1		2	5
Усього годин за зміст. мод. 1	31	8	6		2	15
Змістовний модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія						
Тема 1. Системи координат. Геометричні вектори. Розкладання вектора за базисом. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.	11	4	2			5
Тема 2. Рівняння прямої на площині, загальне, з нормальним вектором, з направляючим вектором.	5					5
Тема 3. Площина у просторі. Загальне рівняння, відстань від точки до площини. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами. Умова паралельності та перпендикулярності площин. Рівняння площини у відрізках.	8	2	2			4
Тема 4. Пряма у просторі. Канонічні рівняння, параметричні рівняння. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Перехід від загального рівняння до канонічних. Відстань від точки до прямої.	8	2	2			4
Тема 5. Рівняння і властивості кривих другого порядку.	7				2	5
Усього годин за зміст. мод. 2	39	8	6		2	23
Усього годин за мод. 1	70	16	12		4	38
Модуль 2						
Змістовний модуль 3. Вступ до математичного аналізу. Теорія границь						
Тема 1. Послідовності. Границя послідовності. Число ϵ . Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.	6	2	1			3
Тема 2. Границя функції. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Арифметичні дії	16	3	5		2	6

над функціями, що мають границю.						
Тема 3. Неперервність функції. Типи розривів. Властивості неперервних функцій.	10	3	2			5
Тема 4. Порівняння функцій. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції. Перша та друга визначні границі.	11	3	2			6
Усього годин за зміст. мод. 3	43	11	10		2	20
Змістовний модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної						
Тема 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідні і диференціали вищих порядків.	17	4	5		2	6
Тема 2. Основні теореми для диференційованих функцій: теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші. Правила Лопіталю для розкриття невизначеностей в границях.	13	3	3		2	5
Тема 3. Екстремуми функції. Випуклість функції. Точки перегину. Асимптоти функції. Дослідження функції і побудова її графіка.	7					7
Усього годин за зміст. мод. 4	37	7	8		4	18
Усього годин за мод. 2	80	18	18		6	38
Модуль 3						
Змістовний модуль 5. Невизначений інтеграл						
Тема 1. Первісна, її властивості. Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій. Заміна змінних, інтегрування частинами.	15	3	4			8
Тема 2. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій.	27	7	4		4	12
Усього годин за зміст. мод. 5	42	10	8		4	20
Усього годин за мод. 3	42	10	8		4	20
Індивідуальні домашні завдання, контрольні роботи та консультації перед іспитом						
ІДЗ №1 «Лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія»	4					4
ІДЗ №2 «Границя функції. Диференціювання функцій однієї змінної»	4					4
ІДЗ №3 «Невизначений інтеграл»	4					4
Контрольна робота №1	4		2			2
Консультації перед іспитом	2				2	
Усього годин за 1-й семестр	210	44	40		16	110

4.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма)					
	Усього	у тому числі				
		л	пз	лб	конс	с.р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1						
Змістовний модуль 1. Комплексні числа. Диференціальне числення функцій багатьох змінних						
Тема 1. Комплексні числа.	7	2	2			3
Тема 2. Функції багатьох (декількох) змінних. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал.	7	1	2			4
Тема 3. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Екстремум функції багатьох змінних.	6	2	1		1	2
Тема 4. Геометричний зміст частинних похідних і диференціалу. Дотична площина. Похідна за напрямком. Градієнт функції.	7	2	1		1	3
Усього годин за зміст. мод. 1	27	7	6		2	12
Змістовний модуль 2. Визначені та подвійні інтеграли						
Тема 1. Визначений інтеграл, його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінних і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.	5	1	1			3
Тема 2. Застосування визначеного інтегралу: площа плоскої фігури, об'єм тіла.	6	2	1			3
Тема 3. Невласні інтеграли першого і другого родів. Ознаки абсолютної збіжності невластного інтегралу.	3	1				2
Тема 4. Подвійні інтеграли. Зведення подвійного інтегралу до повторних. Заміна змінних в повторних інтегралах. Перехід до полярних координат.	15	3	4		2	6
Усього годин за зміст. мод. 2	29	7	6		2	14
Усього годин за мод. 1	56	14	12		4	26
Модуль 2						
Змістовний модуль 3. Ряди						
Тема 1. Числові ряди. Необхідна умова збіжності ряду. Властивості рядів, що сходяться. Ознаки збіжності рядів з додатними членами. Знакопозаперечні ряди. Абсолютно і умовно збіжні ряди.	9	2	3			4
Тема 2. Функціональні ряди. Степеневі ряди, радіус збіжності степеневих рядів.	7	2	1			4
Тема 3. Тригонометричні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є. Ряд Фур'є для функції, заданої на довільному періоді. Ряд Фур'є для функції, заданої на півперіоді.	11	2	2		2	5

Тема 4. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є.	6					6
Усього годин за зміст. мод. 3	33	6	6		2	19
Змістовний модуль 4. Звичайні диференціальні рівняння						
Тема 1. Визначення диференціального рівняння, його загального і часткового розв'язку. Розв'язок спеціальних типів рівнянь першого порядку: зі змінними, що розділяються, лінійні рівняння та рівняння Бернуллі	8	2	2			4
Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) другого порядку. Однорідні ЛДР. Лінійно незалежна система розв'язків.	4	1	1			2
Тема 3. Неоднорідні ЛДР. ЛДР з постійними коефіцієнтами, побудова фундаментальної системи розв'язків. Підбір розв'язку за видом правої частини.	10	2	1		2	5
Усього годин за зміст. мод. 4	22	5	4		2	11
Змістовний модуль 5. Операційне числення						
Тема 1. Перетворення Лапласа. Зображення основних елементарних функцій. Властивості перетворення Лапласа.	7	2	2			3
Тема 2. Відновлення оригіналу.	8	2	2			4
Тема 3. Застосування операційного числення для розв'язання диференціальних рівнянь.	10	1	2		2	5
Усього годин за зміст. мод. 5	25	5	6		2	12
Усього годин за мод. 2	80	16	16		6	42
Індивідуальні домашні завдання, контрольні роботи та консультації перед іспитом						
ІДЗ №1 «Комплексні числа. Функції багатьох змінних. Визначені та подвійні інтеграли»	4					4
ІДЗ №2 «Ряди. Диференціальні рівняння та операційне числення»	4					4
Контрольна робота №1	4		2			2
Консультації перед іспитом	2				2	
Усього годин за 2-й семестр	150	30	30		12	78

5 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ (СЕМІНАРСЬКИХ) ЗАНЯТЬ

5.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

№	Назва теми	Кількість годин
1	Обчислення визначників	2
2	Матриці та дії з ними. Обернена матриця	2
3	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	2
4	Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів	2
5	Пряма та площина у просторі	2
6	Взаємне розташування прямої та площини	2
7	Обчислення границі функції	6
8	Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції	2
9	Неперервність функції. Точки розриву	2
10	Обчислення похідної функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна функції, заданої неявно чи параметрично. Диференціал функції	4
11	Похідні та диференціали вищих порядків	2
12	Правило Лопіталя	2
13	Невизначений інтеграл. Заміна змінних	2
14	Інтегрування частинами	2
15	Інтегрування раціональних функцій	2
16	Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій	2
17	Контрольна робота №1	2
Загальна кількість		40

5.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

№	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексні числа	2
2	Функція багатьох змінних. Область визначення. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал. Похідні вищих порядків.	2
3	Дотична площина і нормаль. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Екстремум функції двох змінних	2
4	Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. Невласні інтеграли	1
5	Застосування визначеного інтегралу. Обчислення площі плоскої фігури (в декартовій системі координат)	1
6	Обчислення подвійних інтегралів в декартовій системі координат	2
7	Заміна змінних в подвійному інтегралі	2
8	Числові ряди. Ряди з додатними членами	2
9	Знакозмінні та знакопозадовні ряди	1
10	Функціональні та степеневі ряди. Область збіжності	1
11	Розкладання 2π -періодичної функції в ряд Фур'є	2
12	Диференціальні рівняння (ДР) I-го порядку (з розділюючими та розділеними змінними, лінійні рівняння та рівняння Бернуллі)	2
13	Однорідні лінійні ДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	1
14	ДР зі спеціальною правою частиною	1
15	Основні властивості перетворення Лапласа	2
16	Відновлення оригіналу за заданим зображенням	2
17	Розв'язання диференціальних рівнянь операційним методом	2
18	Контрольна робота №1	2
Загальна кількість		30

6 ТЕМИ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин	
1			
	Загальна кількість		

7 САМОСТІЙНА РОБОТА

7.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

№	Назва теми	Кількість годин
1	Вивчення теоретичного матеріалу з використанням конспектів і навчальної літератури	32
2	Підготовка до практичних занять	42
3	Підготовка до контрольної роботи № 1	2
4	Виконання індивідуальних домашніх завдань № 1, 2, 3	12
5	Вивчення теоретичного матеріалу та виконання практичних завдань додаткових тем за навчальною літературою: 1) «Пряма на площині»; 2) «Криві другого порядку».	5 5
6	Вивчення за навчальною літературою теми «Дослідження функцій і побудова їх графіків за допомогою похідних»	7
7	Вивчення за навчальною літературою теми «Інтегрування диференціальних біномів»	5
	Загальна кількість	110

7.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

№	Назва теми	Кількість годин
1	Вивчення теоретичного матеріалу з використанням конспектів і навчальної літератури	27
2	Підготовка до практичних занять	33
3	Підготовка до контрольної роботи № 1	2
4	Виконання індивідуальних домашніх завдань № 1, 2	8
5	Вивчення за навчальною літературою теми «Застосування визначених інтегралів у фізиці»	2
6	Вивчення за навчальною літературою теми «Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є»	6
	Загальна кількість	78

8 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

8.1 Індивідуальні домашні завдання (ІДЗ) та контрольні роботи (КР)

№	Назва теми	Кількість годин
Частина 1		1-й сем.
1	ІДЗ №1 «Лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія» ([1], стор. 385-402, ІДЗ №2, задачі 1-5 (№1 – трьома способами); стор. 367-384, ІДЗ №1, задачі 1, 7, 8 (№7 – без рисунка))	4
2	ІДЗ №2 «Границя функції. Диференціювання функцій однієї змінної» ([1], стор. 427-442, ІДЗ №4, задачі 3-5; стор. 442-456, ІДЗ №5, задачі 1, 3)	4
	ІДЗ №3 «Невизначений інтеграл» ([2], стор. 291-298, ІДЗ №1, задача 1 (а-е, ж, з))	4
3	Контрольна робота № 1	2
	Загальна кількість	14
Частина 2		2-й сем.
1	ІДЗ №1 «Комплексні числа. Функції багатьох змінних. Визначені та подвійні інтеграли» ([2], стор. 312-317, ІЗ №2, задачі 1, 2, 4; [7], стор. 157-163, ІДЗ №13-1, задачі 1-4; [4], стор. 190-196, ІЗ №5.1, задачі 3, 4)	4
2	ІДЗ №2 «Ряди. Диференціальні рівняння та операційне числення» ([7] стор. 47-61, ІДЗ №12-1, задачі 2-8; стор. 65-71, ІДЗ №12-2, задачі 1, 3; стор. 89-107, ІДЗ №12-3, задача 1; [3], стор. 452-463, ІЗ №1, задачі 1(а, в, г), 4, 5; [4], стор. 204-211, ІЗ №5.3, задачі 1-3)	4
3	Контрольна робота № 1	2
	Загальна кількість	10

8.2 Курсова робота

9. МЕТОДИ НАВЧАННЯ

Основні методи навчання – пояснювально-ілюстративний (лекція), практичний (проведення практичних занять), перевірка знань та умінь (за результатами контрольних робіт, контрольних завдань), робота з навчально-методичною літературою (самостійне опрацювання заданих розділів, виконання ІДЗ тощо).

10 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ ТА РЕЙТИНГОВА ОЦІНКА ЗА ДИСЦИПЛІНОЮ

Рейтингова оцінка за семестр є накопичувальною – підсумовуються бали за кожний модуль, передбачений у семестрі.

Кожний модуль включає наступні **контрольні заходи**:

- виконання індивідуального домашнього завдання;
- поза аудиторна самостійна робота (вивчення додаткових тем за літературними джерелами тільки в тих модулях, які передбачені робочою програмою);
- аудиторна контрольна робота.

Кількість балів за кожний вид роботи визначається у кожному модулі окремо. Нижня границя за семестр становить 60 балів, а максимальна – 100. Дисципліна вважається

вивченою студентом за умови отримання мінімального рейтингового балу в кожній контрольній точці.

Як форма підсумкового контролю для дисципліни ВМ використовується комбінований іспит. При цьому виді контролю підсумкова оцінка P_{π} обчислюється за формулою: $P_{\pi} = 0,6 \cdot O_{\text{сем}} + 0,4 \cdot O_{\text{ісп}}$, де $O_{\text{сем}}$ – оцінка за семестр у 100-бальній системі, $O_{\text{ісп}}$ – оцінка за іспит у 100-бальній системі.

Білет для іспиту складається з двох теоретичних запитань та трьох задач. Теоретичні запитання та кожна задача оцінюються в 20 балів (в сумі – 100 балів).

Комбінований іспит передбачає поєднання таких видів роботи як письмову відповідь на екзаменаційний білет і/або тест (комп'ютерний/бланковий) та усну відповідь екзаменатору.

Критерії оцінки виконання екзаменаційних завдань

Кількісні критерії оцінювання

Практичні та теоретичні завдання оцінюються за критеріями:

- «відмінно» (90-100) – студент безпомилково розв'язав всі задачі й відповів на теоретичні питання, привів всі докази теорем і формул, виявив систематичні та глибокі знання навчального матеріалу, засвоїв взаємозв'язок основних понять дисципліни та їх значення для подальшої професійної діяльності;
- «добре» (75-89) – студент вирішив всі задачі й відповів на теоретичні питання, але доказ дав тільки в схематичному вигляді або відповів тільки на чотири завдання, студент виявив загалом добрі знання навчального матеріалу при виконанні передбачених програмою завдань, але допустив ряд помітних помилок;
- «задовільно»:
 - бали в діапазоні 66-74 – студент виконав тільки три завдання й відповів частково на інші, виявив знання основного навчального матеріалу, припустив значну кількість помилок або недоліків у відповіді на запитання;
 - бали в діапазоні 60-65 – студент виконав тільки три завдання й відповів частково на інші, виявив знання основного навчального матеріалу в мінімальному обсязі, припустив помилки, які він може усунути лише під керівництвом та за допомогою викладача.
- «незадовільно»:
 - бали в діапазоні 35-59 – студент виконав більше, ніж півтора завдання, але менше трьох завдань, студент мав значні прогалини в знаннях основного навчального матеріалу, допускав принципові помилки;
 - бали в діапазоні 1-34 – студент не мав знань зі значної частини навчального матеріалу, допускав принципові помилки.

Відповідь оцінюється з коефіцієнтом, що розроблений екзаменатором.

Якісні критерії оцінювання знань та вмінь

«Задовільно» (60-74). Показати необхідний мінімум теоретичних знань (означення, формулювання теорем, формули). Знати методи розв'язування практичних завдань та вміти застосовувати їх на практиці.

«Добре» (75-89). Твердо знати теоретичні питання, але доказ тільки в схематичному виді. Показати вміння розв'язувати практичні завдання та обґрунтовувати всі етапи запропонованого розв'язання.

«Відмінно» (90-100). Показати повні знання основного та додаткового теоретичного матеріалу. Безпомилково розв'язати практичні завдання, пояснити та обґрунтувати обраний метод розв'язання.

Кількісні та якісні критерії оцінювання за семестрами

10.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

10.1.1 Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Для оцінювання роботи студента протягом 1-го семестру підсумкова рейтингова оцінка

$O_{\text{сем}}$ розраховується наступним чином:

№	Вид заняття / контрольний захід	Оцінка
1.	ІДЗ №1 «Лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія»	5...9
2.	Самостійне вивчення «Пряма на площині»	2,5...4
3.	Самостійне вивчення «Криві другого порядку»	2,5...4
Контрольна точка 1		10...17
1.	ІДЗ №2 «Границя функції. Диференціювання функцій однієї змінної»	6...10
2.	Самостійне вивчення «Дослідження функцій і побудова їх графіків за допомогою похідних»	3...5
3.	Контрольна робота №1	33...55
4.	ІДЗ №3 «Невизначений інтеграл»	6...10
5.	Самостійне вивчення «Інтегрування диференціальних біномів»	2...3
Контрольна точка 2		50...83
Всього за 1-й семестр		60...100

10.1.2 Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань та умінь для одержання позитивної оцінки.

ЗНАТИ:

- матриці та їх властивості;
- визначник квадратної матриці та способи його обчислення;
- вектори на площині та в просторі, операції над ними;
- способи задання прямої на площині, в просторі;
- поверхні в просторі;
- визначення границі функції в точці, правила граничного переходу, першу та другу особливі границі;
- визначення похідної функції в точці, диференціала функції, таблицю похідних елементарних функцій, правила диференціювання;
- невизначений інтеграл, таблицю інтегралів та основні методи інтегрування.

ВМІТИ:

- виконувати дії з матрицями, знаходити матрицю, обернену даній, та ранг матриці;
- розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь;
- виконувати лінійні операції над векторами, які задані в координатній формі;
- знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та використовувати їх для обчислювання кутів, проекцій, площ трикутників та паралелограмів;
- обчислювати відстань між точками, від точки до площини та прямої, між площиною та прямою;
- визначати тип кривої чи поверхні другого порядку;
- володіти технікою знаходження границі функції;
- диференціювати функції, розв'язувати задачі прикладного характеру;
- обчислювати невизначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами;
- інтегрувати найпростіші дробі, раціональні, ірраціональні та тригонометричні функції.

Критерії оцінювання знань та умінь студента протягом 1-го семестру

«Задовільно» (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Знати таблицю еквівалентних н.м. функцій, першу та другу особливі границі, таблицю похідних. Уміти виконувати дії з матрицями та знаходити скалярний, векторний та мішаний добуток векторів, які задані в координатній формі, обчислювати границі функції за допомогою таблиці еквівалентних н.м. функцій, диференціювати функції. Знати таблицю невизначених інтегралів. Уміти обчислювати невизначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами. Інтегрувати раціональні дробі у випадку простих та дійсних коренів знаменника.

«Добре» (75-89). Твердо знати мінімум, захистити всі індивідуальні завдання, виконати всі контрольні роботи та поза аудиторну самостійну роботу. Уміти: знаходити матрицю, обернену даній, та ранг матриці; розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь; використовувати вектори для обчислювання кутів, проекцій, площ трикутників та паралелограмів; обчислювати відстань між точками, від точки до площини та прямої, між площиною та прямою; володіти технікою знаходження границі функції; диференціювати функції; обчислювати невизначені інтеграли від різних класів функцій.

«Відмінно» (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

10.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

10.2.1 Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Для оцінювання роботи студента протягом 2-го семестру підсумкова рейтингова оцінка

$O_{\text{сем}}$ розраховується наступним чином:

№	Вид заняття / контрольний захід	Оцінка
1.	ІДЗ №1 «Комплексні числа. Функції багатьох змінних. Визначені та подвійні інтеграли»	9...15
	Контрольна точка 1	9...15
1.	Контрольна робота №1	30...50
2.	ІДЗ №2 «Ряди. Диференціальні рівняння та операційне числення»	12...20
3.	Самостійне вивчення «Застосування визначених інтегралів у фізиці»	4...7
4.	Вивчення за навчальною літературою теми «Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є»	5...8
	Контрольна точка 2	51...85
	Всього за 2-й семестр	60...100

10.2.2 Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань та умінь для одержання позитивної оцінки.

ЗНАТИ:

- комплексні числа і дії над ними;
- визначений інтеграл та методи його обчислення;
- невластні інтеграли першого та другого родів;
- подвійний і потрійний інтеграли, їх властивості;
- означення функції багатьох змінних, її часткові похідні та диференціали;
- часткові похідні складеної функції багатьох змінних;
- локальні та умовні екстремуми функції двох змінних;
- визначення збіжності числових рядів за допомогою достатніх ознак;
- функціональні ряди, область збіжності;
- степеневі ряди, інтервал та радіус збіжності;
- розкладання функцій в ряд Фур'є;
- розв'язання диференціальних рівнянь першого та вищих порядків;
- основні властивості операційного числення.

ВМІТИ:

- виконувати дії над комплексними числами;
- обчислювати визначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами;
- проводити обчислення площі плоскої фігури, довжину плоскої лінії, об'єм тіла;
- розв'язувати задачі фізики за допомогою інтегралів;
- обчислювати подвійні інтеграли в декартовій системі координат;
- знаходити часткові похідні та диференціали функції багатьох змінних;
- застосовувати часткові похідні для знаходження рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні;
- розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою часткових похідних;
- розкласти періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є;
- розв'язувати диференціальні рівняння методом підбору та операційним методом.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента протягом 2-го семестру

«Задовільно» (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Уміти знаходити модуль і аргумент комплексного числа. Уміти обчислювати визначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами. Проводити обчислення подвійних інтегралів у прямокутній системі координат. Знаходити часткові похідні функції багатьох змінних. Знати за якими формулами визначаються коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π . Вміти визначати коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π , яка задана графічно та складається з двох постійних частин. Вміти розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має спеціальний вигляд, методом невизначених коефіцієнтів та операційним методом (випадок, коли корені характеристичного рівняння дійсні та різні, а права частина така: $Qe^{\alpha t}$, де α не є коренем характеристичного рівняння).

«Добре» (75-89). Твердо знати мінімум, захистити всі індивідуальні завдання, виконати всі контрольні роботи та поза аудиторну самостійну роботу. Уміти: обчислювати визначені інтеграли від різних класів функцій; застосовувати інтегральне числення при розв'язанні задач геометрії; виконувати заміну змінних при обчисленні подвійних інтегралів; розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою часткових похідних; визначати область збіжності степеневих рядів; розкласти періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є в дійсній формі; використовувати властивості операційного числення для знаходження оригіналів, зображень та розв'язувати диференціальні рівняння операційним методом.

«Відмінно» (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
96–100	A	відмінно	зараховано
90–95	B		
75–89	C	добре	
66–74	D	задовільно	
60–65	E		
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	F	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

11 МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

11.1 Основна література

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с. (517 (07) T29)
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) B55).
3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с. (517 (07) B55).
4. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) B55).
5. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебн. пособие. в 3 ч. Ч.1. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 270 с. (517(07) C23).
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.2. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Вышейш. шк., 1991. – 351 с. (517(07) C23).
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Вышейш. шк., 1991. – 287 с. (517(07) C23).
8. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Х.: Компанія СМІТ, 2012.- 316 с. або: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 264 с. (512(07) K 49)
9. Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Курс лекцій з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – Харків: ХНУРЕ, 2004. – 184 с.(517(07) H 54)
10. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. — 6-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

11. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с.
12. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учеб. пос. — М.: Наука, 1985. — 392 с.
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2003. — 704 с.
14. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2004. — 720 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.-М.: Наука, 1975. — 548 с.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.-М.: Наука, 1976. — 576 с.
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т.1. 616 с., Т.2. 810 с., Т.3. 662с.
18. Вища математика: Підручник: У 2 кн. — К.: Либідь, 2003. — Кн. 1. Основні розділи /Призва Г.Й. та ін. — 400 с.
19. Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч. 1. - К.: Техніка, 2003. — 600 с. (517(07) О 35)
20. Элементы высшей математики для подготовчих відділень: Навч. посібник/ Упоряд.: В.В. Семенець, В.О. Дорошенко. Г.В. Сова. - Харків, ХНУРЕ, 2010. — 400с.
21. Интегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання: Навч. посібник/ Упоряд.: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва. — Харків: ХТУРЕ, 2012. — 280 с. (517(07) К 49)
22. Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Основні теоретичні відомості з курсу вищої математики. Тести.: Навч. посібник. — Харків: ХНУРЕ, 2013. — 450 с. (Клімова Н.П., Ремаєва О.А. Основные теоретические сведения по курсу высшей математики. Тесты.: Уч. пособие. — Харьков: ХНУРЭ, 2013. — 462 с.) (517(07) К 49)
23. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. — К.: А.С.К., 2001. —648 с.
24. Основні теоретичні відомості та завдання до підсумкового контролю з курсу вищої математики/Упоряд.: Н.П. Клімова, О.О. Ремаєва. — Харків, 2008. — 84с. (517(07) О 75)
25. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1981. —300 с.
26. Араманович И.Г., Лунц Г.Е., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1968. — 416 с.
27. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 400 с.
28. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1988. — 480 с.
29. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. —М.: Высшая школа, 1977. — 480 с.
30. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. —М.: Высшая школа, 1979. — 400 с.
31. Герасін С.М., Константінова Л.І., Лапта С.І., Конспект лекцій з теорії ймовірностей. — Харків: ХНУРЕ, 2007. — 100 с.

11.2 Допоміжна література

1. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Части I-V в 3-х книгах. — Харьков: ХГУ, К.1. 1967, 947 с., К.2. 1971, 130 с., К.3. 1974, 413 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров. — М.: Наука, 1986. — 723 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, Ч. I 304 с., Ч. II. 416 с.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и др. математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по курсу математического анализа. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.

11.3 Методичні вказівки до різних видів занять

1. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Основні формули з вищої математики та алгоритми розв'язування задач (Стислий довідник), Харків, ХНУРЕ, 2012. – 149 с.
2. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Збірник теорем, формул та алгоритмів розв'язування задач з вищої математики, Харків, ХНУРЕ, 2013. – 148 с.
3. Ружицька Н.М., Нерух О.Г., Бутенко Н.С. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія: Навч. посіб. – Харків : ХНУРЕ, 2015. – 232 с. (517(07) Р83)
4. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.2. Диференціальне і інтегральне числення функцій однієї змінної.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016.– 220 с. (517(07) М34)
5. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016. – 140 с. (517(07) М34)
6. Ружицька Н.М., Нерух О.Г., Бутенко Н.С. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2015. – 232 с. (517(07) Р83)
7. Ремаєва О.О., Кравченко Л.К. Інтегрування функцій однієї змінної (конспект лекцій та завдання для самостійної роботи) для студентів усіх форм навчання. – Харків: ХТУРЕ, 2006. – 130 с. (517(07) К 65)
8. Сова Г.В. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». Розділ «Диференціальне числення функцій багатьох змінних». – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 126 с.
9. Сова Г.В., Дорошенко В.А. Лекції з дисципліни «Вища математика». Розділ «Інтегральне числення функцій багатьох змінних». – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 126 с.
10. Константинова Л.І., Сова Г.В., Колесников Д.О. Тексти лекцій з теорії рядів. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – 127 с. (В-3487 ВМ)
11. Дорошенко В.О., Зуєв М.Г., Титаренко О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тексти лекцій. – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 112 с. (517(07) З 43)
12. Дорошенко В.О., Зуєв М.Г., Титаренко О.М. Вища математика для студентів-заочників. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 344 с. (ISBN 978-966-659-194-7)
13. Російсько-український математичний словник. Навч. посібник/ Упоряд.: Сова Г.В. - Харків: ХТУРЕ, 2000. – 128 с.
14. Ічко Т.В., Бутенко Н.С., Кравченко Л.К., Чумак О.В. Завдання для самостійної роботи студентів з курсу вищої математики для 1-го семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2000. – 28 с.
15. Чумак О.В., Лапта С.І., Бутенко Н.С. Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів з курсу вищої математики. Тема «Числові та функціональні ряди». - Харків: ХТУРЕ, 2002. – 76 с.
16. Дидактичні матеріали та індивідуальні завдання до теми «Диференціальні рівняння». / Упоряд.: – Бутенко Н.С., Дорошенко В.О., Ремаєва О.О. - Харків, ХТУРЕ, 2000. – 52 с.
17. Чумак О.В., Лапта С.І. Завдання для рейтингових контрольних робіт з курсу вищої математики для другого семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2001. – 64 с.

18. Чумак О.В., Лапта С.І., Бутенко Н.С. Завдання для рейтингових контрольних робіт з курсу вищої математики для третього семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2001. – 80 с.

12 ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Комп'ютерні тести в системі OpenTEST2

- 1.1 Лінійна алгебра та аналітична геометрія (150 запитань).
- 1.2 Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної (150 запитань).
- 1.3 Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних (120 запитань).
- 1.4 Числові та функціональні ряди. Інтеграл Фур'є (100 запитань).
- 1.5 Диференціальні рівняння та операційне числення (100 запитань).

2. Електронна бібліотека

- 2.1 Електронна бібліотека ХНУРЕ (<http://lib.nure.ua/el-katalog>)
- 2.2 Електронні навчально-методичні комплекси ХНУРЕ (<http://lib.nure.ua/enmk>)
- 2.3 Електронні бібліотеки України (<http://library.kr.ua/libworld/elib.html>)

АНОТАЦІЇ НАВЧАЛЬНИХ ПОСІБНИКІВ

Для допомоги майбутнім інженерам оволодіти елементами вищої математики колектив викладачів кафедри, враховуючи досвід роботи зі студентами, пропонує навчальні посібники для самостійного навчання. Ці навчальні посібники розроблені до кожного розділу і складені згідно з програмою курсу вищої математики.

РОЗДІЛ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Х.: Компанія СМІТ, 2012.- 316 с. або: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2010.- 264 с. **(512(07) К 49)**

<http://catalogue.nure.ua/document=147124>

ЗМІСТ

Вступ	5
1 Елементи лінійної алгебри	6
1.1 Визначники.....	6
1.2 Матриці та дії над ними	14
1.3 Обернена матриця.....	20
1.4 Ранг матриці	25
1.5 Системи лінійних неоднорідних рівнянь	32
1.6 Системи лінійних однорідних рівнянь	41
1.7 Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса.....	45
2 Елементи векторної алгебри	49
2.1 Вектори та лінійні операції над ними	49
2.2 Проекція вектора на вісь	54
2.3 Розкладання вектора по ортах координатних осей. Модуль вектора. Напрявні косинуси	58
2.4 Дії над векторами, які задані проекціями (координатами).....	62
2.5 Скалярний добуток векторів і його властивості.....	67

2.6 Векторний добуток векторів і його властивості	71
2.7 Мішаний добуток векторів і його властивості.....	76
3 Аналітична геометрія на площині	81
3.1 Системи координат на площині	81
3.2 Рівняння лінії на площині	86
3.3 Пряма лінія	89
3.4 Криві другого порядку	98
3.4.1 Поняття кривої другого порядку.....	98
3.4.2 Коло.....	98
3.4.3 Еліпс	99
3.4.4 Гіпербола	102
3.4.5 Парабола	107
3.4.6 Загальне рівняння кривої другого порядку.....	110
4 Аналітична геометрія в просторі	117
4.1 Поверхні та лінії в просторі	117
4.2 Рівняння площини.....	118
4.3 Рівняння прямої в просторі.....	122
4.4 Взаємні задачі на пряму та площину	127
4.5 Поверхні другого порядку	133
4.5.1 Поняття поверхні другого порядку.....	133
4.5.2 Еліпсоїд.....	133
4.5.3 Гіперболоїди.....	134
4.5.4 Параболоїди.....	136
4.5.5 Циліндричні поверхні.....	138
4.5.6 Поверхня обертання.....	139
4.5.7 Конічна поверхня.....	140
5 Лінійні простори	143
5.1 Лінійні простори. Базис. Вимірність. Ізоморфізм просторів	143
5.2 Перехід до нового базису. Орієнтація базису. Скалярний добуток. Евклідовий простір	149
5.3 Нормовані простори. Ортонормований базис. Процес ортогоналізації	156
6 Лінійні оператори. Квадратичні форми	162

6.1 Лінійні оператори. Матриця оператора	162
6.2 Власні числа та власні вектори оператора. Самоспряжені оператори ..	169
6.3 Ортогональні оператори. Квадратичні форми	178
6.4 Використання теорії квадратичних форм.....	182
7 Запитання до тесту з теми «Лінійна алгебра»	190
8 Запитання до тесту з теми «Аналітична геометрія»	225
9 Індивідуальні завдання	257
10 Відповіді до тесту з теми «Лінійна алгебра»	283
11 Відповіді до тесту з теми «Аналітична геометрія»	284
12 Відповіді до індивідуальних завдань	285
Словник ключових слів	299
Предметний покажчик	312
Рекомендована література	316

РОЗДІЛ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Коспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. - Харків, ХНУРЕ, 2016. – 256 с. **(512(07) К 49)**

<http://catalogue.nure.ua/document=196107>

ЗМІСТ

Передмова.....	6
Основні позначення.....	7
1 Базові поняття математичного аналізу.....	8
1.1 Множини.....	8
1.2 Дійсні числа.....	10
1.3 Деякі терміни логіки.....	17
1.4 Аксиоми арифметики.....	18
1.5 Комплексні числа.....	21
1.6 Метод математичної індукції.....	23
1.7 Функції.....	25

2 Основні поняття теорії границь	32
2.1 Послідовності.....	32
2.1.1 Числова послідовність і її границя.....	32
2.1.2 Властивості послідовностей, які мають границю.....	35
2.1.3 Границя монотонної обмеженої послідовності. Число e	40
2.2 Границя функції.....	43
2.2.1 Границя функції. Границя функції на нескінченності.....	43
2.2.2 Властивості границь.....	48
2.2.3 Нескінченно малі та нескінченно великі функції та їх властивості.....	49
2.2.4 Властивості границь функції.....	53
2.2.5 Техніка обчислення границь.....	54
2.3 Важливі границі.....	59
2.3.1 Перша важлива границя.....	59
2.3.2 Друга важлива границя.....	62
2.3.3 Розкриття деяких типів невизначеностей із застосуванням важливих границь.....	65
2.4 Неперервність функції.....	68
2.4.1 Неперервність функції у точці.....	68
2.4.2 Неперервність функцій на відрізку, властивості неперервних функцій.....	73
2.4.3 Схема дослідження функції на неперервність.....	74
2.5 Порівняння функцій.....	76
2.5.1 Правила порівняння.....	76
2.5.2 Еквівалентні нескінченно малі функції.....	78
2.5.3 Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій.....	81
2.5.4 Розкриття деяких типів невизначеностей із застосуванням таблиці еквівалентних функцій.....	82
 3 Похідна та диференціал функції однієї змінної	 85
3.1 Похідна і диференціал функції.....	85
3.1.1 Означення похідної і диференціала.....	85
3.1.2 Геометричний зміст похідної та диференціала.....	89
3.1.3 Механічний зміст похідної та диференціала.....	90
3.1.4 Рівняння дотичної та нормалі до плоскої кривої.....	92
3.1.5 Похідні зліва та справа. Неперервність і диференційованість функції.....	94
3.2 Диференціювання функцій.....	96

3.2.1	Формули диференціювання.....	96
3.2.2	Похідна складеної та оберненої функцій.....	98
3.2.3	Таблиця похідних.....	100
3.2.4	Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала. Таблиця диференціалів.....	105
3.2.5	Логарифмічне диференціювання.....	106
3.2.6	Диференціювання неявно заданої функції.....	108
3.2.7	Диференціювання функції, заданої параметрично.....	109
3.3	Похідні та диференціали вищих порядків.....	110
3.3.1	Похідні та диференціали вищих порядків явно заданої функції. Формула Лейбниця.....	110
3.3.2	Похідні вищих порядків параметрично та неявно заданої функцій...	113
4	Основні теореми диференціального числення.....	115
4.1	Теорема Ферма.....	115
4.2	Теорема Ролля.....	116
4.3	Теореми Коші і Лагранжа.....	118
4.4	Правило Лопіталю.....	120
4.5	Формула Тейлора.....	126
4.5.1	Формула Тейлора для многочленів.....	126
4.5.2	Формули Тейлора та Маклорена для довільної функції.....	128
4.5.3	Розкладання деяких функцій за формулою Маклорена.....	129
4.5.4	Наближені обчислення за допомогою формули Тейлора.....	133
5	Застосування теорем диференціального числення для дослідження функцій.....	136
5.1	Монотонність функції.....	136
5.2	Локальний екстремум функції	
5.2.1	Необхідна умова локального екстремуму.....	139
5.2.2	Перша достатня умова локального екстремуму.....	140
5.2.3	Найбільше і найменше значення функції на відрізку.....	142
5.2.4	Друга достатня умова локального екстремуму.....	144
5.3	Опуклість і вгнутість функції. Точки перегину.....	145
5.4	Асимптоти кривої.....	149
5.5	Схема дослідження функції та побудова її графіка.....	152
5.6	Застосування диференціального числення в наближених методах обчислень.....	158

5.6.1 Наближені методи розв'язування рівнянь.....	158
5.6.2 Інтерполяція й наближення функцій.....	165

Запитання до тесту з теми «Границі. Диференціальне числення функцій однієї змінної»	171
Індивідуальні завдання «Границі функції та послідовності».....	196
Індивідуальні завдання «Похідна функції».....	211
Індивідуальні завдання «Застосування похідних».....	224
Словник ключових слів	232
Відповіді до тесту.....	249
Предметний покажчик.....	250
Рекомендована література.....	253

РОЗДІЛ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ»

Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Коспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник – Харків: ХТУРЕ, 2012.- 280 с. (517(07) К 49)

<http://catalogue.nure.ua/document=148248>

ЗМІСТ

Передмова	4
Основні позначення	5
Лекція 1 Первісна та невизначений інтеграл. Таблиця основних інтегралів	6
Лекція 2 Методи інтегрування.....	19
Лекція 3 Інтегрування раціональних функцій.....	31
Лекція 4 Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій	44
Лекція 5 Інтегрування тригонометричних і гіперболічних функцій.	61
Лекція 6 Визначений інтеграл і його властивості.....	74
Лекція 7 Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца .	84
Лекція 8 Методи обчислення визначених інтегралів	90
Лекція 9 Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)	99

Лекція 10 Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)	109
Лекція 11 Геометричні застосування визначеного інтеграла (обчислення площі та довжини дуги плоскої кривої)	118
Лекція 12 Геометричні застосування визначеного інтеграла (обчислення об'єму та площі поверхні обертання)	135
Запитання до тесту з теми «Невизначений інтеграл»	145
Запитання до тесту з теми «Визначений інтеграл і його застосування» ..	177
Індивідуальні завдання	209
Додаток А Комплексні числа та деякі відомості з теорії многочленів	228
Додаток Б Інтеграли, що залежать від параметра	236
Додаток В Наближене обчислення визначених інтегралів	247
Додаток Г Фізичні застосування визначеного інтеграла	256
Словник ключових слів	262
Відповіді до тесту з теми «Невизначений інтеграл»	275
Відповіді до тесту з теми «Визначений інтеграл і його застосування»	276
Предметний покажчик	277
Рекомендована література	280

РОЗДІЛ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Конспект лекцій з дисципліни " Вища математика ". Розділ "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" для студентів інженерно-технічних спеціальностей / упоряд. Г. В. Сова ; МОН України, ХНУРЕ. – Харків : ХНУРЕ, 2006. – 56 с. **(517(07) К 65)**

<http://catalogue.nure.ua/document=50147>

ЗМІСТ

Вступ.	4
1 Функція, її границя та неперервність.	5
1.1 Функція багатьох змінних. Означення та символіка.	5
1.2 Границя функції багатьох змінних.	8

1.3 Неперервність функції багатьох змінних.	11
Контрольні запитання та завдання.	13
2 Похідні та диференціали функції багатьох змінних.	14
2.1 Частинні похідні.	14
2.2 Диференційовність функції.	18
2.3 Повний диференціал функції та його застосування до обчислення функцій і похибок. Диференціали вищих порядків.	20
2.4 Похідна складеної функції. Повна похідна. Інваріантність форми повного диференціала.	23
2.5 Диференціювання неявної функції.	26
Контрольні запитання та завдання.	28
3 Деякі застосування частинних похідних.	29
3.1 Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.	29
3.2 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.	31
3.3 Формула Тейлора для функції двох змінних.	37
3.4 Локальні екстремуми функції двох змінних.	39
3.5 Найбільше та найменше значення функції.	43
3.6 Умовний екстремум.	44
Контрольні запитання та завдання.	47
Термінологічний словник.	48
Список рекомендованої літератури	51

РОЗДІЛ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Лекції з дисципліни "Вища математика". Розділ "Інтегральне числення функцій багатьох змінних" для студентів інженерно-технічних спеціальностей / упоряд. Г. В. Сова, В. О. Дорошенко; МОН України, ХНУРЕ. – Харків : ХНУРЕ, 2007. – 124 с. **(517(07) Л 43)**

<http://catalogue.nure.ua/document=75946>

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Подвійний інтеграл.....	5
1.1 Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.....	5
1.2 Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості....	6
1.3 Обчислення подвійного інтеграла.....	9
1.4 Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних оординатах.....	15
1.5 Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії.....	19
1.6 Застосування подвійних інтегралів до задач механіки.....	26
Контрольні запитання та завдання.....	28
2 Потрійний інтеграл.....	29
2.1 Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості....	29
2.2 Обчислення потрійного інтеграла.....	31
2.3 Заміна змінних в потрійному інтегралі.....	34
2.4 Деякі застосування потрійного інтеграла.....	39
Контрольні запитання та завдання.....	43
3 Криволінійні інтеграли.....	44
3.1 Поняття криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги)....	46
3.2 Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.....	46
3.3 Застосування криволінійного інтеграла першого роду.....	49
3.4 Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах) Фізичний зміст.....	51
3.5 Обчислення та застосування криволінійного інтеграла другого роду..	53
3.6 Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.....	60
3.7 Формула Гріна.....	61
3.8 Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.....	64
3.9 Інтегрування повних диференціалів. Первісна функція.....	68
Контрольні запитання та завдання.....	73
4 Поверхневі інтеграли.....	74
4.1 Поверхневі інтеграли першого роду.....	74
4.2 Поверхневі інтеграли другого роду.....	77
4.3 Формула Остроградського-Гаусса.....	84
4.4 Формула Стокса.....	87
Контрольні запитання та завдання.....	91
5 Скалярні і векторні поля.....	92
5.1 Диференціальні операції в скалярних і векторних полях.....	92

Контрольні запитання та завдання.....	103
5.2 Повторні диференціальні операції в скалярних і векторних полях.....	103
Контрольні запитання та завдання.....	106
5.3 Інтегральні характеристики векторних полів.....	106
Контрольні запитання та завдання.....	115
Термінологічний словник.....	117
Список рекомендованої літератури.....	122

РОЗДІЛ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Звичайні диференціальні рівняння : тексти лекцій / упоряд.: В. О. Дорошенко, М. Г. Зуєв, О. М. Титаренко; МОН України, Харк.нац.ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2007. – 112 с. (517(07) 3 43)

<http://catalogue.nure.ua/document=56190>

ЗМІСТ

Передмова	4
1 Диференціальні рівняння першого порядку.....	5
2 Розв’язання диференціального рівняння першого порядку.....	15
3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	24
4 Диференціальні рівняння у повних диференціалах.....	33
5 Диференціальні рівняння вищих порядків	42
6 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків.....	53
7 Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	62
8 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	70
9 Системи диференціальних рівнянь.....	78
10 Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь	83
11 Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.....	92
12 Гіпергеометричне рівняння. Рівняння Бесселя	99
Програма розділу "Звичайні диференціальні рівняння"	109
Перелік використаної та рекомендованої літератури	111

РОЗДІЛ «ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

Тексти лекцій з теорії рядів/ Упоряд.: Л.І. Константинова, Д.О. Колесніков,
Г.В. Сова. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 120 с. (517(07) Т 30)

<http://catalogue.nure.ua/document=97328>

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Додавання нескінченної множини чисел.....	5
2 Нескінченні числові ряди.....	7
2.1 Частинні суми ряду.....	7
2.2 Збіжність і розбіжність ряду.....	9
2.3 Деякі властивості рядів, що збігаються.....	13
2.4 Залишковий член ряду і його властивості.....	16
2.5. Критерій Коші.....	17
3 Знакопостійні ряди.....	19
3.1 Поняття знакопостійного ряду.....	19
3.2 Десяткові дробі як ряди.....	19
3.3 Достатні ознаки збіжності.....	20
4 Збіжність рядів з доданками довільного знака.....	29
5 Функціональні ряди.....	33
5.1 Область збіжності функціонального ряду.....	33
5.2 Рівномірна збіжність функціональних рядів.....	37
5.3 Властивості рівномірно збіжних рядів.....	41
6 Степеневі ряди.....	47
6.1 Поняття степеневого ряду. Область збіжності.....	47
6.2 Рівномірна збіжність степеневого ряду.....	51
6.3 Розвинення функцій у степеневі ряди.....	52
7 Функції Бесселя.....	55
7.1 Рівняння Бесселя. Функції Бесселя першого роду.....	55
7.2 Функції Бесселя другого роду.....	57
8 Ортогональні системи. Ряди Фур'є.....	60
8.1 Ряди за ортогональною системою функцій.....	60
8.2 Ряди Фур'є в дійсній формі.....	61
8.3 Ряди Фур'є для парних функцій.....	65
8.4 Ряди Фур'є для непарних функцій.....	67

8.5 Ряди Фур'є в комплексній формі.....	68
Додаток А. Основні поняття та формули.....	73
Додаток Б. Задачі та запитання з теорії рядів.....	79
Перелік рекомендованої літератури	120

РОЗДІЛ «ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

Тексти лекцій з теорії функцій комплексної змінної / Упоряд.:
Л.І. Константинова, Д.О. Колесніков, Г.В. Сова. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – 96 с.
(517(07) Т 30)

<http://catalogue.nure.ua/document=81854>

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Комплексні числа та дії над ними	5
2 Послідовності комплексних чисел і числові ряди	15
3 Функції комплексної змінної. Диференціювання.....	18
3.1 Означення функції	18
3.2 Однозначні елементарні функції.....	18
3.3 Багатозначні елементарні функції.....	19
3.4 Загальні показникова і степенева функції.....	21
4 Аналітичні функції.....	23
4.1 Умови Коші-Рімана	23
4.2 Геометричний зміст похідної аналітичної функції	26
5 Інтегрування функцій комплексної змінної	30
5.1 Інтеграл від функції $f(z)$ вздовж кривої L	30
5.2 Теорема Коші для однозв'язної області	31
5.3 Теорема Коші для багатозв'язної області	32
5.4 Інтегральна формула Коші	33
6 Ряди Лорана. Класифікація особливих точок.....	36
6.1 Ряди Лорана	36
6.2 Зв'язок рядів Лорана з рядами Фур'є.....	39
6.3 Класифікація ізольованих особливих точок	41
7 Лишки та їх застосування.....	45
7.1 Основна теорема про лишки	45

7.2 Знаходження лишків в ізольованих особливих точках	46
8 Застосування лишків до обчислення інтегралів.....	51
8.1 Обчислення інтегралів по замкненому контуру	51
8.2 Інтеграли від дробово-раціональних функцій.....	52
8.3 Обчислення інтегралів виду $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx$	55
8.4 Обчислення власних інтегралів виду $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$	57
8.5 Логарифмічні лишки	58
9 Використання аналітичних функцій під час вивчення векторних полів.....	62
Додаток А. Основні поняття та формули.....	64
Додаток Б. Задачі та запитання з теорії функцій комплексної змінної	70
Рекомендована література	95

РОЗДІЛ «ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Тексти лекцій з дисципліни “Вища математика”, розділ «Операційне числення» для студентів інженерно-технічних спеціальностей [Електронне видання] / Упоряд. В.В. Дорошенко, О.О. Ремаєва, Н.П. Клімова. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 74 с.

<http://catalogue.nure.ua/document=166093>

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Перетворення Лапласа.....	5
1.1 Оригінали.....	5
1.2 Зображення	6
2 Основні властивості перетворення Лапласа	8
2.1 Властивість лінійності	8
2.2 Властивість подібності	9
2.3 Властивість зміщення	10
2.4 Властивість запізнювання	11

2.5 Зображення періодичної функції	16
2.6 Диференціювання оригіналу	17
2.7 Диференціювання зображення	18
2.8 Інтегрування оригіналу	19
2.9 Інтегрування зображення	20
2.10 Згортка функцій та її властивості.....	21
2.11 Згортка оригіналів та множення зображень.....	22
3 Відновлення оригіналу за зображенням	23
3.1 Деякі способи знаходження оригіналів за їх зображеннями.....	24
3.2 Множення зображень	25
3.3 Зворотне перетворення Лапласа. Теореми розкладання.....	29
4 Застосування операційного числення	33
4.1 Розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами операторним методом.....	33
4.2 Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами операторним методом	39
4.3 Застосування операційного числення до розв'язання деяких задач теоретичної механіки.....	40
4.4 Застосування операційного методу до розрахунків електричних контурів.....	43
5 Запитання до тесту з теми «Операційне числення».....	48
Додаток А Таблиця оригіналів і зображень.....	70
Додаток Б Таблиця основних властивостей перетворення Лапласа.....	72
Рекомендована література.....	73

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою вищої математики.
Протокол № 2 від 04.10.2017 р.

ХАРКІВ 2017

Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія» [Електронний документ] / Упоряд. Н.П. Стогній. – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 36 с.

Упорядник Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

Рецензент: О.О. Ремаєва, канд. техн. наук, доц. каф. ВМ

ВСТУП

Самостійна робота студента – це важлива частина підготовки майбутнього фахівця, що дозволяє йому навчитися працювати з різноманітними науковими та літературними джерелами, а також навчитися обробляти та аналізувати отриману інформацію. Така форма роботи, як самостійне вивчення студентами окремих тем чи розділів навчальних предметів включено у підготовку бакалаврів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія». Метою методичних рекомендацій є ознайомлення студентів з практичними порадами та завданнями щодо самостійного вивчення матеріалу. За складом матеріалу, змістом та структурою вони повністю узгоджені з навчальним планом.

Методичні рекомендації призначені для студентів першого курсу денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія».

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ

Кожна самостійна робота виконується на листах формату А4. На першій сторінці повинні бути вказані тема самостійної роботи, номер варіанта, прізвище, ім'я, по батькові студента, номер групи та назва факультету, а також вказані данні викладача, який перевіряє вказану роботу.

Розв'язки всіх задач та пояснення до них повинні бути короткими, але обґрунтованими. При необхідності варто посилатися на відповідні питання теорії з використаних формул, теорем тощо. Рисунки та графіки потрібно виконувати акуратно, з дотриманням масштабу у вибраній системі координат, пояснення до задач повинні відповідати позначенням на рисунку.

Перед виконанням кожної роботи студент вивчає відповідний лекційний матеріал, розбирає приклади розв'язаних задач, розв'язує типові задачі до кожної теми. Далі студент знаходить свій варіант завдань за номером прізвища в журналі групи.

2 МЕТА І ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета курсу вищої математики – оволодіння студентами необхідним математичним апаратом, що допомагає аналізувати, моделювати та розв’язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням, де це можливо, обчислювальної техніки.

Завдання курсу вищої математики для бакалаврів:

- розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів;
- оволодіння студентами основними методами дослідження і розв’язку математичних задач;
- виховання у студентів уміння самостійно поширювати свої математичні знання та проводити математичний аналіз прикладних задач;
- розвиток у студентів навичок використання математичних методів дослідження під час підготовки курсових та дипломних робіт;
- підготовка студентів до науково-дослідної роботи, розробка та аналіз математичних моделей, застосування математичних методів під час розв’язання конкретних завдань галузі.

Для реалізації цієї мети студент повинен опанувати основні методи аналітичної геометрії, лінійної алгебри та математичного аналізу, тобто вільно розв’язувати задачі середньої складності та добре диференціювати і інтегрувати функції. Ці вміння та навички дадуть можливість добре засвоїти теоретичні і практичні основи теорії рядів, операційного числення, кратних інтегралів, тобто розділів курсу, які необхідні для подальшого навчання в технічному університеті.

3 ПЕРЕЛІК ТЕМ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕРІАЛУ

	Тема	Кільк. годин	Практика	Теорія
Частина 1				
1.	Пряма на площині. Криві другого порядку.	5+5	[1]: ІЗ №1, стор. 373-374, № 5	[2]: стор. 98-116
2.	Дослідження функцій і побудова їх графіків за допомогою похідних	7	[1]: ІЗ 5, стор. 490-492, № 4(а)	[3]: стор. 208-216
3.	Інтегрування диференціальних біномів	5	[4]: ІЗ 1, стор. 291-298, № 1(є)	[4]: стор. 17-19
Частина 2				
1.	Застосування визначених інтегралів у фізиці	2	[4]: ІЗ 1, стор. 309-311, № 8	[4]: стор. 79-80
2.	Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус- перетворення Фур'є.	6	[6]: ІЗ 4.3, стор. 182-189, № 3	[5]: стор. 235-236

4 ІНСТРУКЦІЯ ПО ВИВЧЕННЮ ОКРЕМИХ ТЕМ

Самостійне вивчення окремих тем представлені великою різноманітністю видів робіт: робота з підручником, довідником, науково-популярною літературою, конспектування прочитаного тощо; розв'язання вправ,

спрямованих на набуття практичних навичок і вмінь; відповіді на контрольні питання, які дають змогу ще раз повторити вивчений матеріал і закріпити знання. Джерела інформації (з переліку літератури) містяться в таблиці п.3.

Читання підручника

1. Вивчаючи матеріал по підручнику, варто переходити до наступного питання тільки після правильного розуміння попереднього, виконуючи на папері всі обчислення (у тому числі й ті, які заради стислості опущені в підручнику).

2. Особливу увагу варто привертати на визначення основних понять курсу, які відбивають кількісну сторону або просторові властивості реальних об'єктів і процесів і виникають у результаті абстракції із цих властивостей і процесів. Без цього неможливо успішне вивчення математики. Студент повинен докладно розбирати приклади, які пояснюють такі визначення, і вміти будувати аналогічні приклади самостійно.

3. При вивченні матеріалу по підручнику корисно відразу вести конспект, у який рекомендується виписувати визначення, формулювання теорем, формули, рівняння й т.п.

Розв'язання задач

1. Вивчення вищої математики повинне супроводжуватися розв'язанням задач, для чого рекомендується завести спеціальний зошит.

2. Розв'язання задач і прикладів варто викладати докладно, обчислення повинні розташовуватися в строгому порядку, при цьому рекомендується відокремлювати допоміжні обчислення від основних. Помилкові записи варто не стирати, а закреслювати. Креслення можна виконувати від руки, але акуратно й відповідно до даних умов.

3. Розв'язання кожної задачі повинно доводити до відповіді, необхідної згідно умови, і, по можливості, в загальному вигляді з висновком формули. Потім в отриману формулу підставляють числові значення (якщо такі дані). У проміжних обчисленнях не слід уводити наближені значення коренів, числа π й т.п.

4. Розв'язання задач певного типу потрібно продовжувати до придбання твердих навичок у їхньому розв'язку.

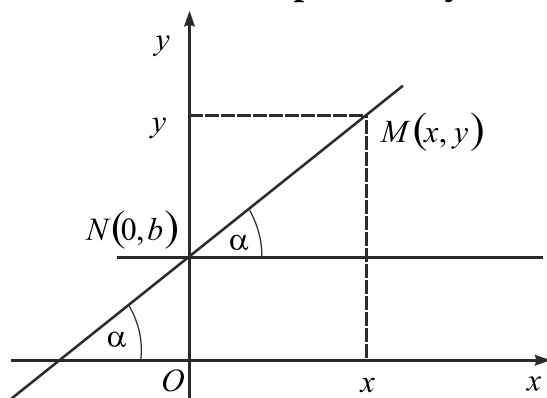
5. ДОПОМІЖНИЙ МАТЕРІАЛ ДО КОЖНОЇ ТЕМИ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

Частина 1

5.1.1 Пряма на площині

Існують різні способи завдання прямої лінії на площині в декартовій системі координат. Наведемо основні види рівнянь прямої.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



Положення довільної прямої на площині Oxy цілком визначається ординатою b точки $N(0, b)$ перетину з віссю Oy й кутом α між віссю Ox і прямою, де кут α ($0 \leq \alpha < \pi$) – це найменший кут між позитивним напрямком осі Ox та даною прямою.

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$. Опустимо з неї на вісь Ox перпендикуляр. Проведемо через точку N пряму, що паралельна осі Ox , до перетину з перпендикуляром. У побудованому трикутнику $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y-b}{x}$, тобто $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$. Введемо позначення $\operatorname{tg} \alpha = k$, одержуємо рівняння $y = kx + b$, якому відповідають координати будь-якої точки $M(x, y)$ прямої.

Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом* прямої, а рівняння – *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Окремі випадки:

1) $y = kx$ – рівняння прямої, що проходить через початок координат;

2) $y = b$ – рівняння прямої, що паралельна осі Ox ;

3) $x = a$ – рівняння прямої, що паралельна осі Oy , де a – абсциса точки перетину прямої з віссю Ox . (Якщо пряма паралельна осі Oy , то $\alpha = 90^\circ$ й рівняння втрачає зміст, бо для неї кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \alpha = \infty$ не існує.)

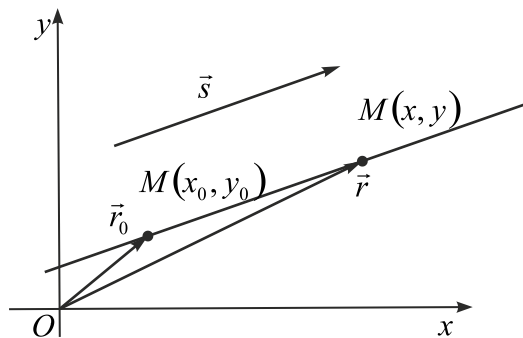
Нехай пряма, задана рівнянням $y = kx + b$, проходить через точку $M(x_0, y_0)$, тобто координати точки задовольняють рівняння прямої: $y_0 = kx_0 + b$. Звідси $b = y_0 - kx_0$. Підставляючи значення b в рівняння $y = kx + b$, одержимо шукане рівняння прямої $y = kx + y_0 - kx_0$, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

яке називається *рівнянням прямої, що проходить через точку, із заданим кутовим коефіцієнтом*.

Рівняння прямої в векторно-параметричному, параметричному й канонічному вигляді

Положення довільної прямої на площині Oxy визначається точкою



$M(x_0, y_0)$, що належить прямій, і вектором $\vec{s} = (m, n)$ паралельним даній прямій, який називається *напрямним вектором* прямої. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка на прямій. Позначимо через $\vec{r}$ її радіус-вектор, через $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки $M(x_0, y_0)$. Оскільки

вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ є колінеарним вектору $\vec{s}$, то, використовуючи необхідну й достатню умову колінеарності двох векторів, одержимо рівняння

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s},$$

яке називається *векторно-параметричним*, де t – параметр.

Запишемо рівняння через координати. Одержимо рівняння

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn, \end{cases}$$

які називаються *рівняннями прямої в параметричному вигляді*.

Виключивши параметр t із рівнянь, одержимо так зване *канонічне*

рівняння прямої: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ й $M_2(x_2, y_2)$. Тоді за напрямний вектор прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ і в рівнянні замість m і n підставити відповідно $(x_2 - x_1)$ й $(y_2 - y_1)$. Одержимо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 й M_2 :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

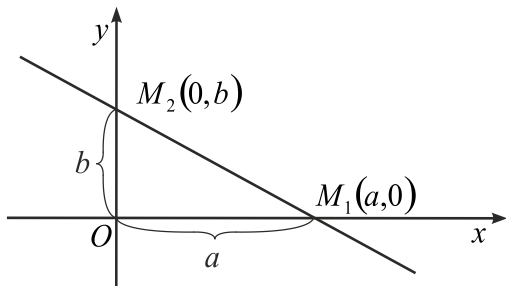
Передбачається, що в цьому рівнянні $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Окремі випадки:

1) $x_2 = x_1$ – пряма, що проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ й $M_2(x_2; y_2)$, паралельна осі ординат і її рівняння $x = x_1$;

2) $y_2 = y_1$ – пряма M_1M_2 паралельна осі абсцис і її рівняння $y = y_1$.

Рівняння прямої в відрізках



Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy – у точці $M_2(0, b)$.

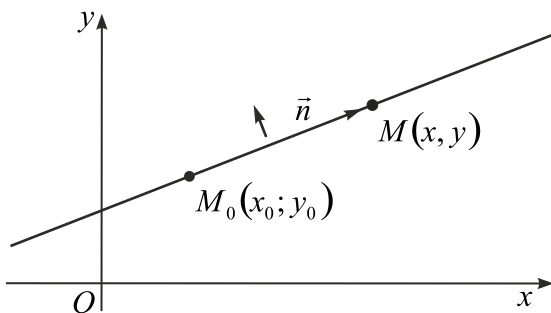
У цьому випадку рівняння прийме вигляд

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \text{ тобто}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої в відрізках*, тому що числа a й b указують, які відрізки відтинає пряма на осях координат.

Рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно вектору



Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\vec{n} = (A, B)$. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ й розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Тому що вектори $\vec{n}$ й $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, то й

їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору*.

Вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярний прямій, називається *нормальним вектором цієї прямої*.

Рівняння прямої в загальному вигляді

У рівнянні розкриємо дужки, введемо позначення $C = -Ax_0 - By_0$. Тоді воно прийме вигляд

$$Ax + By + C = 0,$$

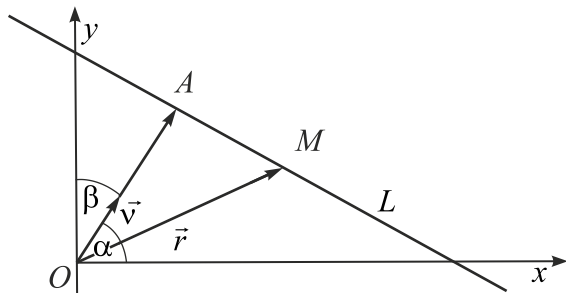
де A і B – координати нормального вектора $\vec{n}$. Отримане рівняння називається *рівнянням прямої L в загальному вигляді*.

Окремі випадки:

1) якщо $A = 0$, то $L \parallel Ox$;

- 2) якщо $B = 0$, то $L \parallel Oy$;
- 3) якщо $C = 0$, то L проходить через початок координат;
- 4) якщо $A = C = 0$, то L збігається з Ox ;
- 5) якщо $B = C = 0$, то L збігається з Oy .

Нормальне рівняння прямої



Розглянемо прямокутну систему координат Oxy . Позначимо через $p = |\overline{OA}|$ відстань від початку координат O до прямої L .

Якщо:

- 1) $\overline{OA} \perp L$, де $|\overline{OA}| = p$;

- 2) $\vec{v} \parallel \overline{OA}$, де $|\vec{v}| = 1$ й $\vec{v} = (\cos \alpha, \cos \beta)$;

- 3) $\vec{r} = (x, y)$ – радіус-вектор точки $M(x, y)$, то $pr_{\vec{v}} \vec{r} = p$. З огляду на те,

що $pr_{\vec{v}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = x \cos \alpha + y \cos \beta$, одержимо

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha = p.$$

Рівняння називається *нормальним рівнянням прямої*.

Покажемо, як навести рівняння прямої в загальному вигляді $Ax + By + C = 0$ до нормального рівняння. Помножимо рівняння прямої в загальному вигляді $Ax + By + C = 0$ на деякий множник $\mu \neq 0$. Одержимо

$$(\mu A)x + (\mu B)y + (\mu C) = 0.$$

Через те, що остання рівність має дорівнювати, то одержимо $\mu A = \cos \alpha$, $\mu B = \cos \beta$, $\mu C = -p$. Використовуючи властивість напрямних косинусів: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, маємо $(\mu A)^2 + (\mu B)^2 = 1$, звідки множник, що нормує

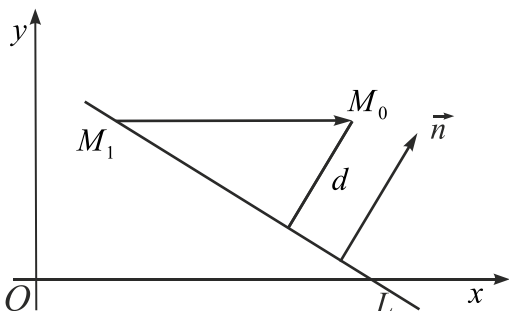
$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Відповідно до рівності

$\mu C = -p$, знак множника, що нормує, протилежний знаку вільного члена C загального рівняння прямої.

Відстань від точки до прямої

Нехай задані пряма L рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$.



Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, де $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точка прямої L , на напрямок нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$. Отже,

$$d = |np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, тобто $C = -Ax_1 - By_1$. Тому $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

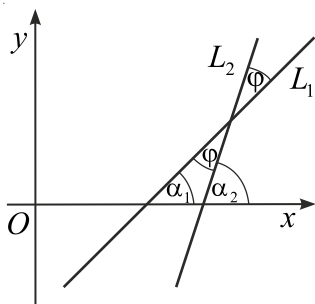
Якщо пряма задана нормальним рівнянням $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha = p$, то з огляду на те, що $\mu A = \cos \alpha$, $\mu B = \sin \alpha$, $\mu C = -p$, де $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, тобто

$$\pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha, \quad \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \alpha, \quad \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -p, \quad \text{одержимо}$$

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|.$$

Кут між прямими

1. Нехай прямі L_1 й L_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ й $y = k_2x + b_2$. Знайдемо найменший із двох суміжних кутів φ , які вони утворюють.



Маємо $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема про зовнішній кут трикутника) або $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \right|.$$

Але $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, тому

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Окремі випадки:

- 1) $k_1 = k_2$ – умова $\parallel$;
- 2) $k_1 \cdot k_2 = -1$ – умова $\perp$.

2. Нехай прямі L_1 й L_2 задані канонічними рівняннями.

$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$, де $M_1(x_1, y_1) \in L_1$ й $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ – напрямний вектор L_1 ;

$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, де $M_2(x_2, y_2) \in L_2$ й $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ – напрямний вектор L_2 .

Один з двох кутів між прямими L_1 і L_2 дорівнює куту φ між напрямними векторами $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$, а інший $\pi - \varphi$. Тому $\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$ треба брати за модулем, тобто

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Окремі випадки:

- 1) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ – умова $\parallel$;
- 2) $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ – умова $\perp$.

3. Нехай прямі L_1 і L_2 задані рівняннями в загальному вигляді.

$L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, де $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ – нормальний вектор L_1 і $L_1 \perp \vec{N}_1$;

$L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, де $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ – нормальний вектор L_2 і $L_2 \perp \vec{N}_2$.

Тоді $\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$ і відповідно один з гострих кутів визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Окремі випадки:

- 1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ – умова $\parallel$;
- 2) $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ – умова $\perp$.

Приклад. Знайти проекцію точки $P(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

Розв'язання. Спочатку з'ясуємо всі параметри заданої прямої. По-перше, відомі координати її нормального вектора $\vec{N}_1 = (4; -5)$. По-друге, із рівняння прямої можемо знайти її кутовий коефіцієнт:

$$4x - 5y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} \Rightarrow k_1 = \frac{4}{5}.$$

По-третє, записавши рівняння у вигляді $4x + 3 = 5y \rightarrow \frac{x + \frac{3}{4}}{5} = \frac{y}{4}$, можемо знайти напрямний вектор заданої прямої $\vec{S}_1 = (5; 4)$. За умовою, пряма PP_1 проходить через задану точку $P(-6; 4)$. Знаходимо рівняння прямої PP_1 : $y - 4 = k(x - 6)$. Кутовий коефіцієнт k знаходимо із умови перпендикулярності прямих $k \cdot k_1 = -1$, звідки $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{5}{4}$. Тепер рівняння прямої PP_1 набуває вигляду $y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 6)$ або $y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}$.

Знайдемо точку P_1 перетину прямих l і PP_1 . Нагадаємо! Точка перетину будь-яких ліній знаходиться як розв'язок системи їхніх рівнянь.

$$P_1: \begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}, \\ y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}, \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Таким чином, проекцією точки P на пряму $4x - 5y + 3 = 0$ є точка $P_1(-2; -1)$.

Для того, щоб перевірити правильність результату, потрібно засвідчитися у тому, що точка P_1 належить заданій прямій, тобто її координати задовольняють рівняння прямої. Маємо $4 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$.

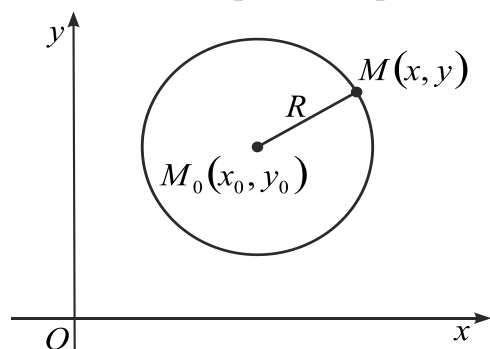
Криві другого порядку

Поняття кривої другого порядку

Криві другого порядку визначаються загальним рівнянням вигляду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де всі коефіцієнти – дійсні числа й, принаймні, одне із чисел A, B, C відмінно від нуля. Алгебраїчні лінії другого порядку включають такі криві, як коло, еліпс, гіпербола, парабола (не вважаючи ліній, що вироджені).



Коло

Канонічне рівняння кола

Коло – це множина точок $M(x, y)$ площини, які рівновіддалені від заданої точки

$M_0(x_0, y_0)$, називаної її *центром*, де $|\overline{M_0M}| = R$ – відстань від точки M_0 до точки M називається її *радіусом*. Складемо рівняння кола. З визначення маємо $|\overline{M_0M}| = R$, де $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, тобто $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$.

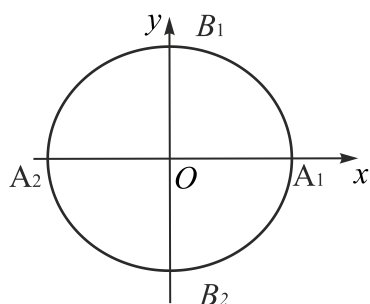
Звідси одержимо *канонічне рівняння кола*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Рівняння задовольняють координати будь-якої точки $M(x, y)$ даного кола й не задовольняють координати ніякої точки, що не лежить на колі.

Зокрема, якщо $x_0 = 0$ й $y_0 = 0$, одержимо рівняння кола із центром на початку координат

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



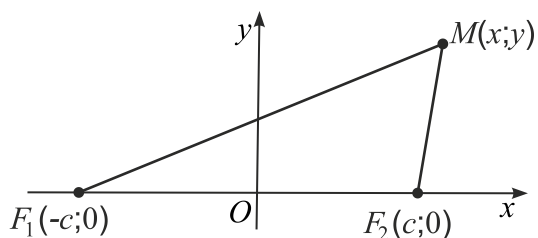
Дослідження форми кола за його рівнянням

1. Рівняння містить змінні x та y тільки в парних степенях, тому Ox й Oy – осі симетрії, а точка O – *центр симетрії*.

2. $A_1(R, 0)$, $A_2(-R, 0)$, $B_1(0, R)$ і $B_2(0, -R)$ – точки перетину кола з осями координат, які визначаються відповідно, якщо покласти $y = 0$ й $x = 0$.

Еліпс

Канонічне рівняння еліпса



Еліпсом називається безліч точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок цієї площини, названих *фокусами*, є величина постійна, більша, ніж відстань між фокусами.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2 , відстань між ними через $2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів через $2a$. За визначенням $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Для одержання рівняння еліпса виберемо систему координат Oxy таким чином, щоб фокуси F_1 й F_2 лежали на осі Ox , а початок координат збігався з серединою відрізка $F_1 F_2$. Тоді $F_1(-c, 0)$ й $F_2(c, 0)$ – координати фокусів.

Якщо ввести позначення $b^2 = a^2 - c^2$, то одержимо *канонічне рівняння еліпса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Доведення.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса. Тоді з визначення еліпса одержимо $MF_1 + MF_2 = 2a$, тобто

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Позбудемося від ірраціональності: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,

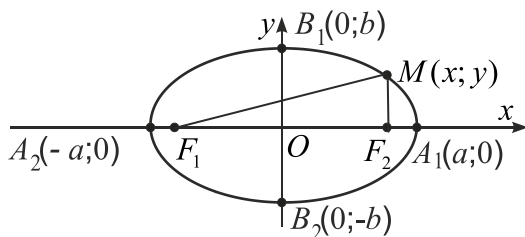
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx, \quad a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Використовуючи позначення $b^2 = a^2 - c^2$, останнє рівняння прийме вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Дослідження форми еліпса за його рівнянням



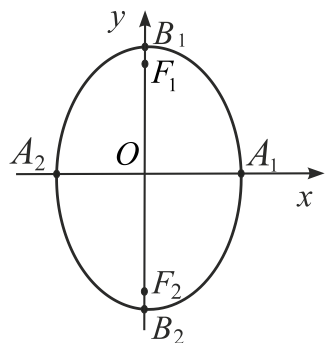
1. Рівняння містить змінні x та y тільки в парних степенях, тому Ox й Oy – осі симетрії, а точка O – центр симетрії.

2. $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0; b)$ і $B_2(0; -b)$ – точки перетину еліпса з осями координат, які визначаються відповідно, якщо покласти $y = 0$ й $x = 0$.

Прийнято називати:

- точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 вершинами еліпса;
- відрізки A_1A_2 й B_1B_2 , а також їхні довжини $2a$ й $2b$ великою й малою осями еліпса відповідно;
- числа a й b великою й малою півосями еліпса відповідно;
- $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ – фокальними радіусами точки M ;
- Ox – фокальною віссю.

3. З рівняння еліпса видно, що кожний доданок у лівій частині не перевершує одиниці, тобто мають місце нерівності $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ й $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ або $-a \leq x \leq a$ й $-b \leq y \leq b$.



З рівності $b^2 = a^2 - c^2$ видно, що $a > b$. Якщо ж $a < b$, то рівняння визначає еліпс, більша вісь якого $2b$ лежить на осі Oy , а мала вісь $2a$ – на осі Ox . Фокуси такого еліпса перебувають у точках $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$, де $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

При $a = b$ еліпс переходить у коло, а рівняння приймає вигляд $x^2 + y^2 = a^2$.

Характеристики еліпса

1. Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – відношення половини відстані між фокусами до великої півосі еліпса – називається *ексцентриситетом еліпса* й позначається буквою ε («епсілон»).

Оскільки $0 < c < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. З огляду на те, що $b^2 = a^2 - c^2$, одержимо $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, тобто $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ і $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

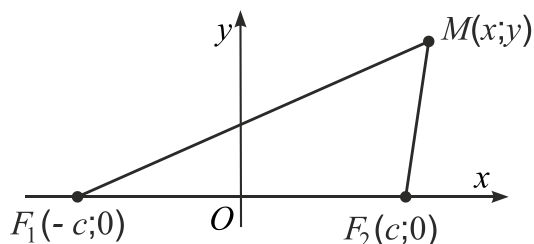
Звідси видно, що чим менше ексцентриситет еліпса, тим еліпс буде менш сплющеним.

Якщо $\varepsilon = 0$, тобто $a = b$, то еліпс перетворюється в коло, тобто ексцентриситет характеризує ступінь стиску еліпса.

Якщо $\varepsilon = 1$, тобто $b = 0$, то еліпс вироджується у відрізок прямої $y = 0$, $-a \leq x \leq a$.

Оскільки $r_1 + r_2 = 2a$, то мають місце формули $r_1 = a + \varepsilon x$ і $r_2 = a - \varepsilon x$.

2. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, які перпендикулярні фокальній осі, називаються *директрисами еліпса*.



Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи

Гіперболою називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок цієї

площини, що називаються *фокусами*, є величина постійна, менша, ніж відстань між фокусами.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2 , відстань між ними через $2c$, а модуль різниці відстаней від кожної точки гіперболи до фокусів через $2a$. За визначенням $2a < 2c$, тобто $a < c$. Для одержання рівняння гіперболи виберемо систему координат Ox так, щоб фокуси F_1 й F_2 лежали на осі Ox , а початок координат збігався з серединою відрізка $F_1 F_2$. Тоді $F_1(-c, 0)$ й $F_2(c, 0)$ – координати фокусів. Якщо ввести позначення $b^2 = c^2 - a^2$, то одержимо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Доведення.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Тоді з визначення гіперболи одержимо $|MF_1 - MF_2| = 2a$, тобто

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Позбудемося від ірраціональності: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2, \quad a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Оскільки $c > a$, то $c^2 - a^2 > 0$. Використовуючи позначення $b^2 = c^2 - a^2$, останнє рівняння набуде вигляду $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ або $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Дослідження форми гіперболи за її рівнянням

1. Рівняння містить змінні x і y тільки в парних степенях, тому Ox й Oy – осі симетрії, а точка O – *центр* симетрії.

2. $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ – точки перетину гіперболи з віссю Ox , які визначаються, якщо покласти $y = 0$.

Прийнято називати:

– точки A_1 , A_2 *вершинами* гіперболи;

– відрізки A_1A_2 й B_1B_2 , а також їхньої довжини $2a$ й $2b$ дійсною й уявною осями гіперболи відповідно;

– числа a й b дійсною й уявною півосями гіперболи відповідно;

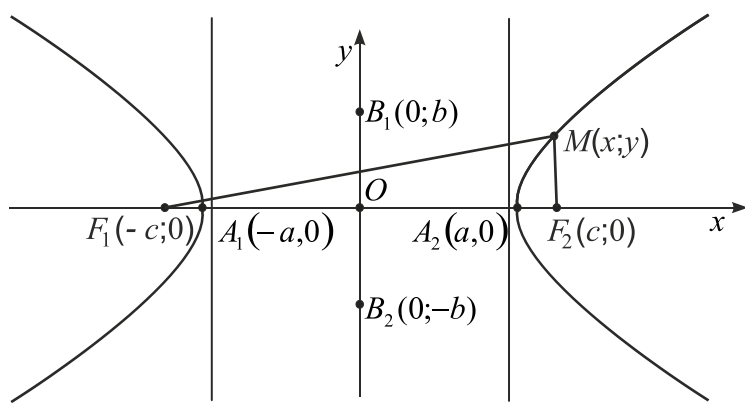
– $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ – фокальними радіусами точки M ;

– Ox – дійсною віссю,

– Oy – уявною віссю.

3. З рівняння гіперболи необхідно, щоб $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ або $|x| \geq a$. Це означає,

що точки гіперболи розташовані праворуч від прямої $x = a$ (права вітка гіперболи) і ліворуч від прямої $x = -a$ (ліва вітка гіперболи).



Гіпербола має форму, зображену на рисунку (крива, що складається із двох необмежених віток).

Крива, обумовлена рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, також є

гіпербола, дійсна вісь $2b$ якої

розташована на осі Oy , а уявна вісь $2a$ – на осі Ox . Гіпербола, у якої $a = b$, називається *рівносторонньою*. Її канонічне рівняння $x^2 - y^2 = a^2$.

Характеристики гіперболи

1. Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – відношення половини відстані між фокусами до дійсної півосі гіперболи – називається *ексцентриситетом гіперболи*.

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи.

Дійсно, з рівності $b^2 = c^2 - a^2$ видно, що $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1$, тобто $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ й

$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Звідси чим менше ексцентриситет гіперболи, тим менше

відношення $\frac{b}{a}$ її півосей, а отже, вітки гіперболи притискаються до дійсної осі.

Для правої вітки гіперболи: $r_1 = \varepsilon x + a$ і $r_2 = \varepsilon x - a$.

Для лівої вітки гіперболи: $r_1 = -(\varepsilon x + a)$ і $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

2. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, які перпендикулярні дійсній осі, називаються директрисами гіперболи.

Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Таким чином, директриса $x = \frac{a}{\varepsilon}$ розташована між центром і вершиною $A_1(a, 0)$ гіперболи, а директриса $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ – між центром і вершиною $A_2(-a, 0)$.

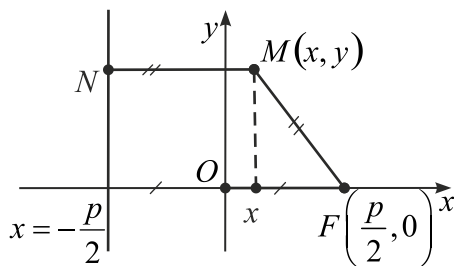
Зв'язок між ексцентриситетом і директрисою гіперболи: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

3. Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ є асимптотами гіперболи.

Парабола

Канонічне рівняння параболи

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, що називається фокусом, і даної прямої, що називається директрисою. Відстань від фокуса F до



директриси називається параметром параболи й позначається через

p ($p > 0$). Виберемо систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисі в напрямку від директриси до F ,

а початок координат O розташуємо всередині між фокусом і директрисою.

В обраній системі координат фокус F має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння

директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$ або $x + \frac{p}{2} = 0$. Канонічне рівняння параболи

$$y^2 = 2px.$$

Доведення. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи. З'єднаємо точку M з точкою F . Проведемо відрізок MN перпендикулярно директрисі. За означенням

параболи маємо $MF = MN$. Оскільки $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$,

$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$, то $\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$. Звівши обидві частини рівняння у квадрат, одержимо $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$, тобто $y^2 = 2px$.

Дослідження форми параболі

1. Парабола симетрична відносно осі Ox , тому що в рівнянні змінна y входить у парному степені, тобто вісь Ox є віссю симетрії параболі.

2. Парабола розташована праворуч від осі Oy , тому що при $p > 0$ видно, що $x \geq 0$.

3. Парабола $y^2 = 2px$ має вигляд, зображений на рис. Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p > 0$) також визначають параболі, вони зображені на рис. 1, 2, 3.

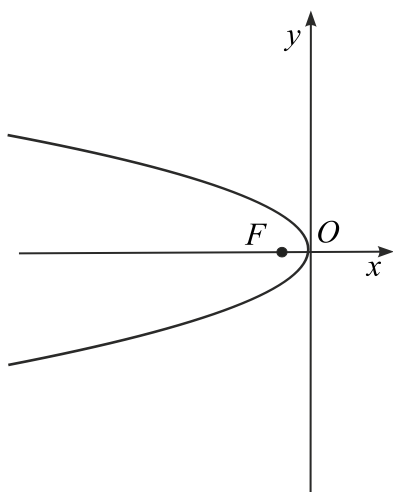


Рисунок 1

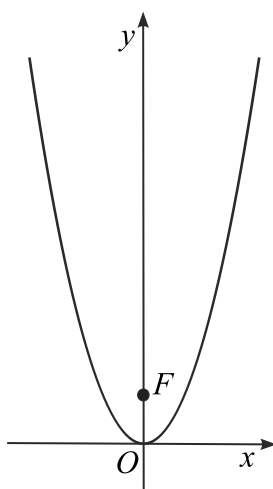


Рисунок 2

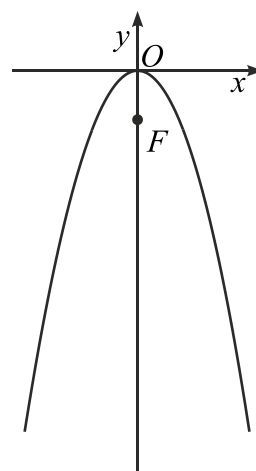


Рисунок 3

Характеристики параболі

1. Прийнято називати директрисою параболі:

1) $y^2 = 2px$ пряму $x = -\frac{p}{2}$; 2) $y^2 = -2px$ пряму $x = \frac{p}{2}$;

3) $x^2 = 2py$ пряму $y = -\frac{p}{2}$; 4) $x^2 = -2py$ пряму $y = \frac{p}{2}$.

Директриса перпендикулярна осі симетрії параболі й розташована в тій напівплощині, де змінна, яка входить у рівняння параболі в першому степені, не визначена.

3.Ексцентриситет параболи $\varepsilon = \frac{r}{MF} = 1$.

Приклад. Встановити, що рівняння $9x^2 + 18x + 25y^2 + 100y - 116 = 0$ визначає еліпс. Знайти його центр, півосі, ексцентриситет, фокуси, рівняння директрис.

Розв'язання. Зведемо задане рівняння до канонічного вигляду. Для цього виконаємо наступні дії:

1) згрупуємо члени рівняння в такий спосіб:

$$(9x^2 + 18x) + (25y^2 + 100y) - 116 = 0 \Rightarrow 9(x^2 + 2x) + 25(y^2 + 4y) - 116 = 0;$$

2) виділимо в дужках повні квадрати:

$$9 \cdot ((x+1)^2 - 1) + 25((y+2)^2 - 4) - 116 = 0;$$

3) розкриємо зовнішні дужки і приведемо подібні члени:

$$9(x+1)^2 - 9 + 25(y+2)^2 - 100 - 116 = 0 \Rightarrow 9(x+1)^2 + 25(y+2)^2 = 225;$$

4) розділимо обидві частини рівняння на вільний член:

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Визначимо тип кривої. Знайдене рівняння визначає еліпс з центром у точці $C(-1; -2)$ і півосями $a = 5$, $b = 3$.

Тип еліпса Параметри	Центр еліпса в точці (0;0)		Центр еліпса в точці $(x_0; y_0)$	
	$a > b$	$b > a$	$a > b$	$b > a$
$2c = F_1F_2$	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = b^2 - a^2$	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = b^2 - a^2$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$
Фокуси	$F_1(-c; 0),$ $F_2(c; 0)$	$F_1(0; -c),$ $F_2(0; c)$	$F_1(-c + x_0; y_0),$ $F_2(c + x_0; y_0)$	$F_1(x_0; -c + y_0),$ $F_2(x_0; c + y_0)$
Директриси	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$	$x - x_0 = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	$y - y_0 = \pm \frac{b}{\varepsilon}$

Обчислимо основні параметри заданого еліпса. За наведеними вище формулами (випадок, коли $a > b$, а центр у точці $C(-1; -2)$, тобто $x_0 = -1$, $y_0 = -2$) знаходимо

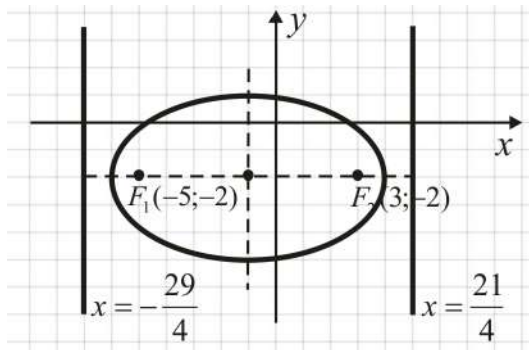
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4;$$

ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$;

фокуси $F_1(-5;-2)$ і $F_2(3;-2)$;

директриси $x+1 = \pm \frac{25}{4}$, звідки $x = \frac{21}{4}$ і $x = -\frac{29}{4}$.

І, нарешті, побудуємо заданий еліпс.



Спочатку введемо допоміжну систему координат і побудуємо в ній еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Потім виконаємо паралельне перенесення системи координат $\vec{r} = (1; 2)$.

5.1.2 Дослідження функцій і побудова їх графіків за допомогою похідних

Загально відомою є схема дослідження функції для побудови графіка:

- 1) знайти область визначення функції та множину її значень;
- 2) дослідити функцію на парність та непарність, періодичність;
- 3) знайти точки перетину графіка функції з осями системи координат, точки розриву, проміжки знакосталості функції;
- 4) дослідити поведінку функції біля точок розриву та на нескінченності, знайти якщо вони є, асимптоти графіка;
- 5) знайти нулі та точки розриву похідної, інтервали монотонності функції, точки екстремуму та екстремальні значення функції;
- 6) знайти нулі та точки розриву другої похідної, інтервали опуклості графіка функції, точки перегину та значення функції в цих точках;
- 7) для побудови графіка необхідно знайти достатню кількість контрольних точок, через які він проходить.

Зауважимо, що на практиці не завжди є потреба досліджувати функцію за наведеною схемою і в такій саме послідовності.

Так, наприклад, множину значень деяких функцій можна встановити лише після знаходження екстремальних значень функції та її поведінки біля точок розриву і на нескінченності.

Можна спочатку знайти нулі функції. Якщо вони розташовані не симетрично відносно нуля, то функція не може бути ні непарною, ні парною, ні

періодичною. Такий же висновок можна зробити у випадку, коли функція має область визначення не симетричну відносно нуля, то, зрозуміло, що з такого факту ми не можемо робити висновок про парність або непарність. Проте, якщо нулі функції симетричні відносно нуля, але їх число скінчене, то вона не є періодичною.

Не може бути функція ні парною, ні непарною, ні періодичною, якщо нулі першої або другої похідних розміщені несиметрично відносно нуля.

Аналогічно можна зробити висновок і з несиметричного розміщення точок розриву.

Для складних функцій $y = f(\varphi(x))$ можна керуватися такими простими твердженнями:

- 1) якщо функція $z = \varphi(x)$ парна, то складна функція також парна;
- 2) якщо функція $y = f(z)$ і $z = \varphi(x)$ непарні, то складна функція непарна;
- 3) якщо $z = \varphi(x)$ непарна, а функція $y = f(x)$ парна, то складна функція парна;
- 4) якщо функція $z = \varphi(x)$ періодична, то і складна функція $y = f(\varphi(x))$ періодична, причому її період може бути меншим за період функції $z = \varphi(x)$, але не більшим; їх періоди збігаються, якщо функція f строго монотонна.

Зручно користуватися такими твердженнями:

- 1) сума скінченного числа парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією;
- 2) добуток парних функцій є парною функцією;
- 3) добуток непарних функцій є парною функцією, якщо число функцій-множників – парне число, і непарною, якщо число функцій-множників непарне;
- 4) добуток(частка) парної і непарної функції є функцією непарною.

Дослідимо функції та побудуємо їх графіки.

Приклади

1. Побудувати графік функції $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

Розв'язання

1. Область визначення функції $f(x): X = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Функція парна. Тому її графік симетричний відносно осі ординат.
3. Функція не є періодичною. Це впливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

4. Графік функції перетинає вісь ординат у точці $(0,1)$. Нулі функції відсутні. Отже, графік функції не перетинає вісь абсцис.

5. Дослідимо функцію на монотонність та екстремум. Для цього знайдемо похідну та критичні точки:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}; \quad \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0.$$

Звідки $x = 0$ – критична точка.

Для $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0)$ обчислимо значення похідної для будь-якого значення аргументу, що належить цим проміжкам. Маємо $f'(x) > 0$. Отже, на цих проміжках функція зростає. Оскільки функція парна, то на проміжках $(0; 2) \cup (2; +\infty)$ вона спадає. Тоді точка $x = 0$ є точкою локального максимуму. Знайдемо його значення

$$f(0) = -1.$$

6. Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -16 \left(\frac{x}{(x^2 - 4)^2} \right)' = -16 \frac{(x - 4)^2 - x \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= -16 \frac{-3x^2 - 4}{(x^2 - 4)^3} = 16 \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3}. \end{aligned}$$

На проміжках $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ $f''(x) > 0$. Отже, графік функції опуклий вниз. На проміжку $(-2; 2)$ $f''(x) < 0$, а тому графік функції опуклий вгору.

Точки перегину відсутні.

7. Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad \text{Маємо} \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x(x^2 - 4)} = 0,$$

$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 1$, тоді пряма $y = 1$ є горизонтальною асимптотою для графіка функції.

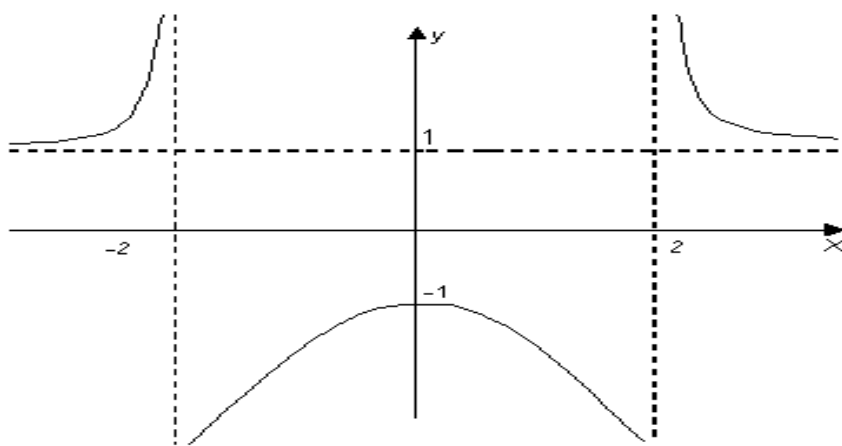
Дослідимо поведінку функції біля точок $x = 2$, $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + 4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{8}{4(x-2)} = 2 \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{(x-2)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + 4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{8}{(-4)(x+2)} = -2 \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{(x-2)} = -\infty.$$

Отже, в точці $x=2$ функція має розрив другого роду, а пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою. Враховуючи парність функції, робимо висновки, що пряма $x=-2$ також є вертикальною асимптотою.

8. Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік.



2. Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Розв'язання

1. Область існування — вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2. Функція не періодична (Функція $f(x)$, визначена на множині X , називається *періодичною на цій множині*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in X$ і $f(x + T) = f(x)$, $x \in X$).

3. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1 - (-x)^2} = -\frac{x^3}{1 - x^2} = -f(x)$, то функція непарна, тому

досліджуватимемо її лише для $x \geq 0$.

4. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0,0)$.

5. Похідна

$$y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

дорівнює нулю при $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ і не існує в точках $x = \pm 1$, але останні не входять в область визначення, тому критичними точками функції є точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

На інтервалі $(0; \infty)$ маємо:

якщо $x \in (0; 1)$, то $f'(x) > 0$ — функція зростає;

якщо $x \in (1; \sqrt{3})$, то $f'(x) > 0$ — функція зростає;

якщо $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$, то $f'(x) < 0$ — функція спадає; в точці $x = \sqrt{3}$ функція має локальний максимум: $y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2,6$.

6. Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}.$$

Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять в область визначення, то $x = 0$ — єдина критична точка. Маємо:

якщо $x \in (-1; 0)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла;

якщо $x \in (0; 1)$, $f''(x) > 0$ — крива вгнута;

якщо $x \in (1; +\infty)$, то $f''(x) < 0$ — крива опукла; точка $O(0; 0)$ — точка перегину.

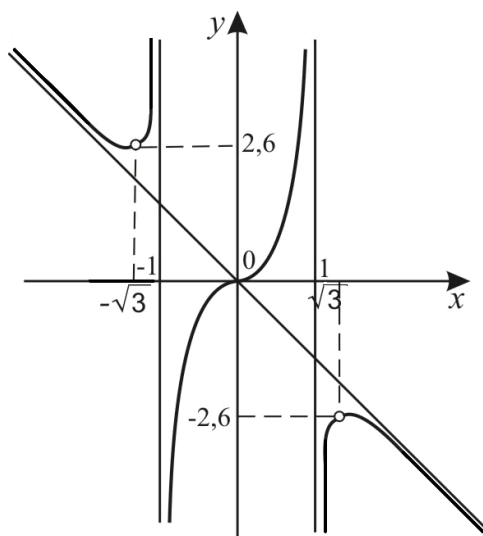
7. Функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду і $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \mp \infty$, тому впливає, що $x = 1$ — вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{(1-x^2)x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1)x \right) = 0$$

то при $x \rightarrow \pm \infty$ задана крива має похилу асимптоту $y = -x$.

8. Враховуючи проведені дослідження і непарність функції, будуємо графік.



5.1.3. Інтегрування диференціальних біномів

Інтеграли від диференціального бінома - це інтеграли виду

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

де m, n, p – раціональні числа, $a \neq 0, b \neq 0$, а вираз виду $x^m (a + bx^n)^p$ називається *диференціальним біномом*.

Підстановкою $t = x^n$ ми зводимо його до інтеграла

$$I = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bt)^p dt.$$

Тоді можна вказати три випадки, за яких диференціальний біном обчислюється в скінченному вигляді:

1) p – ціле число (нуль, від’ємне або додатне). Тоді інтеграл I зводиться до інтеграла типу

$$I = \int R \left(x, x^{\frac{m_1}{k_1}}, x^{\frac{m_2}{k_2}}, x^{\frac{m_3}{k_3}} \right) dx.$$

Тобто інтеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n .

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}$.

Розв’язання. Тут $p = -2$ є ціле число. Зробивши підстановку $x = t^6$, отримуємо

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+1)^2} = 3 \int \frac{2t^2 dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} u=t \\ dv = \frac{2t dt}{(t^2+1)^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} du = dt \\ v = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} \end{array} \Bigg| =$$

$$= 3 \left(-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) = 3 \left(-\frac{t}{t^2+1} + \arctg t \right) + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2} = 3 \arctg \sqrt[6]{x} - \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C.$$

2) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. Інтеграл I зводиться до інтеграла типу

$$I = \int R(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{k_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{k_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_s}{k_s}}) dx.$$

Тобто, у даному випадку підстановка $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p , раціоналізує інтеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Тут $p = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$. Оскільки p є дробове число, то

розглянемо дріб $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, яка є цілим числом. Робимо підстановку

$1 + \sqrt[4]{x} = t^3$. Тоді $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt$. Отже, отримуємо інтеграл

$$I = 12 \int \frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2} dt = 12 \int t^3(t^3-1) dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C.$$

Остаточно маємо

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{12}{7} \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3 \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C.$$

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число. Інтеграл I зводиться до інтеграла типу

$$I = \int (ax+b)^{\frac{m_1}{n}} (cx+l)^{\frac{m_2}{n}} dx.$$

В цьому випадку інтеграл $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ раціоналізується підстановкою $a + bx^n = x^n t^s$, де s – знаменник дробу p .

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$.

Розв’язання. Тут $p = -\frac{1}{2}$, $m = -4$, $n = 2$. Оскільки p є дробове число, то розглянемо $\frac{m+1}{n} = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$ є дробове число, а $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$ є ціле число. Застосуємо підстановку $1+x^2 = x^2 t^2$. Тоді $x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$, $dx = -\frac{tdt}{\sqrt{(t^2-1)^3}}$.

Тоді

$$I = -\int \frac{(t^2-1)^2 (t^2-1)^{1/2} \cdot t dt}{t \cdot (t^2-1)^{3/2}} = -\int (t^2-1) dt = t - \frac{t^3}{3} + C.$$

Оскільки $t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, то остаточно маємо

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C.$$

Видатний математик П.Л. Чебишев довів, що інтеграл від диференціального бінома береться в скінченному вигляді тільки в розглянутих трьох випадках.

При інтегруванні ірраціональних функцій не слід забувати про область існування підінтегральної функції. Наприклад, інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}}$ не має сенсу, оскільки підінтегральна функція не існує в жодній точці, а інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-20}}$ не має сенсу в дійсній області.

Частина 2

5.2.1 Застосування визначених інтегралів у фізиці

1. Маса неоднорідного стержня, розташованого на відрізку $[a, b]$, якщо лінійна густина стержня дорівнює $\rho(x)$, обчислюється за формулою

$$M = \int_a^b \rho(x) dx.$$

2. Статичні моменти M_x , M_y та моменти інерції I_x , I_y плоскої кривої

$y = f(x)$ обчислюються за формулами:

$$\text{а) відносно осі } Ox: M_x = \int_a^b y dS, \quad I_x = \int_a^b y^2 dS,$$

$$\text{б) відносно осі } Oy: M_y = \int_a^b x dS, \quad I_y = \int_a^b x^2 dS,$$

де $dS = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ - диференціал дуги кривої.

3. Статичні моменти та моменти інерції криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$, обчислюються за формулами:

$$\text{а) відносно осі } Ox: M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y dS = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx,$$

$$\text{б) відносно осі } Oy: M_y = \int_a^b x dS = \int_a^b x y dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 y dx.$$

У цих формулах $dS = y dx$ - диференціал площі криволінійної трапеції.

4. Координати центра ваги:

а) плоскої кривої $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$)

$$x_c = \frac{1}{l} \int_a^b x dS, \quad y_c = \frac{1}{l} \int_a^b y dS,$$

де l - довжина кривої, dS - диференціал дуги кривої;

б) криволінійної трапеції

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x dS, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS,$$

де $dS = y dx$, S - площа фігури.

5. Обчислення роботи. Робота змінної сили $F = F(x)$, яка діє у напрямку осі Ox на відрізку $[a, b]$, визначається за формулою

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

6. Довжина шляху S , який проходить матеріальна точка, що рухається зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Приклад. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 3 с.

Розв'язання. Маємо

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1) dt = (t^3 + 2t^2 + t) \Big|_0^3 = 48 \text{ (м)}$$

Приклад. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м^3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої $0,4 \times 0,7 \text{ м}$.

Розв'язання. Візьмемо систему координат так, щоб осі Oy і Ox відповідно містила верхню основу і бічну сторону вертикальної стіни акваріума. Щоб знайти силу тиску, скористаємось формулою (2).

Стінка має форму прямокутника, тому $f(x) = 0,7$, $x \in [0; 0,4]$. Оскільки межі інтегрування $a=0$ і $b=0,4$, то дістанемо

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 \cdot 0,7 \cdot x dx = 700g \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,4} = 56g.$$

Враховуючи, що $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, маємо $P \approx 548,8 \text{ Н}$.

Приклад. Сила пружності пружини, розтягнутої на $0,05 \text{ м}$, дорівнює 3 Н . Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці $0,05 \text{ м}$?

Розв'язання. За законом Гука сила F , яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягу або стиску, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу

або стиску, k - коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що $3 = k \cdot 0,05$, тобто $k = 60$, отже, $F = 60x$.

Маємо

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 0,075 \text{ (Дж)}.$$

5.2.2 Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є

Інтеграл Фур'є

Якщо **неперіодична функція** $f(x)$ задовольняє **умови Діріхле** і є абсолютно інтегрованою на всій числовій осі, то у кожній точці x її неперервності виконується рівність

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(w) \cdot \cos wx + b(w) \cdot \sin wx) dw \quad (1),$$

$$\text{де } a(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos wt dt, \quad b(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin wt dt \quad (2).$$

Легко побачити схожість інтеграла у правій частині формули (1) з рядом Фур'є (знак суми замінемо знаком інтеграла і замість цілочислового параметра n фігурує неперервний параметр w). У точках розриву ліва частина формули (1) має бути замінена на $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Формули (1) після підстановки виразів (2) і застосування формули косинуса різниці аргументів можна записати у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos w(t-x) dt, \quad (3)$$

де інтеграл справа називається **інтегралом Фур'є функції** $f(x)$.

Якщо $f(x)$ – **парна функція**, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos wt dt \right) \cos wx dw. \quad (4)$$

Якщо $f(x)$ – непарна функція, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sin wt \, dt \right) \sin wx \, dw. \quad (5)$$

Інтеграл Фур'є функції $f(x)$ в комплексній формі:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} \, dt \right) e^{iwx} \, dw. \quad (6)$$

На відміну від ряду Фур'є, який дає розклад функції на гармонічні коливання з дискретною мінливою частотою $\frac{n\pi}{l}, n \in N$, інтеграл Фур'є дає розклад функції на гармонічні коливання з неперервно мінливою від 0 до $+\infty$ частотою.

Перетворення Фур'є

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt - \text{косинус-перетворення Фур'є.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega - \text{обернене косинус-перетворення Фур'є.}$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt - \text{синус-перетворення Фур'є.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega - \text{обернене синус-перетворення Фур'є.}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} \, dt - \text{пряме перетворення Фур'є.}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega - \text{обернене перетворення Фур'є.}$$

Приклад. Подати інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0,5 & \text{при } x = 0, x = 1, \\ 0 & \text{при } x < 0, x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Задана функція задовольняє умови Діріхле (є кусково-неперервною, оскільки складається з трьох гладких частин: $y=0$ на $(-\infty;0)$, $y=1$ на $(0;1)$ і $y=0$ на $(1;\infty)$ і має дві точки розриву першого роду при $x=0$ і $x=1$). Очевидно, функція також абсолютно інтегрована на всій числовій осі, оскільки зовні відрізка $[0;1]$ вона дорівнює нулю і інтеграл від неї по всій числовій осі зводиться до інтеграла по відрізку $[0;1]$. Отже, така функція може бути подана інтегралом Фур'є. Маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dw \int_0^1 \cos w(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w(t-x)}{w} \Big|_0^1 dw = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w(1-x) + \sin wx}{w} dw = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w(1-2x)}{2}}{w} dw. \end{aligned}$$

У точках $x=0$ і $x=1$, де $f(x)$ має розрив, отримане подання зберігається,

оскільки у цих точках $f(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$.

При $x=0$ отримаємо $f(0) = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw$. Звідки

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с. (517 (07) Т29)
2. Клімова Н. П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання [Текст]: навч. посіб. / Клімова Н. П., Нерух О. Г., Ремаєва О. О. - Х. : СМІТ - 2012. - 318 с.: іл. - МОНМС України - ISBN 978-966-202894-2.
3. Призва Г. Й. Вища математика : підручник [Текст]: у 2 кн. / Призва Г. Й., Плахотник В. В., Гординський Л. Д., Васильченко І. П. - 2-ге вид., перероб. й доп.; за ред. Г. Л. Кулініча. - К. : Либідь - 2003. - 400 с.: іл. - ISBN 966-06-0229-4.
4. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) В55).
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с. (517 (07) В55).
6. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) В55).

Електронний документ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Упорядник СТОГНІЙ Надія Петрівна

Відповідальний випусковий О.Г. Нерух

Авторська редакція

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ЧАСТИНА 1

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою вищої математики.
Протокол № 2 від 04.10.2017 р.

ХАРКІВ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика», Частина 1 для студентів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія» [Електронний документ] / Упоряд. Н.П. Стогній. – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 95 с.

Упорядник Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

Рецензент: Н.П. Клімова, канд. техн. наук, проф. каф. ВМ

ЗМІСТ

1	Обчислення визначників	4
2	Матриці та дії з ними. Обернена матриця	8
3	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	16
4	Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів	23
5	Пряма та площина у просторі	33
6	Взаємне розташування прямої та площини	38
7	Обчислення границі функції	42
8	Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції	46
9	Неперервність функції. Точки розриву	49
10	Обчислення похідної функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна функції, заданої неявно чи параметрично. Диференціал функції	53
11	Похідні та диференціали вищих порядків	58
12	Правило Лопіталя	61
13	Невизначений інтеграл. Заміна змінних	64
14	Інтегрування частинами	73
15	Інтегрування раціональних функцій	75
16	Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій	80
17	Контрольна робота №1	90
	Література	91

ЗАНЯТТЯ 1. Обчислення визначників

1.1 Мета заняття. Вивчити правила обчислення визначників, вміти застосовувати властивості визначників для їх обчислення, навчитися застосовувати правило Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь.

1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Визначником 2-го порядку називається число, яке позначається

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ і дорівнює } a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}, \text{ тобто}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Символи a_{ij} називаються *елементами* визначника, причому перший індекс i вказує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Елементи a_{11} та a_{22} утворюють *головну діагональ* визначника; a_{21} та a_{12} – *побічну*.

Обчислення визначника 2-го порядку ілюструється схемою:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix},$$

тобто з добутку елементів головної діагоналі віднімається добуток елементів побічної.

Визначником 3-го порядку називається число, яке позначається

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

та дорівнює

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}, \text{ тобто}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Елементи a_{11} , a_{22} , a_{33} утворюють *головну діагональ* визначника, елементи a_{13} , a_{22} , a_{31} – *побічну*.

При обчисленні визначника 3-го порядку зручно користуватися *правилом трикутників* (або Саррюса). Згідно з ним доданки утворені з добутків елементів, місцеположення яких символічно можна вказати так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Визначником n -го порядку називається число, яке позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Методи обчислення визначника n -го порядку

1. Метод зниження порядку (метод розкладання за елементами стовпця (рядка)).
2. Метод приведення визначника до трикутного вигляду.
3. Метод рекурентних співвідношень.

Порядком визначника називається кількість рядків або стовпців (яких завжди однакова кількість).

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$ – індекси i, j приймають всі натуральні значення від 1 до n) визначника n -го порядку називається визначник $(n - 1)$ -го порядку, отриманий з початкового шляхом викреслювання рядка й стовпця, на перетині яких знаходиться обраний елемент.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається його мінор, який береться зі знаком «плюс», якщо сума $(i + j)$ – парне число, та зі знаком «мінус», якщо ця сума непарна, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Властивості визначника

1. Про рівноправність рядків і стовпців. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями, і навпаки.

Ця операція називається *транспонуванням*.

Надалі рядки й стовпці називатимемо *рядами* визначника.

2. При перестановці двох паралельних рядів визначник змінює знак на протилежний.
3. Визначник, що має два однакових ряди, дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи деякого ряду визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

5. Спільний множник елементів якого-небудь ряду визначника можна винести за знак визначника.

6. Якщо всі елементи деякого ряду визначника пропорційні відповідним елементам паралельного ряду, то такий визначник дорівнює нулю.

7. Якщо елементи якого-небудь ряду визначника являють собою суми двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох визначників, у першому з яких у відповідному ряду стоять перші доданки, а в другому – другі доданки; всі інші елементи у двох визначниках однакові.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на будь-яке число.

9. (Про розкладання визначника за елементами деякого ряду). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого ряду на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

10. (Про анулювання.) Сума добутків елементів якого-небудь ряду визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду дорівнює нулю.

Формули Крамера

Формули

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n},$$

називаються *формулами Крамера*, де Δ_i – визначник, отриманий з визначника Δ заміною i -го стовпця стовпцем вільних членів.

1.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення визначників другого та третього порядків. Які є види визначників?

2. Дайте означення мінору та алгебричного доповнення елемента визначника.

3. Сформулюйте властивості визначників.

4. Як змінюється визначник при перестановці стовпців?

5. Чому дорівнює визначник з нульовим стовпцем?

6. Сформулюйте правило розкладення визначника за рядком або стовпцем.

7. Які властивості визначників не змінюють його значення?

8. Наведіть формули Крамера для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

1.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [14] №№ 3.1, 3.7, 3.9, 3.27, 3.31, 3.113.

Домашні задачі: [14] №№ 3.2, 3.8, 3.10, 3.28, 3.114.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$: 1) за правилом трикутників; 2) за

допомогою розкладання по елементах першого рядка.

Розв'язання.

1. Використовуючи правило трикутників, отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - \\ - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

2. Використовуючи метод зниження порядку, розкладемо визначник за елементами першого рядка. Отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = \\ = 5 \cdot (-3) + 2 \cdot (-9 + 24) + (-6) = -15 + 30 - 6 = 9.$$

Приклад 2.

Розв'язати систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ за формулами Крамера.

Розв'язання.

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Знаходимо визначник системи Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 5 + 6 - 2 - 6 - 10 = -3 \neq 0$$

Обчислимо Δ_i , $i=1,2,3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(12 - 6) = -6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 14 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 16 = 15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

$$\text{Тоді } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{-3} = -5, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

ЗАНЯТТЯ 2. Матриці та дії з ними. Обернена матриця

2.1 Мета заняття. Вивчити поняття матриці, навчитися проводити лінійні операції над матрицями, помножувати матриці, вміти знаходити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень. Навчитися обчислювати обернену матрицю та застосовувати обернену матрицю при розв'язанні систем алгебраїчних рівнянь.

2.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків однакової довжини та n стовпців однакової довжини, яка записується у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або, скорочено, $A = (a_{ij})$, $A = \|a_{ij}\|$, де $i = \overline{1, m}$ (тобто $i = 1, 2, 3, \dots, m$) – номер

рядка, $j = \overline{1, n}$ (тобто $j = 1, 2, 3, \dots, n$) – номер стовпця.

Матрицю A називають матрицею розміру $m \times n$ й пишуть $A_{m \times n}$. Матриця, в якій $m = n$ називається *квадратною*. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею n -го порядку. Кожній квадратній матриці A можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником* (детермінантом) цієї матриці. Позначається ΔA , $|A|$ або $\det$. Причому неквадратна матриця визначника не має. Матриця $n \times n$ має n^2 чисел, її визначник – це одне число.

Числа a_{ij} , що утворюють матрицю, називають її *елементами*. Елементи, що знаходяться на діагоналі, яка йде з лівого верхнього кута, утворюють *головну діагональ* матриці.

Квадратна матриця, в якій всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Діагональна матриця, в якій кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною*. Вона позначається буквою E . Так, одинична матриця 3-го порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі елементи, які розташовані по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою*.

Лінійні операції над матрицями та властивості цих операцій

Сумою двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця

$C_{m \times n} = (c_{ij})$ така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), тобто складаються відповідні елементи та отримується матриця того ж порядку.

Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k називається матриця

$B_{m \times n} = (b_{ij})$ така, що $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), тобто на число k помножується кожний елемент матриці.

Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається *протилежною матриці* A .

Тоді різницю матриць $A - B$ можна визначити так: $A - B = A + (-B)$.

Операції додавання матриць та множення матриці на число називаються *лінійними операціями*.

Добутки матриць

Операція множення двох матриць застосовується тільки для узгоджених матриць, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n \times k} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times k} = (c_{ij})$, кожний елемент якої обчислюється за формулою

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k},$$

тобто елемент i -го рядка та j -го стовпця матриці добутку C дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B . Одержання елемента c_{ij} схематично зображується так:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) = B.$$

Матриця, отримана з даною заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею, транспонованою до даної. Позначається A^T .

Піднесення до степеня

Цілим позитивним ступенем A^n ($n > 1$) квадратної матриці A називається добуток n матриць рівних A , тобто

$$\underbrace{A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ разів}},$$

причому $A^0 = E$; $A^1 = A$, $A^n \cdot A^k = A^{n+k}$, $(A^n)^k = A^{nk}$.

Мінором k -го порядку матриці називається визначник k -го порядку, складений з елементів, що стоять на перетині виділених k рядків і k стовпців.

Найбільший з порядків мінорів даної матриці, відмінних від нуля, називається рангом матриці. Позначається r , $r(A)$ або $\text{rang} A$.

Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця n -го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Матрицею, союзною або приєднаною до матриці A , називається матриця

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} даної матриці A (воно визначається так само, як і алгебраїчне доповнення елемента визначника).

Теорема. Якщо A – квадратна матриця та A^* – союзна до неї, то $AA^* = A^*A = \Delta A \cdot E$.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриця A . Матриця A^{-1} має ті ж розміри, що й матриця A .

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо визначник ΔA не дорівнює нулю: $\Delta A \neq 0$. У протилежному випадку ($\Delta A = 0$) матриця A називається *виродженою*.

Теорема. Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ необхідно й достатньо, щоб матриця } A$$

була невиродженою.

Матричний спосіб розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай дана система n лінійних рівнянь із n невідомими

[illegible]

або в матричній формі $A \cdot X = B$.

Основна матриця A такої система квадратна. Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи*. Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система називається *невиродженою*.

Оскільки, $\Delta \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} й

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Помноживши обидві частини рівняння $AX = B$ ліворуч на матрицю A^{-1} , одержимо $A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}A = E$ й $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Відшукування розв'язку системи за формулою $X = A^{-1} \cdot B$ називають *матричним способом* розв'язання даної системи.

Елементарні перетворення матриці

Під елементарними перетвореннями матриці розумітимемо:

- транспонування матриці;
- множення будь-якого рядка (стовпця) матриці на будь-яке число, відмінне від нуля;
- додавання до будь-якого рядка (стовпця) будь-якого рядка (стовпця), яке помножено на будь-яке число;
- перестановка місцями будь-яких рядків (стовпців).

Для практики особливе значення має наступна теорема про інваріантність (незмінність) рангу матриці при її елементарних перетвореннях.

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

2.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Що таке матриця? Які є види матриць?
2. Які матриці вважаються рівними?
3. Які ви знаєте лінійні дії над матрицями?
4. Сформулюйте властивості додавання матриць.
5. Сформулюйте правило множення матриць.
6. Які ви знаєте властивості множення матриці на число?
7. Які ви знаєте властивості множення матриць?
8. Які матриці називаються комутуючими?
9. Чи змінюється матриця при транспонуванні?
10. Сформулюйте властивості транспонування матриць.
11. Дайте визначення союзної або приєднаної матриці.
12. Яка матриця відсутня у рівності $A \cdot _ = _ \cdot A = \Delta A \cdot E$?
13. Дайте визначення оберненої матриці.
14. Наведіть формулу, за якою знаходиться обернена матриця.
15. Для якої матриці існують обернена матриця?

16. Наведіть алгоритм побудови оберненої матриці.

17. Сформулюйте властивості обернених матриць.

18. В чому полягає матричний спосіб розв'язання системи алгебраїчних рівнянь?

19. Дайте означення мінору матриці. Чому дорівнює максимальний порядок мінору?

20. Дайте означення рангу матриці.

21. Перерахуйте елементарні перетворення матриці.

2.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [14] №№ 3.41, 3.43, 3.45, 3.51, 3.53, 3.75, 3.79, 3.59, 3.61, 3.117.

Домашні задачі: [14] №№ 3.42, 3.44, 3.48, 3.76, 3.60, 3.118.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Задані матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ знайти $A + B$.

Розв'язання.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Приклад 2.

Дано $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $k = 2$. Знайти $A \cdot k$.

Розв'язання.

$$A \cdot k = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Приклад 3.

Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти ті з добутоків AB , BA , які

мають сенс.

Розв'язання.

Добуток AB не є визначеним через те, що число стовбців матриці A не співпадає з числом рядків матриці B , тобто матриця A не є узгодженою з матрицею B , але матриця B узгоджена з матрицею A . Тому

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.

Обчислити

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 + (-2) + (-32) + 24 & 10 + 6 + (-16) + 0 & 10 + (-10) + (-48) + 48 \\ 18 + (-2) + (-48) + 32 & 18 + 6 + (-24) + 0 & 18 + (-10) + (-72) + 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.

Знайти A^{-1} , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Розв'язання.

1. Обчислимо визначник $\Delta A: \Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2. Знайдемо союзну матрицю $A^*: A_{11} = 1, A_{21} = -3, A_{12} = -(-1) = 1, A_{22} = 2$, тому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знаходимо $A^{-1}: A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Приклад 6.

Розв'язати систему
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$
 матричним способом.

Розв'язання.

У матричному вигляді система має вигляд $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

З матричного рівняння $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Розв'язання матричним методом можливо, якщо матриця A є невиродженою, тобто при $\det A = \Delta \neq 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 5 + 6 - 2 - 6 - 10 = -3 \neq 0,$$

тобто обернена матриця A^{-1} існує.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } X = A^{-1}B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$.

Приклад 7.

Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} s'_1 \leftrightarrow s'_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 + s_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} -3s'_1 + s'_2 \\ -2s'_1 + s'_3 \\ \sim \\ -2s'_1 + s'_3 \\ -5s_1 + s_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} s'_2/5 \\ s'_3/2 \\ \sim \\ s'_4/3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3s_2 + s_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

ЗАНЯТТЯ 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

3.1 Мета заняття. Вміти визначати сумісність системи лінійних неоднорідних рівнянь, розв'язувати системи методом Гауса, знаходити загальний та частинний розв'язки системи. Вміти розв'язувати системи лінійних однорідних рівнянь, знаходити фундаментальну систему розв'язків та записувати загальний розв'язок за допомогою фундаментальної системи розв'язків

3.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

Системою лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь, що містить m рівнянь і n невідомих, є система виду

[illegible]

де числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) називаються коефіцієнтами системи, числа b_i – вільними членами, x_n – невідомими, підлягаючими визначенню.

Таку систему зручно записувати в компактній *матричній формі*

$$AX = B.$$

Тут A – матриця коефіцієнтів системи, яка називається *основною матрицею*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначимо вектор-стовпець із невідомих x_i через X , вектор-стовпець із

вільних членів b_i через B : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матричний запис системи лінійних рівнянь має вигляд

$$AX = B \text{ .}$$

Розширеною матрицею системи називається матриця A системи, яка доповнена стовпцем вільних членів

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи називається матриця-стовпець X , що обертає матричне рівняння $AX = B$ у тотожність.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв’язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв’язку. В останньому випадку

кожний її розв'язок називається *частинним розв'язком* системи. Сукупність всіх часткових розв'язків називається *загальним розв'язком*.

Розв'язати систему – це означає з'ясувати, сумісна вона чи несумісна. Якщо система сумісна, знайти її загальний розв'язок.

Вичерпна відповідь на запитання про сумісність системи дає *теорема Кронекера-Капеллі*.

Теорема Кронекера-Капеллі

Система лінійних алгебраїчних рівнянь $AX = B$ сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці, тобто $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$.

Алгоритм розв'язання довільної системи лінійних рівнянь

1. Знайти ранги основної й розширеної матриць системи. Якщо $\text{rang} A \neq \text{rang} \bar{A}$, то система несумісна.

2. Якщо $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = r$, то система сумісна. Виділяють базисний мінор порядку r (нагадування: мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається базисним). Невідомі, коефіцієнти за яких становлять базисний мінор, називають *базисними*, а інші $(n - r)$ невідомих називають *вільними*.

3. Дану систему замінюють рівносильною їй системою, що складається з тих r рівнянь, у які ввійшли елементи базисного мінору (інші рівняння відкинути). Базисні невідомі залишають ліворуч, а вільні переносять у праві частини рівнянь.

4. Якщо число базисних невідомих дорівнює числу невідомих системи, то система має єдиний розв'язок, і його знаходять або матричним способом, або за формулами Крамера.

5. Якщо число базисних невідомих не дорівнює числу невідомих системи, то система має незліченну множину розв'язків. Із системи, отриманої на кроці 3, знаходять вираження базисних невідомих через вільні. Надаючи вільним невідомим довільні значення, одержимо *загальний розв'язок* системи. Розв'язок, що виходить із загального при конкретних значеннях вільних невідомих, називається *частинним розв'язком*.

Одним з найбільш універсальних і ефективних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є *метод Гауса*, що полягає в послідовному виключенні невідомих.

Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних рівнянь називається *однорідною* (СЛОР), якщо вільний член у кожному рівнянні дорівнює нулю. Нехай дана система лінійних однорідних рівнянь

[illegible]

яка в матричному вигляді має вигляд:

$$AX = 0,$$

де 0 – нульовий стовпець.

Очевидно, що однорідна система завжди сумісна ($r(A) = r(\bar{A})$) й має нульовий (тривіальний) розв’язок:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Умови існування ненульового розв'язку

СЛОР, крім тривіального, може мати й інші розв'язки (нетривіальні). Виникає запитання: за яких умов однорідна система має й ненульові розв'язки? Відповідь дають наступні теореми.

Теорема. Для того щоб система однорідних рівнянь мала ненульові розв'язки, необхідно й достатньо, щоб ранг r її основної матриці був менше числа n невідомих, тобто $r < n$.

Нехай дана однорідна система n лінійних рівнянь із n невідомими

[illegible]

Теорема. Для того, щоб однорідна система n лінійних рівнянь із n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно й достатньо, щоб визначник Δ основної матриці дорівнював нулю, тобто $\Delta = 0$.

Фундаментальна система розв'язків

Розв'язки $e_1, e_2, \dots, e_k$ називаються *фундаментальними*, якщо вони лінійно незалежні й всі інші розв'язки лінійно виражаються через них.

Теорема. (Про існування фундаментальної системи розв’язків). Нехай r – ранг матриці системи, n – число невідомих. Якщо $r(A) < n$, то існує $(n - r)$ лінійно незалежних розв’язків системи й будь-який інший розв’язок лінійно виражається через них.

З теореми маємо, що фундаментальна система розв'язків (ФСР), однорідної системи рівнянь, містить $(n-r)$ розв'язків, а будь-який інший розв'язок може бути поданий у вигляді лінійної комбінації ФСР, і формула

$$e = C_1 e_1 + \dots + C_{n-r} e_{n-r},$$

де $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – довільні числа, дає загальний розв'язок СЛОР. Кожний розв'язок, що виходить із загального при конкретних значеннях $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$, називається *частинним розв'язком СЛОР*.

3.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте визначення сумісної і несумісної, означеної і неозначеної системи алгебраїчних лінійних рівнянь.
2. Запишіть систему рівнянь у матричній формі.
3. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
4. Наведіть алгоритм розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.
5. Які невідомі називають «вільними»?
6. Скільки базисних невідомих має система?
7. Скільки вільних невідомих має система?
8. В чому полягає прямий хід методу Гауса розв'язання системи алгебраїчних рівнянь та матричний спосіб розв'язання системи алгебраїчних рівнянь?
9. В чому полягає обернений хід методу Гауса розв'язання системи алгебраїчних рівнянь?
10. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?
11. Сформулюйте критерій нетривіального розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь.
12. Сформулюйте властивості розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.
13. Дайте визначення фундаментальної системи розв'язків лінійної системи однорідних рівнянь.
14. Скільки існує лінійно незалежних розв'язків у системі лінійних однорідних рівнянь?
15. Якщо загальний розв'язок деякої СЛОР має, наприклад, вигляд $\{(3x_4 - 8x_3 - x_5, -5x_4 - 13x_3 + 2x_5, x_3, x_4, x_5) \mid \forall x_3, x_4, x_5\}$, то скільки розв'язків має фундаментальна система розв'язків?

3.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [14] №№ 3.123, 3.125, 3.127, 3.135, 3.137.

Домашні задачі: [14] №№ 3.124, 3.126, 3.128, 3.134, 3.136.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Дослідити на сумісність та розв'язати системи:

$$1) \begin{cases} x + y = 1; \\ 3x + 3y = -2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1.$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r(\bar{A}) = 2 \text{ через те, що } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким чином, $r(A) \neq r(\bar{A})$, отже, система несумісна.

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-s_1 + s_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -s_1 + s_3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2s_2 + s_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2.$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-s_1 + s_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ -s_1 + s_3 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2s_2 + s_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(\bar{A}) = 2.$$

Через те, що $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, то система сумісна і базисних невідомих буде 2. Беремо два перших рівняння:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Виразимо базисні невідомі x_3 та x_4 через вільні x_1 та x_2 :

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Використовуючи формули Крамера, маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-x_1+2x_2 & 1 \\ 1-x_1+2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1-4x_2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-x_1+2x_2 \\ 1 & -1-x_1+2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Отже, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ – загальний розв’язок. Нехай, наприклад, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, отримаємо один з часткових розв’язків: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Приклад 2.

Розв’язати систему лінійних неоднорідних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв’язання.

У результаті елементарних перетворень над розширеною матрицею системи

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array} \right) \begin{matrix} -2S_1+S_2 \\ -3S_1+S_3 \\ \sim \\ -7S_1+S_4 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{S_3-S_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} S_3-S_2 \\ \sim \\ -2S_3+S_4 \end{matrix}$$

початкова система доведена до східчастого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Тому $x_2 = -5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$, і загальний розв’язок має вигляд $\{(5x_4 - 8x_3 - 1, -5x_4 - 13x_3 - 3, x_3, x_4) | \forall x_3, x_4\}$.

Нехай, наприклад, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, тоді один з часткових розв’язків цієї системи $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Приклад 3.

Розв'язати систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, r(A) = 2, \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right), n = 3. \text{ Через те, що}$$

$r < n$, то система має нескінчену множину розв'язків. Знайдемо їх. Виразимо базисні невідомі x_1 та x_2 через вільну x_3 :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -22x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = -13x_3.$$

Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -22x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -13x_3$ – загальний розв'язок.

Якщо $x_3 = 0$, маємо один частковий розв'язок: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Якщо $x_3 = 1$, маємо другий частковий розв'язок: $x_1 = -22$, $x_2 = -13$, $x_3 = 1$ і т.д.

ЗАНЯТТЯ 4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

4.1 Мета заняття. Навчитися проводити лінійні дії з векторами, які задані в координатній формі, обчислювати скалярний добуток векторів, застосовувати скалярний добуток векторів для розв'язання геометричних і фізичних задач. Навчитися обчислювати векторний і мішаний добутки векторів, застосовувати ці добутки векторів для розв'язання геометричних і фізичних задач.

4.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Вектор – це спрямований відрізок, тобто відрізок, що має певну довжину й певний напрямок. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. У друкованому тексті букви, що позначають вектор, іноді виділяють напівжирним шрифтом, а стрілку зверху не ставлять – **a**. Вектор $\overrightarrow{BA}$ (у нього початок у точці B , а кінець у точці A) називається *протилежним* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$.

Лінійні операції над векторами

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання й віднімання векторів, а також множення вектора на число.

Базис на площині та у просторі. Розкладання вектора за базисом

Базисом на площині ($\vec{e}$) називається всякий ненульовий вектор цієї прямої. Будь-які два неколінеарних вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, взяті у певному порядку, утворюють *базис на площині*. *Базисом у просторі* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ назвемо три некомпланарних вектори, взятих у певному порядку.

Теорема. Будь-який вектор $\vec{a}$ на площині може бути єдиним способом розкладений по базисних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, тобто $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$.

Коефіцієнти α_1, α_2 в розкладанні $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$ називаються *координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$* .

Теорема. Будь-який вектор $\vec{a}$ у просторі може бути єдиним способом, розкладений по базисних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, тобто $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$.

Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно ортогональні та довжина кожного з них дорівнює одиниці.

Розкладання вектора по ортах координатних осей

Виділимо на координатних осях Ox , Oy й Oz одиничні вектори (орти), які позначимо $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ відповідно. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору й з'єднаємо його початок з початком координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Позначимо проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на осі Ox , Oy й Oz відповідно через a_x, a_y і a_z , тобто $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x, |\overrightarrow{OM_2}| = a_y, |\overrightarrow{OM_3}| = a_z$. Тоді

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Ця формула є основною у векторному численні й називається *розкладанням вектора по ортах координатних осей*. Числа a_x, a_y, a_z називаються *координатами вектора $\vec{a}$* , тобто координати вектора є його проекції на відповідні координатні осі. Цю векторну рівність часто записують у символічному вигляді: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Модуль вектора

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його проекцій на осі координат $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Напрямні косинуси

Нехай кути вектора $\vec{a}$ з осями Ox , Oy і Oz відповідно дорівнюють $\alpha = \left(\vec{a}, \vec{i} \right)$, $\beta = \left(\vec{a}, \vec{j} \right)$, $\gamma = \left(\vec{a}, \vec{k} \right)$. За властивістю проєкції вектора на вісь, маємо

$$\vec{a}_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad \vec{a}_y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad \vec{a}_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

$$\text{Або, що те саме, } \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$.

Дії над векторами, які задані проєкціями (координатами)

Нехай вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ й $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ задані своїми проєкціями на осі координат Ox , Oy , Oz або в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ розкладені по ортах координатних осей

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Лінійні операції над векторами

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над проєкціями цих векторів:

1) при додаванні (відніманні) векторів їхні однойменні координати складаються (віднімаються)

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$$

або

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z);$$

2) при множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x) \vec{i} + (\lambda a_y) \vec{j} + (\lambda a_z) \vec{k} \quad \text{або} \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Координати вектора

Координати вектора дорівнюють різницям відповідних координат його кінця та початку: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Відстань між точками A і B або довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ визначається за формулою

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (або $(\vec{a}, \vec{b})$). Таким чином, за означенням

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \text{ де } \varphi = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Виразення скалярного добутку через координати векторів, що перемножуються

Якщо $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Отже, скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їхніх однойменних координат.

Застосування скалярного добутку

1. Визначення кута φ між ненульовими векторами

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, тоді $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, тобто

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Звідси виходить умова перпендикулярності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2. Знаходження проекції одного вектора на напрямок іншого

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ і } \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|},$$

тобто

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \text{ і } \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

3. Знаходження роботи постійної сили

Нехай матеріальна точка переміщається прямолінійно з положення A в положення B під дією постійної сили $\vec{F}$, що утворює кут φ з переміщенням $\overrightarrow{AB} = \vec{S}$.

З фізики відомо, що робота сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ дорівнює

$$A = FS \cos \varphi \text{ тобто } A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Таким чином, робота постійної сили при прямолінійному переміщенні її точки прикладання дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.

Векторний добуток векторів та його властивості

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який:

1) перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) має довжину, що чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах, тобто $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi$, де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;

3) із кінця вектора $\vec{c}$ коротший поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видний таким, що виконується проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Властивості векторного добутку

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

3. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Векторний добуток у координатній формі

Якщо $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Застосування векторного добутку

1. Встановлення колінеарності векторів

Із властивості векторного добутку маємо: $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$, тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

2. Обчислення площі паралелограма й трикутника

З означення векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ його модуль чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на сторонах, тобто $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Тоді $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

3. Визначення моменту сили щодо точки

Нехай у точці A прикладена сила $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ й нехай O – деяка точка простору.

Відомо, що *моментом сили* $\vec{F}$ щодо точки O називається вектор $\vec{M}$, що проходить через точку O і відповідає умовам:

- 1) перпендикулярний площині, що проходить через точки O, A, B ;
- 2) чисельно дорівнює добутку сили $\vec{F}$ на плече ON

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin \varphi;$$

3) з кінця вектора $\vec{M}$ коротший поворот від вектора $\overrightarrow{OA}$ до $\overrightarrow{AB}$ видний таким, що виконується проти годинникової стрілки.

Таким чином,

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}.$$

4. Знаходження лінійної швидкості обертання

Швидкість $\vec{v}$ точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається формулою Ейлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O – деяка нерухома точка осі.

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{c}$ на результат векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ й позначається $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Геометричний зміст мішаного добутку визначає наступна теорема.

Теорема. Модуль мішаного добутку $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, як на ребрах.

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток не міняється при заміні місцями знаків векторного й скалярного множення, тобто

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

2. Мішаний добуток не міняється при циклічній перестановці його співмножників, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

3. Мішаний добуток міняє свій знак при перестановці будь-яких двох векторів-співмножників, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

4. Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

Мішаний добуток у координатній формі

Якщо $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Застосування мішаного добутку

1. Встановлення компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарні})$$

2. Визначення взаємної орієнтації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку (із кінця вектора $\vec{c}$ короткий поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видний таким, що виконується проти годинникової стрілки); якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то – ліву.

3. Знаходження об'єму паралелепіпеда й трикутної піраміди, побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$- \text{об'єм паралелепіпеда } V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ або } V = \text{mod} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$$- \text{об'єм трикутної піраміди } V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ або } V = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

4.3 Контрольні запитання і завдання

1. Що називається вектором?
2. Що називається довжиною вектора?
3. Дати означення орта вектора.
4. Які вектори називаються колінеарними; компланарними; рівними?
5. Що називається сумою, різницею двох векторів?
6. Як здійснюється додавання векторів за правилом трикутників і за правилом паралелограма?
7. Що називається добутком вектора на число?
8. Які операції над векторами називаються лінійними?
9. Що називається базисом на площині; у просторі?
10. Як здійснюється розкладання вектора по базисних векторах на площині; у просторі?
11. Який базис називається ортонормованим?
12. За якою формулою здійснюється розкладання вектора по ортах координатних осей?
13. Чому дорівнює модуль вектора в просторі; на площині?
14. Що називається напрямними косинусами вектора?
15. Чому дорівнює сума квадратів напрямних косинусів ненульового вектора?
16. Чому дорівнюють координати вектора $\vec{a} \pm \vec{b}$; $\lambda \vec{a}$, якщо
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}?$$
17. Як визначається рівність векторів, що задані своїми координатами?
18. Як визначається колінеарність векторів, що задані своїми координатами?
19. Що називається радіус-вектором точки $M(x, y, z)$?
20. Якщо відомі координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$?
21. Що називається скалярним добутком двох ненульових векторів?
22. Як обчислюється скалярний добуток двох векторів через проекцію одного вектора на інший?
23. Які властивості має скалярний добуток двох ненульових векторів?
24. Як виражається скалярний добуток двох ненульових векторів через їхні координати?
25. Чому дорівнює кут між двома векторами $\vec{a}$ й $\vec{b}$?
26. Як визначається проекція одного вектора на інший через їхній скалярний добуток?

27. Чому дорівнює робота постійної сили по переміщенню матеріальної точки?

28. Що називається векторним добутком двох ненульових векторів?

29. Які властивості має векторний добуток двох ненульових векторів?

30. Як виражається векторний добуток двох ненульових векторів через їхні координати?

31. Сформулювати й довести необхідну й достатню умову колінеарності двох векторів.

32. Як визначається площа паралелограма й площа трикутника через векторний добуток?

33. За якою формулою обчислюється момент сили щодо нерухливої точки?

34. Довести, що $\left|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\right| = 2|\vec{a} \times \vec{b}|$, тобто що площа паралелограма, побудованого на векторах, удвічі менше площі паралелограма, побудованого на діагоналях вихідного паралелограма.

35. Що називається мішаним добутком трьох ненульових векторів?

36. Який геометричний зміст мішаного добутку трьох ненульових векторів?

37. Які властивості має мішаний добуток трьох ненульових векторів?

38. Як виражається мішаний добуток трьох ненульових векторів через їхні координати?

39. У чому полягає необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів?

4.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [14] №№ 1.8, 1.12, 1.28, 1.37, 1.42(а, г), 1.51, 1.54.

Домашні задачі: [14] №№ 1.9, 1.19, 1.29, 1.42(б, в), 1.53(а), 1.58(а).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Знайти орт вектора $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ та його напрямні косинуси.

Розв'язання.

Відомо, що орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$ визначається як $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, де

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – довжина вектора. Через те, що $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$, то

$$\vec{a}_o = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}. \quad \text{Оскільки напрямні косинуси, які}$$

визначаються за формулами $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ та дорівнюють

координатам орта, то $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$.

Приклад 2.

Заданий трикутник з вершинами $A(1, -1, 2), B(2, 1, 2), C(1, 1, 4)$. Знайти:

1) координати орта $(\overrightarrow{AB})_0$;

2) $\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{j})$;

3) $pr_{\vec{j}} \overrightarrow{AB}$.

Розв'язання.

1) Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Через те, що $(\overrightarrow{AB})_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, де

$$\vec{a} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2 - 1, 1 - (-1), 2 - 2) = (1, 2, 0), \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad \text{то}$$

$$\text{координати орта } (\overrightarrow{AB})_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right);$$

2) Напрямний косинус вектора $\overrightarrow{AB}$ на базисний вектор $\vec{j}$ дорівнює координаті орта $(\overrightarrow{AB})_0$ на ось Oy : $\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

3) Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на базисний вектор $\vec{j}$ дорівнює координаті цього вектора на вісь Oy : $pr_{\vec{j}} \overrightarrow{AB} = 2$.

Приклад 3.

Дано $A(1, -1, 2), B(2, 1, 2), C(1, 1, 4)$. Знайти косинус кута $\cos \varphi$ між векторами

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}.$$

Розв'язання.

За формулою $\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, де

$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$. Через те, що координати вектора дорівнюють різницям відповідних координат точок його кінця та

початку, тобто $\vec{a} = (2 - 1, 1 - (-1), 2 - 2) = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (1 - 1, 1 - (-1), 4 - 2) = (0, 2, 2)$,
 маємо $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{4}{2\sqrt{10}}$.

ЗАНЯТТЯ 5. Пряма та площина у просторі

5.1 Мета заняття. Вміти застосовувати різні види рівнянь площини та прямої у просторі для розв'язання задач.

5.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Найпростішою поверхнею є площина, яку у просторі $Oxyz$ можна задавати різними способами.

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Рівняння площини в загальному вигляді: $Ax + By + Cz + D = 0$

Рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, де числа a, b і c вказують, які відрізки відтинає площина на осях координат.

Нормальне рівняння площини: $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = p$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Кут між площинами

Нехай площини P_1 й P_2 задані рівняннями в загальному вигляді.

$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$, де $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ – нормальний вектор P_1 і $P_1 \perp \vec{N}_1$;

$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$, де $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальний вектор P_2 і $P_2 \perp \vec{N}_2$.

Один із двох кутів між площинами P_1 й P_2 дорівнює куту φ між нормальними векторами $\vec{N}_1$ й $\vec{N}_2$, а інший – $(\pi - \varphi)$. Тоді $\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$ й

відповідно гострий кут визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Окремі випадки:

1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ – умова $\parallel$;

2) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ – умова $\perp$.

Пряма в просторі

Положення прямої L в просторі цілком визначається точкою M_0 на прямій та вектором $\vec{s}$, який є паралельним цій прямій. Вектор $\vec{s}$ називається *напрямним вектором прямої*. Нехай задані координати точки M_0 й напрямного вектора $\vec{s}$: $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s} = (m, n, p)$.

Векторно-параметричне рівняння прямої: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$.

Параметричні рівняння прямої:
$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn, \\ z - z_0 = tp. \end{cases}$$

Канонічні рівняння прямої:
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Рівняння прямої в загальному вигляді:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \text{ оскільки}$$

пряму в просторі можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ і $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут між прямими

Нехай прямі L_1 й L_2 задані канонічними рівняннями.

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \text{ де } M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1 \text{ й } \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) -$$

напрямний вектор L_1 ;

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \text{ де } M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2 \text{ й } \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2) -$$

напрямний вектор L_2 .

Під кутом між цими прямими розуміють кут між напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ й $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Тому, за формулою для косинуса кута між векторами, одержуємо $\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$ або

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Окремі випадки:

- 1) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ – умова $\parallel$;
- 2) $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ – умова $\perp$.

Кут між прямою й площиною

Нехай площина P задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, а пряма L канонічними рівняннями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

Під кутом між прямою й площиною розумітимемо кожний із двох суміжних кутів, утворених прямою та її проекцією на цю площину. Позначимо через φ кут між площиною P й прямою L , а через θ – кут між векторами $\vec{n} = (A, B, C)$ й $\vec{s} = (m, n, p)$. Тоді $\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$, $\cos \theta = \pm \sin \varphi$. Тому гострий кут визначається за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Окремі випадки:

- 1) $Am + Bn + Cp = 0$ – умова $\parallel$;

$$2) \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} - \text{умова } \perp.$$

5.3 Контрольні запитання та завдання

1. За якою формулою записується рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору? Як називається вектор, що є перпендикулярним площини?
2. Яке рівняння площини називається рівнянням у загальному вигляді?
3. Записати рівняння площини у відрізках. Що означають параметри, які входять у рівняння площини у відрізках?
4. Вивести нормальне рівняння площини.
5. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки.
6. Як обчислюється кут між площинами?
7. Записати формули обчислення відстані від точки до площини.
8. Як задається рівняння прямої у векторно-параметричному; параметричному; канонічному вигляді? Як називається вектор, що є колінеарним прямій?
9. Записати рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки.
10. Написати загальне рівняння прямої в просторі. Як перейти від загального рівняння прямої до канонічних?
11. Як знайти кут між прямими в просторі? Записати умови перпендикулярності й паралельності прямих.
12. Як знайти кут між прямою й площиною? Записати умови перпендикулярності й паралельності прямої та площини.

5.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [14] №№ 2.1 (а, б), 2.2 (а), 2.4 (2, 3), 2.9, 2.11, 2.13.

Домашні задачі: [14] №№ 2.1 (в), 2.4 (3), 2.10, 2.12, 2.14.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Задано координати вершин тетраедра $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,1,-2)$, $A_2(2,3,0)$, $A_3(1,1,4)$, $A_4(4,5,6)$. Знайти: 1) довжину ребра A_1A_2 ; 2) площу грані $A_1A_2A_3$; 3) об'єм тетраедра; 4) рівняння грані $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

1. Через те, що $\overrightarrow{A_1A_2} = (1, 2, 2)$, маємо: $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

2. Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$. Через те, що

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 6\vec{j} = 6(2\vec{i} - \vec{j}), \text{ то:}$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = 6|2\vec{i} - \vec{j}| = 6\sqrt{4+1} = 6\sqrt{5} \text{ і, отже, } S_{\Delta A_1A_2A_3} = 3\sqrt{5} (\text{кв.од}).$$

$$3. \quad V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-6(4-6)| = 2 (\text{куб.од}).$$

4. Запишемо рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Розклавши визначник за елементами першого рядка, матимемо:
 $2x - y - 1 = 0$.

Приклад 2. Написати рівняння прямої $l: \begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0, \\ 2z + y - 4x + 1 = 0 \end{cases}$ в канонічному і параметричному вигляді.

Розв'язання.

За умовою $\vec{N}_1 = (1; 2; 3)$, а $\vec{N}_2 = (2; 1; -4)$. Тому

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 10\vec{j} - 3\vec{k} = (-11; 10; -3).$$

Знайдемо координати якої-небудь точки, що належить прямій. Для цього покладемо $z = 0$ і розв'яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Таким чином, точка $M(-2; 3; 0)$ – одна з точок на прямій.

Підставляючи знайдені координати точки $M(-2;3;0)$ і координати напрямного вектора $\vec{S}=(-11;10;-3)$ в (3.30), одержуємо $\frac{x+2}{-11} = \frac{y-3}{10} = \frac{z}{-3}$.

Прирівняємо кожен дріб у попередніх рівняннях параметру t . Маємо

$$\begin{cases} \frac{x+2}{-11} = t, \\ \frac{y-3}{10} = t, \\ \frac{z}{-3} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11t - 2, \\ y = 10t + 3, \\ z = -3t. \end{cases}$$

ЗАНЯТТЯ 6. Взаємне розташування прямої та площини

6.1 Мета заняття. Оволодіти навичками розв'язування задач на взаємне розташування прямої та площини у просторі.

6.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Взаємне розташування прямої та площини

Нехай площина P й пряма L задані рівняннями:

$P: Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальний вектор площини;

$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, де $\vec{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор, а точка

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій.

Пряма паралельна площині

Пряма $L \parallel P$, якщо скалярний добуток $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ і точка $M_0 \notin P$:

$Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

Пряма лежить у площині

Пряма $L \in P$, якщо скалярний добуток $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ і точка $M_0 \in P$:

$Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Пряма перетинає площину

Пряма L перетинає P , якщо скалярний добуток $\vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$:

$Am + Bn + Cp \neq 0$.

Точку перетину прямої L і площини P знаходять за наступною схемою:

1) від канонічних рівнянь $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ перейти до параметричних

$$\text{рівнянь} \begin{cases} x-x_0 = tm, \\ y-y_0 = tn, \\ z-z_0 = tp; \end{cases}$$

2) підставити отримані значення $x = x_0 + tm$, $y = y_0 + tn$, $z = z_0 + tp$ у рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, одержати рівняння $A(x_0 + tm) + B(y_0 + tn) + C(z_0 + tp) + D = 0$, з якого визначити параметр $t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$;

3) для даного параметра t^* обчислити значення $x = x_0 + t^* m$, $y = y_0 + t^* n$, $z = z_0 + t^* p$, що відповідають координатам точки перетину L й P .

Відстань від точки до прямої в просторі

Відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, де $\vec{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій, визначається за формулою:

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\vec{s}|}.$$

Відстань між перехресними прямими

Відстань між перехресними прямі L_1 й L_2 , які задані канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \text{ де } M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1 \text{ й } \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) -$$

направний вектор L_1 ;

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \text{ де } M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2 \text{ й } \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2) -$$

направний вектор L_2 , визначається за формулою:

$$h = \frac{|\left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \right)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

6.3 Контрольні запитання та завдання

1. Як установлюється взаємне розташування прямої та площини?
2. Як обчислюється відстань від точки до прямої в просторі; між перехресними прямими?

6.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [14] №№ 2.5, 2.15, 2.19, 2.21 (а,в), 2.23, 2.27, 2.29.

Домашні задачі: [14] №№ 2.18 (а), 2.20 (а), 2.22.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Знайти точку M перетину прямої $L: \frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-3}$ і площини $P: x+2y-z-3=0$.

Розв'язання.

Від канонічних рівнянь $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ перейдемо до параметричних рівнянь $\begin{cases} x-x_0=tm, \\ y-y_0=tn, \\ z-z_0=tp, \end{cases}$ або $\begin{cases} x-4=2t, \\ y+3=2t, \\ z-1=-3t. \end{cases}$

Підставимо одержані значення $x=4+2t$, $y=-3+2t$, $z=1-3t$ в рівняння площини P . Отримаємо $4+2t+2(-3+2t)-(1-3t)-3=0$. Звідки параметр $t=\frac{2}{3}$.

Для даного параметра $t=t^*$ обчислимо значення $x=x_0+t^*m$, $y=y_0+t^*n$, $z=z_0+t^*p$, які відповідають точці M перетину L і P : $x=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$; $y=-3+\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}$; $z=1-2=-1$. Отже, $M\left(\frac{16}{3}, -\frac{5}{3}, -1\right)$.

Приклад 2. Визначити взаємне розміщення прямих $l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{3}$ і $l_2: \begin{cases} 3x+y-5z+3=0, \\ 2x+3y-8z-5=0. \end{cases}$

Розв'язання.

Напрямний вектор першої прямої $\vec{S}_1 = (1; -2; 3)$. Друга пряма задана загальними рівняннями, тобто як лінія перетину двох площин, що мають нормальні вектори $\vec{N}_1 = (3; 1; -5)$ і $\vec{N}_2 = (2; 3; -8)$. Отже, напрямний вектор другої прямої дорівнює:

$$\vec{S}_2 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 14\vec{j} + 7\vec{k} = (7; 14; 7).$$

Оскільки $\frac{7}{1} \neq \frac{14}{-2} \neq \frac{7}{3}$, то задані прямі непаралельні. Оскільки $7 \cdot 1 + 14 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 = 0 \rightarrow \vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$. Якщо напрямні вектори перпендикулярні, то і прямі l_1 і l_2 перпендикулярні.

Ми з'ясували, що прямі взаємно перпендикулярні. Залишилося визначити, чи перетинаються вони (належать одній площині), чи є мимобіжними.

Знайдемо координати точок M_1 і M_2 на кожній з прямих відповідно. З рівняння l_1 маємо $M_1(3; -2; 8)$. Координати точки M_2 знаходимо так: зафіксуємо одну змінну, наприклад x , поклавши $x = 0$, і розв'яжемо отриману систему двох рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{cases} y - 5z + 3 = 0, \\ 3y - 8z - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 7, \\ z = 2. \end{cases}$$

Таким чином, $M_2(0; 7; 2)$ – точка на прямій l_2 , а $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; 9; -6)$ – вектор, який розглядається в умові.

$$(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 14 & 7 \\ -3 & 9 & -6 \end{vmatrix} = -84 + 42 + 189 + 126 - 63 - 84 = 126 \neq 0.$$

Висновок: прямі є мимобіжні перпендикулярні.

Приклад 3. Дослідити взаємне розміщення заданих прямої $l: \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$ і площини $P: x - 3y - z + 8 = 0$.

Розв'язання.

За умовою $\vec{N} = (1; -3; -1)$, $\vec{S} = (3; -2; 4)$. Тому

$$\vec{N} \cdot \vec{S} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 = 3 + 6 - 4 = 5 \neq 0$$

Маємо $\frac{1}{3} \neq \frac{-3}{-2} \neq \frac{-1}{4}$. Отже, пряма l перетинає задану площину P під деяким

кутом φ . Отримуємо $\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{S}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{S}|} = \frac{5}{\sqrt{1+9+1} \cdot \sqrt{9+4+16}} = \frac{5}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{319}}$,

звідки $\varphi = \arcsin \frac{5}{\sqrt{319}}$.

ЗАНЯТТЯ 7-9. Обчислення границі функції (6 годин)

7-9.1. Мета заняття. Проілюструвати зміст поняття границі функції, ознайомитися з правилами її обчислення на прикладі алгебраїчних рівнянь. Навчити використовувати першу важливу границю при знаходженні границь дробів, які містять тригонометричні та зворотні тригонометричні функції.

7-9.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Означення границі функції

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо ця функція визначена в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , і якщо границя послідовності $\{f(x_n)\}$ існує і дорівнює A , яка б не була послідовність $\{x_n\}$, збіжна до x_0 і така, що $x_n \neq x_0$ для всіх n . Таким чином,

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow x_0 \\ x_n \neq x_0}} f(x_n) = A.$$

Ця границя A повинна бути однаковою для всіх таких послідовностей, вона і є границею $f(x)$.

Границю функції можна означити безпосередньо, не користуючись границею послідовності.

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , і якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що залежить від ε , таке, що із нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, позначається

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x),$$

тобто

$$\left(A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , і якщо із того, що різниця $x - x_0$ нескінченно мала випливає, що різниця $f(x) - A$ теж нескінченно мала, тобто

$$\left(A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \right) \Leftrightarrow (x - x_0 \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) - A \rightarrow 0)$$

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$, якщо для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться число $M > 0$ таке, що із нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, при цьому пишуть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \text{ або } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \text{ або } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Таким чином співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ залишається правильним і в тому випадку, коли $x_0 = +\infty$ або $x_0 = -\infty$.

Властивості границі функції

1. Якщо $f(x) = C = \text{const}$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, тобто границя сталої величини дорівнює цій сталій.

2. Нехай існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B$.

3. Нехай існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = AB$.

4. Нехай існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}$ за умови, що $B \neq 0$.

4. Сталий множник можна виносити за знак границі, тобто якщо $C = \text{const}$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ оскільки } \lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою* при $x \rightarrow x_0$, якщо існує окіл з центром в точці x_0 , в якому функція $y = f(x)$ обмежена.

Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою* при $x \rightarrow \infty$, якщо існує число $M > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівності $|x| > M$, функція $y = f(x)$ обмежена.

Якщо границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ є скінченною, то функція $f(x)$ обмежена при $x \rightarrow x_0$.

Односторонні границі

Число A_1 називається *лівою границею функції* $f(x)$ в точці x_0 , якщо вона визначена на деякому напівінтервалі $[a, x_0)$ і для неї існує $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_1$.

Аналогічно, якщо $f(x)$ визначена в напівінтервалі $(x_0, b]$ і існує $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$, то A_2 називається *правою границею функції* $f(x)$.

Ліва і права границі називають *односторонніми*. Їх ще прийнято позначати $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Рівності $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ еквівалентні $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, тобто якщо односторонні границі існують і рівні в точці x_0 , то існує границя функції $f(x)$.

Обчисленні границь

При обчисленні границь перш за все необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням. При цьому можуть отриматись або визначені значення або невизначеності різних типів. Якщо ж функція в точці x_0 невизначена або $x \rightarrow \infty$, то можуть зустрітись співвідношення вигляду:

$\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty \cdot 0$, ∞^0 , 1^∞ , які називаються *невизначеностями*.

Перша важлива границя

Першою важливою називається границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

З цього випливає ще кілька необхідних формул.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \text{заміна } \arcsin x = t, \quad x = \sin t, \quad \text{якщо } x \rightarrow 0, \quad \text{то}$$

$$t \rightarrow 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

$$\text{Аналогічно } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

7-9.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Яка функція називається обмеженою?
2. Дайте означення границі функції на мові послідовностей.
3. Дайте означення границі функції на мові " $\delta - \varepsilon$ ".
4. Визначте поняття границі функції на нескінченності.
5. Дайте означення односторонніх границь.
6. Наведіть першу важливу границю, наслідки з неї.
7. Які три наслідки випливають з першої важливої границі?
8. В якому випадку можливо робити заміну змінної при обчисленні

границі?

7-9.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 1.44(а,б), 1.45-1.48, 1.49-1.51, 1.57-1.60, 1.63, 1.79-1.82, 1.87.

Домашні задачі: [15] №№ 1.44(в), 1.52, 1.53, 1.61, 1.62, 1.83-1.85, 1.88.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow -2} (5x^3 - 2x^2 + 40)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (5x^3 - 2x^2 + 40) = \lim_{x \rightarrow -2} 5x^3 - \lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow -2} 40 = 5 \lim_{x \rightarrow -2} x^3 - 2 \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 40 = 8.$$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{(x-2)(x+5)}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x - 10} = \left(\frac{0}{0} \right) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x+5} = \frac{4}{7}.$$

Приклад 3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{x+2} - 1}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{x+2} - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+5} - 2)(\sqrt{x+5} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 1)(\sqrt{x+2} + 1)} \times \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+5} + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+5-4)}{(x+2-1)} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+5} + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{(x+1)}{(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+5} + 2} \right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{6-x-3}{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Приклад 5. Обчислити границю $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

ЗАНЯТТЯ 10. Неперервність функції. Точки розриву

10.1. Мета заняття. Оволодіти основними поняттями, навчитися досліджувати функцію на неперервність в точці зліва й справа, на відріжку. Ознайомитися з точками розриву функції та вміти класифікувати їх.

10.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Неперервність функції в точці і на відріжку

Нехай $y = f(x)$ і аргумент x змінюється від значення $x = x_1$, до значення $x = x_2$. Різницю між цими значеннями аргументу називають приростом аргументу і позначають Δx . Отже, $\Delta x = x_2 - x_1$.

При $x = x_1$ маємо $y = f(x_1)$, а при $x = x_2$ маємо $y = f(x_2)$. Різницю

функції, яка викликана зміною аргументу, називають приростом функції і позначають Δy . Отже, $\Delta y = y_2 - y_1$.

Якщо нескінченно малому приросту аргументу Δx в точці $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст Δy функції, що визначена в точці x_0 та в її околі, то функцію $y = f(x)$ називають **неперервною при $x = x_0$ або в точці x_0** .

Функцію $y = f(x)$ називають **неперервною при $x = x_0$** , якщо:

1) $y = f(x)$ існує при $x = x_0$ та в деякому околі точки x_0 ;

2) існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ незалежно від способу прямування x до x_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

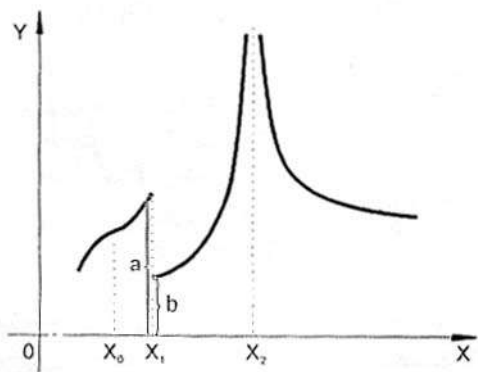
Якщо функція неперервна в кожній точці деякого інтервалу (a, b) , то її називають **неперервною в інтервалу (a, b)** . Якщо функція визначена при $x = a$ і $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, то кажуть, що $f(x)$ **неперервна в точці $x = a$ справа**.

Якщо $f(a)$ визначена при $x = b$ і $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$, то кажуть, що $f(x)$ в точці $x = b$ **неперервна зліва**.

Якщо $f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу (a, b) та неперервна на кінцях інтервалу, відповідно зліва та справа, то функцію $f(x)$ називають **неперервною на відрізку $[a, b]$** .

Класифікація точок розриву функції

Якщо при деякому $x = x_1$ будь-яка із умов неперервності не виконується, то кажуть, що функція в цій точці має розрив, а точку x_1 називають **точкою розриву функції** (див. рис.).



Поняття неперервності та розриву функції можна наочно показати на графіку функції.

В околі точки x_0 графік має вигляд неперервної лінії. При будь-якому прямуванні $x \rightarrow x_0$ $f(x) \rightarrow f(x_0)$. При наближенні x до x_1 зліва $f(x) \rightarrow a$, а при $x \rightarrow x_2$ справа $f(x) \rightarrow b$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ залежить від способу

прямування x до x_1 . В точці x_2 умова неперервності функції також не виконується тому, що $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = \infty$, тобто не існує скінченної границі.

Розриви функції бувають усувні та неусувні:

1) якщо функція $f(x)$ не визначена в точці x , або визначена, але мають місце співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) \neq f(x_1)$, то розрив в точці x_1

називають **усувним**. В цьому випадку функцію можна визначити або змінити її значення в точці x , так, щоб виконувались рівності

$$\lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) = f(x_1)$$

2) **неусувні** розриви поділяються на розриви першого та другого роду:

а) якщо одnobічні границі функції $\lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x)$ існують та скінченні, але не рівні між собою, то x_1 називають **точкою розриву першого роду**, а різницю $\lim_{x \rightarrow x_1+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_1-0} f(x)$ називають стрибком функції;

б) якщо хоч би одна з одnobічних границь не існує або дорівнює ∞ , то розрив в цій точці називають **розривом другого роду**.

10.3. Контрольні запитання і завдання.

1. Дати означення неперервної функції в точці зліва.
2. Дати означення неперервної функції в точці справа.
3. Дати означення неперервної функції на відрізку.
4. Дати означення точки розриву функції.
5. Яка класифікація точок розриву функції?

10.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 1.136 (а, в, д, є), 1.137 (а, в).

Домашні задачі: [15] №№ 1.136 (б, г, е, ж), 1.137 (б, г).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Для даної функції знайти точки розриву $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$.

Розв'язання.

Кожна з функцій $x^2 + 1$ та $2 - x$ є неперервною, тому дана функція може мати розрив лише в одній точці $x=1$. Досліджуємо дану функцію на неперервність.

Знаходимо границю функції зліва та справа:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2 \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (2 - x) = 1$$

Отримали, що $f(1-0) \neq f(1+0)$. Отже, точка $x=1$ є точкою розриву першого роду (точкою стрибка).

Приклад 2. Для даної функції знайти точки розриву $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Розв'язання.

В нашому випадку $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$. Отримали, що $f(1-0) \neq f(1+0)$. Тобто, маємо точка $x=1$ є точкою розриву першого роду (точкою стрибка).

ЗАНЯТТЯ 11. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції

11.1. Мета заняття. Навчитися використовувати другу важливу границю при знаходженні границь дробів, які містять тригонометричні та зворотні тригонометричні функції. Ознайомитися з поняттям порядку малості функції та навчити визначати його, навчитися застосовувати еквівалентні функції при знаходженні границь.

11.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

У вищій математиці зустрічається введене ще в XVIIст. число, яке позначається буквою «e».

Теорема: Змінна величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ має границю, яка знаходиться між числами 2 та 3.

Границя змінної величини $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ є число e .

Число « e » можна визначити як границю функції $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при прямуванні x до ∞ : $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

За цією формулою розкривається невизначеність вигляду (1^∞) .

Якщо в останній рівності припустити $\alpha = \frac{1}{x}$, а потім повернутися до попереднього позначення незалежної змінної, то одержимо

$$e = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Стале число « e » ірраціональне і приблизно дорівнює 2,71828...

Число « e », прийняте за основу системи логарифмів, прийнято називати натуральними. Натуральний логарифм x позначається символом $\ln x$.

Встановимо зв'язок між натуральними і десятковими логарифмами. Для цього, логарифмуючи по основі « e » тотожність $x = a^{\log_a x}$, одержимо рівність $\ln x = \ln a \log_a x$. При $x = e$, ця рівність дає

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{Наслідки: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1 \text{ для } a > 0, a \neq 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1.$$

Нескінченно малі та нескінченно великі функції

1.1. Інтервал вигляду

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.,$$

що містить точку x_0 називається $\mathcal{E}$ -околом точки x_0 . Позначається $O_\varepsilon(x_0)$ - окіл з центром в точці x_0 радіуса $\mathcal{E}$. Рівносильним є співвідношення:

$$(x \in O_\varepsilon(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon).$$

Якщо при $x \rightarrow x_0$ функція $\alpha(x)$ визначена в $O_\varepsilon(x_0)$ та $\alpha(x) \rightarrow 0$, то $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* (н.м.) *функцією*.

Якщо функція $\beta(x)$ визначена в $O_\varepsilon(x_0)$ та $\beta(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то її називають *нескінченно великою*.

Відомо, що дві сталі величини (a і b) можна порівнювати між собою або за допомогою дій віднімання ($a-b$), або ділення $\left(\frac{a}{b}\right)$. При порівнянні н.м. $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ до згаданих операцій додається ще перехід до границі, коли $x \rightarrow x_0$ (x_0 – скінченне або ∞).

Якщо відношення $\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$ двох нескінченно малих має скінченну границю

A відмінну від нуля, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0$, а, значить, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \frac{1}{A} \neq \infty$, то

$\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку*.

Якщо відношення двох н.м. дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \infty \right)$$

то $\alpha_1(x)$ називається *нескінченно малою вищого порядку* в порівнянні з н.м. $\alpha_2(x)$, а н.м. $\alpha_2(x)$ є н.м. *нижчого порядку* в порівнянні з $\alpha_1(x)$.

Н.м. $\alpha_1(x)$ називається *н.м. k -того порядку* відносно н.м. $\alpha_2(x)$, якщо $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2^k(x)$ є н.м. одного порядку, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A \neq 0$.

Якщо границя відношення двох н.м. $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ дорівнює одиниці, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються *еквівалентними н.м.* і при цьому пишуть $\alpha_1(x) \approx \alpha_2(x)$.

Таблиця основних еквівалентних н.м.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sin x \approx x$; | 6. $1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$; |
| 2. $\arcsin x \approx x$; | 7. $\ln(1+x) \approx x$; |
| 3. $\operatorname{tg} x \approx x$; | 8. $e^x - 1 \approx x$; |
| 4. $\arcsin x \approx x$; | 9. $a^x - 1 \approx x \ln a$. |
| 5. $\operatorname{arctg} x \approx x$; | |

11.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Наведіть другу важливу границю, наслідки з неї.
2. До якого класу чисел відноситься число « e »?

3. Що таке експоненціальна функція та натуральний логарифм?
4. Визначте нескінченно малі функції, їх властивості.
5. Як порівнюють нескінченно малі функції?
6. Які нескінченно малі функції називають еквівалентними?
7. Наведіть ланцюжок еквівалентних нескінченно малих.

11.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 1.107, 1.108-1.114, 1.117, 1.118, 1.130(а, б), 1.131(а, б), 1.132(а, б), 1.133(а, б), 1.134(а, б), 1.119.

Домашні задачі: [15] №№ 1.115, 1.116, 1.120, 1.121, 1.130(в, г), 1.131(в), 1.132(в), 1.133(в), 1.134(в), 1.122.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{3n}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{3n} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n} \right)^{\frac{1}{4} \cdot 3} = e^{\frac{3}{4}}.$$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+1}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+1} &= (1^\infty) = \text{Виділяємо цілу частину} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3+(-1-3)}{2x+3}\right)^{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-4}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{-4(x+1)}{2x+3}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Довести, що $\alpha_1 = 1 - \cos x$ є н.м. вищого порядку в порівнянні з $\alpha_2 = x$ при $x \rightarrow 0$.

Розв'язання.

$$\text{Розглянемо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x} = 0.$$

Отже $\alpha_1 = 1 - \cos x$ є н.м. вищого порядку в порівнянні з $\alpha_2 = x$. Це означає, що α_1 швидше зменшується ніж α_2 .

Приклад 4. Обчислити границю застосовуючи еквівалентні функції.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 5x} = \frac{1-1}{0} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left| \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \cdot \sin x}{\arcsin^2 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot 3x \cdot x}{(5x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6}{25} = -\frac{6}{25}.$$

ЗАНЯТТЯ 12-13. Обчислення похідної функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна функції, заданої неявно чи параметрично. Диференціал функції (4 години)

12-13.1 Мета заняття. З'ясувати зміст поняття похідної; навчитися використовувати правила диференціювання та таблицю похідних; знаходити похідні явно заданих функцій. Продемонструвати роль правил диференціювання неявно заданої та параметричної функцій; навчити використовувати логарифмічне диференціювання. Пояснити геометричний зміст диференціалу функції.

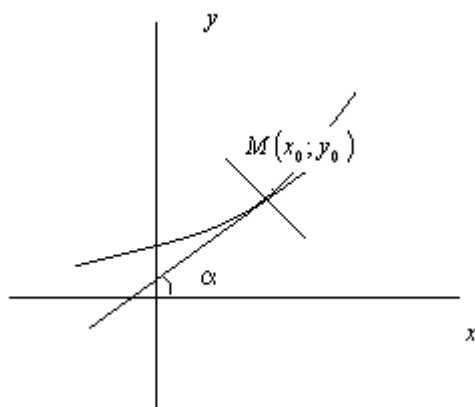
12-13.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому інтервалі $(a; b)$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

За означенням: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Похідна функції $f(x)$ є деяка функція $f'(x)$, отримана за вказаним правилом із даної функції.



Функція $y = f(x)$, що має похідну у кожній точці інтервалу $(a; b)$ називається диференційованою на цьому інтервалі. Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням.

Фізичний зміст похідної: якщо функція $y = f(x)$ описує який-небудь

фізичний процес, то похідна y' є швидкістю протікання цього процесу.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ у точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої дорівнює x . Рівняння дотичної має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0).$$

Його легко отримати із умови перпендикулярності дотичної та нормалі у точці $x = x_0$.

Основні правила диференціювання

$$1 \quad (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$2 \quad (u \cdot v)' = u'v + uv' \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

$$3 \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} \cdot u', \quad \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{Cu'}{u^2}.$$

$$4 \quad y = f(\varphi(x)); \quad y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій ($u = u(x)$):

$$1 \quad (C)' = 0.$$

$$2 \quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$3 \quad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \quad (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$4 \quad (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u', \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$5 \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$6 \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$7 \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$8 \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$9 \quad (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$10 \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$11 \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$12 (\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$13 (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$$

$$14 (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$$

$$15 (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$$

$$16 (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

Для обчислення похідних потрібно знати тільки правила диференціювання і формули похідних основних елементарних функцій, строго дотримуватися цих правил при виконанні вправ. Також потрібно пам'ятати, що $(x)' = 1$.

Диференціювання функції, що задана неявно

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, що не розв'язується відносно y .

Якщо неявна функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної від y по x треба продиференціювати це рівняння по x , розглядаючи при цьому y як функцію від x , і одержане потім рівняння розв'язати відносно y' .

Диференціювання функції, що задана параметрично

Нехай залежність між аргументом x і функцією y задана параметрично у вигляді двох рівнянь:
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t - \text{параметр.}$$

Тоді похідна такої функції знаходиться за формулою: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Логарифмічне диференціювання

У деяких випадках для знаходження похідної задану функцію спочатку логарифмують, а потім одержаний результат диференціюють. Таку операцію називають логарифмічним диференціюванням.

Існують функції, похідні яких знаходять тільки за допомогою логарифмічного диференціювання. До них належить так звана степеневі - показникова функція $y = u^v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$\ln y = v \cdot \ln u \Rightarrow \frac{1}{y} y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot v' \right)$$

$$\text{тобто } y' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot v' \right).$$

Диференціал функції

Диференціалом першого порядку функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, що лінійно залежить від приросту незалежної змінної x $\Delta x = dx$. Диференціал dy функції дорівнює її похідній помноженій на диференціал незалежної змінної x $dy = y' dx = f'(x) dx$.

Оскільки диференціал функції відрізняється від її приросту на нескінченно малу вищого порядку в порівнянні з величиною dx , то $\Delta y \approx dy$ або $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot dx$, звідки $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$.

Одержана формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малому прирості Δx незалежної змінної x .

12-13.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Що таке похідна функції, який її геометричний та фізичний зміст?
2. Основні правила диференціювання.
3. Написати таблицю похідних основних елементарних функцій.
4. Які функції називаються функціями заданими неявно та параметрично?
5. Написати формули для похідної функції, яка задана параметрично.
6. Написати основну логарифмічну тотожність.
7. Сформулюйте означення диференціала. Який його геометричний зміст?
8. Як знаходяться похідні першого порядку від функції, заданої параметрично?
9. Як знаходяться похідні першого порядку від функції, заданої неявно?

12-13.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 2.1 – 2.3, 2.10, 2.8, 2.15, 2.44, 2.65-2.68, 2.73, 2.93, 2.83, 2.86.

Домашні задачі: [15] №№ 2.4-2.6, 2.9, 2.12, 2.69, 2.94, 2.20, 2.23, 2.85.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \sin 2x \cdot \ln 3x$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x \cdot \ln 3x)' = (\sin 2x)' \cdot \ln 3x + (\sin 2x) \cdot (\ln 3x)' = \\ &= \cos 2x \cdot (2x)' \cdot \ln 3x + \sin 2x \cdot \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = 2 \cos 2x \cdot \ln 3x + \sin 2x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3 = \\ &= 2 \cos 2x \cdot \ln 3x + \frac{\sin 2x}{x}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2 + 1}{e^{2x}}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 + 1}{e^{2x}} \right)' = \frac{(x^2 + 1)' \cdot e^{2x} - (e^{2x})' \cdot (x^2 + 1)}{(e^{2x})^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}(2x)'(x^2 + 1)}{e^{4x}} = \\ &= \frac{2xe^{2x} - e^{2x}2(x^2 + 1)}{e^{4x}} = \frac{2e^{2x}(x - x^2 - 1)}{e^{4x}}. \\ y'(0) &= \frac{2e^{2 \cdot 0} \cdot (0 - 0^2 - 1)}{e^{4 \cdot 0}} = \frac{2 \cdot (-1)}{1} = -2, \text{ так як } e^0 = 1. \text{ Відповідь: } y'(0) = -2. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \cos(\ln^{12} 2x)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= (\cos(\ln^{12} 2x))' = (-\sin(\ln^{12} 2x)) \cdot (\ln^{12} 2x)' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x (\ln 2x)' = \\ &= -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{2x} (2x)' = -12 \sin(\ln^{12} 2x) \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції y , що задана рівнянням $x^2 + y^3 - 2xy = 0$.

Розв'язання.

Функція y задана неявно. Диференціюємо обидві частини даної рівності по x : $2x + 3y^2 y' - 2(x'y + xy') = 0$; $2x + 3y^2 y' - 2(x'y + xy') = 0$.

$$\text{Звідки знаходимо } y'(3y^2 - 2x) = 2y - 2x \quad y' = \frac{2y - 2x}{3y^2 - 2x}.$$

Приклад 5. Нехай $\begin{cases} x = t^3 + 2t + 1, \\ y = t^2 - 3t + 8. \end{cases}$ Знайти y'_x

Розв'язання.

Маємо $x'_t = 3t^2 + 2$, $y'_t = 2t - 3$. Значить, $y'_t = \frac{2t - 3}{3t^2 + 2}$.

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = (\cos 3x)^{x^3+5}$.

Розв'язання.

Скористаємося логарифмічним диференціюванням:

$$\ln y = (x^3 + 5) \cdot \ln \cos 3x; \quad \frac{1}{y} y' = 3x^2 \cdot \ln \cos 3x + (x^3 + 5) \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x);$$

$$y' = (\cos 3x)^{x^3+5} \cdot (3x^2 \cdot \ln \cos 3x - 3(x^3 + 5) \cdot \operatorname{tg} 3x).$$

Приклад 7. Знайти диференціал функції $y = x^4 - 5^x$.

Розв'язання.

Знаходимо похідну даної функції і, помноживши її на диференціал незалежної змінної, одержимо шуканий диференціал $y' = 4x^3 - 5^x \cdot \ln 5$,
 $dy = (4x^3 - 5^x \cdot \ln 5)dx$.

ЗАНЯТТЯ 14. Похідні та диференціали вищих порядків

14.1 Мета заняття. Навчитися знаходити похідні та диференціали вищих порядків явно заданих функцій, а також заданих неявно чи параметрично.

14.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Похідні вищих порядків явно заданої функції

Похідна $y' = f'(x)$ функції $y = f(x)$ є також функція від x і називається *похідною першого порядку*.

Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається y'' або $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Тобто, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається y''' або $\frac{d^3 y}{dx^3}$. Тобто, $y''' = (y'')'$.

Похідною n -го порядку (або n -ю похідною) називається похідна від похідної $(n-1)$ порядку $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Похідні порядку вище першого, називаються похідними вищих порядків.

Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно у вигляді рівняння $F(x; y) = 0$. Продиференціюємо це рівняння по x і розв'яжемо одержане рівняння відносно y' . Таким чином знайдено похідну першого порядку. Продиференціюємо по x першу похідну і одержимо другу похідну від неявно заданої функції. До неї ввійдуть x, y, y' . Підставимо уже знайдене значення y' у вираз другої похідної і виразимо y'' через x і y . Аналогічно діємо для знаходження похідної третього порядку.

Похідні вищих порядків від функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ Як

відомо, перша похідна y'_x обчислюється за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Друга

похідна від функції, що задана параметрично - за формулою $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. За

аналогією, $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ і так далі.

Диференціали функцій вищих порядків

Диференціалом n -го порядку функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціалу $(n-1)$ -го порядку цієї функції, тобто $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Якщо дана функції $y = f(x)$, де x незалежна змінна, то $d^2 y = y'' dx^2$, $d^3 y = y''' dx^3, \dots, d^n y = y^{(n)} dx^n$.

Якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $d^2 y = y'' \cdot (du)^2 + y' \cdot d^2 u$, причому диференціювання функції y виконується по змінній u .

14.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення похідної n -го порядку.
2. Як знаходяться похідні другого порядку від функції, заданої параметрично?
3. Як знаходяться похідні другого порядку від функції, заданої неявно?
4. Дайте означення диференціала n -го порядку.

14.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 2.104, 2.106, 2.109, 2.114, 2.119, 2.131, 2.132, 2.137, 2.138, 2.144.

Домашні задачі: [15] №№ 2.108, 2.112, 2.113, 2.139, 2.145.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти похідну третього порядку функції $y = \sin 2x$.

Розв'язання.

$$y' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x. \quad y'' = (2 \cos 2x)' = 2(-2 \sin 2x) = -4 \sin 2x.$$

$$y''' = (-4 \sin 2x)' = -4 \cdot 2 \cos 2x = -8 \cos 2x.$$

Приклад 2. Знайти y'' , якщо $2x^2 + y^2 = 2$.

Розв'язання.

Диференціюємо рівняння $2x^2 + y^2 = 2$ по x : $4x + 2y \cdot y' = 0$. Звідки

$$y' = -\frac{2x}{y}. \text{ Далі маємо: } y'' = -\frac{2y - 2xy'}{y^2}, \text{ тобто}$$

$$y'' = -\frac{2y - 2x\left(-\frac{2x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{2y + \frac{4x^2}{y}}{y^2} = -\frac{2y^2 + 4x^2}{y^3} = -2\frac{y^2 + 2x^2}{y^3} = -2\frac{2}{y^3} = -\frac{4}{y^3},$$

так як $2x^2 + y^2 = 2$ за умовою. Значить, $y'' = -\frac{4}{y^3}$.

Приклад 3. Знайти другу похідну функції $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\text{За формулою } y'_x = \frac{(\sin 2t)'_t}{(\cos 2t)'_t} = \frac{2 \cos 2t}{-2 \sin 2t} = -\operatorname{ctg} 2t. \text{ Тоді за формулою}$$

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} 2t)'_t}{(\cos 2t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 2t} \cdot 2}{-2 \sin 2t} = -\frac{1}{\sin^3 2t}.$$

Приклад 4. Знайти диференціал другого порядку від функції $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

Розв'язання.

За формулою диференціала другого порядку $d^2 y = d(dy) = y'' \cdot d x^2$,

$$\text{маємо: } y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \rightarrow y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \right)' = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$$

$$d^2 y = y'' \cdot d x^2 = -\frac{x \cdot d x^2}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$$

ЗАНЯТТЯ 15. Правило Лопіталя

15.1 Мета заняття. Продемонструвати невизначеності усіх типів та навчитися розкривати їх за допомогою правила Лопіталя.

15.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Правило Лопіталя

Нехай функції $f(x), \varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (1)$$

Вважатимемо, що x_0 – скінченне число: $|x_0| < +\infty$. Довизначемо функції $f(x), \varphi(x)$ в точці $x = x_0$, поклавши $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Тоді ці функції будуть неперервні в точці x_0 . розглянемо відрізок $[x_0; x]$, що належить даному околу. Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[x_0; x]$, диференційовні на (x_0, x) і $\forall x \in (x_0; x) : \varphi'(x) \neq 0$.

Тому за теоремою Коші знайдеться точка $c \in (x_0; x)$, для якої

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad \text{або} \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

тому, що $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Оскільки за умовою $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує $c \rightarrow x_0$,

якщо $x \rightarrow x_0$, то з рівності маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило справедливе і в тому випадку, коли $x_0 = \infty$. Дійсно, поклавши $x = \frac{1}{z}$, маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то теорему і можна застосувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Взагалі, правило можна застосувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x \rightarrow x_0$. Цю саму

границю матиме й відношення функцій: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило дає змогу розкривати невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Сформулюємо теорему, яка стосується розкриття невизначеності виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Вираз (1) називають правилом обчислення границь, або *правилом Лопітала* за іменем математика, який опублікував його.

Зауважимо, що правило Лопітала застосовується лише для розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, які називають *основними*. Відомі ще й такі невизначеності, як $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (∞^0) , (1^∞) , (0^0) покажемо, як ці невизначеності зводяться до основних.

а) Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$ можна

звести до основних так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0},$$

або

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

б) Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність виду $(\infty - \infty)$ зводиться

до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}.$$

в) Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi(x) \ln f(x))}$$

і невизначеність виду (0^0) зводиться до невизначеності $(0 \cdot \infty)$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності (1^∞) і (∞^0) .

Таким чином, щоб розкрити невизначеності $(0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (\infty^0), (1^\infty), (0^0)$, їх треба спочатку звести до основних і лише після цього застосувати правило Лопіталю.

15.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Сформулюйте правило Лопіталю для розкриття невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ і

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

2. Як розкриваються степеневі невизначеності з використанням правила Лопіталю?

15.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 2.196, 2.208, 2.212, 2.218, 2.224, 2.230, 2.234.

Домашні задачі: [15] №№ 2.197, 2.201, 2.213, 2.219, 2.225.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити границю за правилом Лопіталя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \{1^\infty\} = A \text{ (врахували, що } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \text{ а } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x = \infty).$$

$$A = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x} = e^B.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\sin^2 2x}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\sin x \cdot \cos x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1. \text{ Остаточню маємо: } A = e^B = e^{-1}.$$

ЗАНЯТТЯ 16. Невизначений інтеграл. Заміна змінних

16.1 Мета заняття. Вивчити поняття первісної та невизначеного інтеграла, зрозуміти геометричний зміст невизначеного інтеграла, знати основні властивості невизначеного інтеграла, вивчити таблицю основних інтегралів і вміти її застосовувати; вміти виконувати заміну змінних при інтегруванні функцій

16.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функція $F(x)$, що визначена на проміжку X , називається **первісною** функції $f(x)$, якщо $F(x)$ неперервна на проміжку X , у кожній внутрішній точці проміжку X функція $F(x)$ є диференційованою і

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)dx \quad \forall x \in X.$$

Теорема (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на X , то для будь-якого числа $C \in \mathbb{R}$ функція $F(x) + C$ є також первісною функції $f(x)$ на X .

Теорема (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

Множина всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називається **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ на цьому проміжку та позначається $\int f(x)dx$. Отже, якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Символ $\int$ називають **знаком невизначеного інтеграла** (читається “інтеграл”, що означає “цілий”, “увесь”), функцію $f(x)$ – **підінтегральною функцією**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, букву x – **змінною інтегрування**.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ при фіксованому C являє таку криву $y = F(x) + C$, у кожній точці якої напрям дотичної визначається значенням підінтегральної функції в цій точці.

Властивості невизначеного інтеграла

Нехай існує $\int f(x)dx = F(x) + C$ та $F'(x) = f(x)$.

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad \forall x \in X$.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d \int f(x)dx = f(x)dx \quad \forall x \in X$.

3. Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{або} \quad \int dF(x) = F(x) + C \quad \forall x \in X.$$

4. Сталій множник можна виносити за знак інтегрування, тобто

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad \forall x \in X \quad \text{та} \quad \forall k \in \mathbb{R} (k \neq 0).$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій, тобто

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \quad \forall x \in X.$$

6. Властивість *інваріантності* формул інтегрування.

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = u(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

При обчисленні невизначених інтегралів корисно мати на увазі наступні правила.

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.
2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.
3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів

Щоб успішно застосовувати інтегральне числення під час розв'язання задач, необхідно насамперед оволодіти технікою знаходження невизначених інтегралів від елементарних функцій. Одним із основних моментів успішного оволодіння технікою інтегрування елементарних функцій є досконале знання таблиці основних інтегралів. Ця таблиця є сукупністю формул, які необхідно знати напам'ять, і складена за таблицею похідних із використанням властивості інваріантності формули інтегрування. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона дорівнюватиме підінтегральній функції.

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, яка на проміжку X має неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

1. $\int 0 \cdot du = C$.
2. $\int 1 \cdot du = \int du = u + C$.
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$ або $\int \frac{du}{u} = \ln |Cu|$.
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.
6. $\int e^u du = e^u + C$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
8. $\int \cos u du = \sin u + C$.
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arcctg} u + C.$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos x + C.$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$
15. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C.$
16. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$
18. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$
19. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$
20. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$
21. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$
22. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Інтеграли **1 – 22** називаються *табличними інтегралами*, за їх допомогою можна знаходити й інші інтеграли. Мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод ґрунтується на розкладі підінтегральної функції в лінійну комбінацію більш простих функцій та на застосуванні властивостей невизначеного інтеграла:

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_i| > 0 \right).$$

Метод заміни змінної інтегрування

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження шуканого інтеграла до табличного, тобто перейти до безпосереднього інтегрування. Такий метод називається методом заміни змінної.

Теорема (про інтегрування за допомогою заміни змінної). Нехай $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку X , тобто $\int f(x)dx = F(x) + C \quad \forall x \in X$, а функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку T , множиною значень якої є проміжок X . Тоді справджується рівність

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \quad \forall t \in T.$$

1. Метод підведення під знак диференціала

Припустимо, що в інтегралі $\int f(x)dx = F(x) + C$ від підінтегральної функції $f(x)$ можна відокремити функцію $\varphi(x) = u$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du.$$

Тоді за теоремою маємо

$$\int f(x)dx = \int g(u)du.$$

Вказане перетворення називається підведенням функції $u = \varphi(x)$ під знак диференціала.

При операції підведення під знак диференціала часто використовують такі перетворення диференціала:

$$dx = d(x + a); \quad dx = \frac{1}{a}d(ax); \quad dx = \frac{1}{a}d(ax + b);$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x); \quad \frac{dx}{x+a} = d(\ln(x+a)); \quad x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1} + a)$$

$$\cos x dx = d(\sin x); \quad \sin x dx = -d(\cos x); \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x); \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x); \quad \frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x).$$

2. Метод підстановки

При знаходженні невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ користуються підстановкою $x = \psi(u)$, де функція $\psi(u)$ є, по-перше, диференційованою

$\forall u \in U$, по-друге, $\psi'(u) \neq 0 \forall u \in U$ та, по-третє, має обернену функцію $u = \psi^{-1}(x)$.

16.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення первісної функції. Наведіть приклади.
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Поясніть, чому при інтегруванні з'являється довільна стала.
4. В чому полягає геометричний зміст сукупності первісних функцій?
5. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
6. Наведіть приклади використання властивості інваріантності невизначеного інтеграла.
7. Як складається таблиця основних інтегралів?
8. В чому полягає метод безпосереднього інтегрування?
9. Напишіть формулу заміни змінної у невизначеному інтегралі. За яких умов ця формула справедлива?

16.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 3.1 – 3.15 (непарні), 3.17 – 3.35.

Домашні задачі: [15] №№ 3.2 – 3.14 (парні), 3.16 – 3.36.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $I = \int \left(3\sin x - 5 + 4x^3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$.

Розв'язання.

Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

$$I = 3 \int \sin x dx - 5 \int dx + 4 \int x^3 dx - \int \frac{dx}{x} + 6 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Використовуючи формули 7, 2, 3, 4, 12 таблиці основних інтегралів, знаходимо:

$$3 \int \sin x dx = 3(-\cos x + C_1) = -3\cos x + 3C_1;$$

$$-5 \int dx = -5(x + C_2) = -5x - 5C_2;$$

$$4 \int x^3 dx = 4 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_3 \right) = x^4 + 4C_3;$$

$$-\int \frac{dx}{x} = -(\ln|x| + C_4);$$

$$6\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 6(\arcsin x + C_5) = 6\arcsin x + C$$

Таким чином,

$$I = -3\cos x - 5x + x^4 - \ln|x| + 6\arcsin x + (3C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4 + 6C_5).$$

Всі довільні сталі підсумовуємо, результат позначаємо однією буквою, тому $C = 3C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4 + 6C_5$, та остаточно отримуємо

$$\int \left(3\sin x - 5 + 4x^3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -3\cos x - 5x + x^4 - \ln|x| + 6\arcsin x + C.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Розв'язання.

Інтеграл не є табличним, тому перетворимо підінтегральну функцію. Оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то інтеграл можна записати у вигляді

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Застосовуючи властивість 5 невизначеного інтеграла та використовуючи формули 9 і 10, остаточно маємо

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл $I = \int (x^2 + 5)^3 dx.$

Розв'язання.

За формулою знаходимо $(x^2 + 5)^3 = x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int (x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125) dx = \frac{x^7}{7} + \frac{15x^5}{5} + \frac{75x^3}{3} + 125x + C = \\ &= \frac{x^7}{7} + 3x^5 + 25x^3 + 125x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{9 + 2x^2}{x^2(9 + x^2)} dx$.

Розв'язання.

Оскільки $9 + 2x^2 = (9 + x^2) + x^2$, то

$$I = \int \frac{(9 + x^2) + x^2}{x^2(9 + x^2)} dx = \int \frac{(9 + x^2)}{x^2(9 + x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(9 + x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{9 + x^2}.$$

За формулою 3 маємо $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_1 = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C_1$. За

формулою 13, де $a = 3$, маємо $\int \frac{dx}{9 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C_2$. Тоді

$$I = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C, \text{ де } C = C_1 + C_2.$$

Приклад 5.

Обчислити інтеграл $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Розв'язання.

Оскільки $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, а $d(1 - x^2) = -2x dx$, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \int \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \\ &= \int \arcsin x d(\arcsin x) + \frac{1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \arcsin x d(\arcsin x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{2} + \sqrt{1 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.

Обчислити інтеграл $I = \int e^{x^2} x dx$.

Розв'язання.

По-перше, можна застосувати підстановку $u = x^2$, звідки $du = 2x dx$, а $x dx = \frac{1}{2} du$. Підставимо в інтеграл і матимемо $I = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$.

Повернемося до попередньої змінної x . Тоді

$$I = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

По-друге, можна ввести функцію під знак диференціала, тобто записати $x dx = \frac{1}{2} dx^2$. Тоді на підставі властивості інваріантності маємо

$$I = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Приклад 7.

Обчислити інтеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

По-перше, для обчислення інтеграла можна застосувати підстановку

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + C = \\ &= -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

По-друге, можна ввести функцію під знак диференціала

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

ЗАНЯТТЯ 17. Інтегрування частинами

17.1 Мета заняття. Вміти застосовувати основні методи інтегрування, вміти використовувати формулу інтегрування частинами.

17.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Метод інтегрування частинами базується на використанні формули диференціювання добутку двох функцій.

Теорема (про формулу інтегрування частинами). Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ такі, що $\forall x \in X$ існують $u'(x)$ і $v'(x)$. Тоді

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Формула $\int u dv = uv - \int v du$ називається **формулою інтегрування частинами невизначеного інтеграла**.

Ефективність використання формули інтегрування частинами залежить від умінь вибрати потрібні u і dv , що здобувається практикою.

Але можна вказати на деякі типи інтегралів, які зручно інтегрувати частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin bxdx$, $\int P(x)\cos bxdx$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня від x , $a \neq 0, b \neq 0$ – дійсні числа. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$. Після застосування n раз формули інтегрування частинами ці інтеграли зводяться відповідно до інтегралів $\int e^{ax}dx$, $\int \sin bxdx$, $\int \cos bxdx$.

2. Інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin x$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\arctg xdx$, $\int P(x)\text{arcctg} xdx$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня від x . Тут за u слід брати множники $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \text{arcctg} x$.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$, $a \neq 0, b \neq 0$ – дійсні числа.

Після дворазового застосування формули інтегрування частинами у правій частині отримуємо заданий інтеграл. Це дає змогу знайти інтеграл як розв'язок рівняння.

17.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Напишіть формулу інтегрування частинами. За яких умов ця формула справедлива?

2. Наведіть типи інтегралів, обчислення яких доцільно виконувати методом інтегрування частинами.

17.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 3.101 – 3.115 (непарні).

Домашні задачі: [15] №№ 3.100 – 3.114 (парні).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $I = \int (x+1) \sin x dx$.

Розв'язання.

Позначимо $u = x+1$, $dv = \sin x dx$. Знайдемо du і v , які містяться в правій частині формули інтегрування частинами: $du = (x+1)' dx = dx$, а $v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x$, а. Таким чином,

$$I = -(x+1) \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Нехай тепер $u = \sin x$, $du = \cos x dx$. Тоді $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$, $du = \cos x dx$. Отже,

$$I = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx.$$

У правій частині отримали невизначений інтеграл, який є складнішим, ніж заданий. Отже, необхідно зробити заміну $u = x+1$, $dv = \sin x dx$.

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $I = \int \ln^2 x dx$.

Розв'язання.

Нехай $u = \ln^2 x$, $dv = dx$. Тоді $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$, $v = \int dx = x$. Отже,

$$I = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx.$$

Невизначений інтеграл $\int \ln x dx$ також інтегруватимемо частинами. Нехай

$u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$. Отже,

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Остаточо маємо $I = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C$.

Формалізований запис такий:

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2(x \ln x - \int dx) = \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C.$$

ЗАНЯТТЯ 18. Інтегрування раціональних функцій

18.1 Мета заняття. Вміти інтегрувати найпростіші раціональні дроби, навчитися розкладати правильний дріб на найпростіші дроби та інтегрувати будь-яку раціональну функцію. Навчитися інтегрувати різні класи тригонометричних функцій.

18.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Розглянемо дробово-раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ – той же многочлен, а $Q(x)$ – многочлен степеня m , який має вигляд $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m$, де b_j ($j = \overline{0, m}$) – дійсні числа.

Згадаємо деякі знання з теорії многочленів і алгебраїчних дробів. Алгебраїчний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника, тобто $n < m$. Коли $n \geq m$, то алгебраїчний дріб називають *неправильним*.

Якщо даний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильний, то з нього можна виділити цілу

частину, а саме многочлен $G(x) = c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k$, ділячи чисельник на знаменник:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $R(x)$ – многочлен, степінь якого менше, ніж степінь многочлена $Q(x)$,

тобто $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильний алгебраїчний дріб.

Отже,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int G(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Ця рівність показує, що інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного дробу. Інтеграл від многочлена знаходиться безпосередньо. Оскільки правильний дріб можна представити у вигляді скінченної суми елементарних дробів, то інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться до інтегралів від елементарних дробів.

Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування

Найпростішими дробами називаються правильні дроби виглядів:

$$1) \frac{A}{x-a}; 2) \frac{A}{(x-a)^n}; 3) \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; 4) \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де $n \geq 2$ – ціле додатне число, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має комплексні корені.

Розглянемо інтеграли від елементарних алгебраїчних дробів деяких типів.

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A \ln |x-a| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \text{ за умови } \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Для інтегрування цього дробу виділимо у чисельнику похідну знаменника. Для цього додамо і віднімемо число $\frac{Mp}{2}$ у чисельнику. Матимемо

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\left(Mx + \frac{Mp}{2}\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \\ &= \int \frac{Mx + \frac{Mp}{2}}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}.$$

Таким чином, одержали в першому інтегралі, що у чисельнику вираз $(2x+p)$ є похідною знаменника, а другий інтеграл заміною $t = x + \frac{p}{2}$ зводиться до табличного $\int \frac{dt}{t^2+k^2}$, де $k = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, оскільки за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$

Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{k} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \end{aligned}$$

В першому інтегралі опущений знак модуля, бо $x^2+px+q > 0$

Розклад правильного раціонального дробу на найпростіші дроби

Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\frac{R(x)}{Q(x)}$ розкладено на

множники $Q(x) = a_0(x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+lx+s)^\nu$, де

$\alpha + \dots + \beta + 2(\mu + \dots + \nu) = m$, тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \dots + \dots + \frac{L_\nu x+F_\nu}{(x^2+lx+s)^\nu}, \end{aligned}$$

де $A_1, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, \dots, B_\beta, M_1, N_1, \dots, M_\mu, N_\mu, L_1, F_1, \dots, L_\nu, F_\nu$ – невідомі коефіцієнти. Цей вираз називається *розкладом правильного раціонального дробу на найпростіші дробу*.

Методи обчислення невідомих коефіцієнтів.

1. Метод невизначених коефіцієнтів.
2. Метод окремих значень аргумента.

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Як було показано раніше, інтегрування неправильного дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного дробу.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int G(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Інтеграл від многочлена знаходиться безпосередньо. Основні труднощі виникають при інтегруванні правильних раціональних дробів.

Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$, треба:

- розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;

- виразити правильний дріб $\frac{R(x)}{Q(x)}$ через суму елементарних раціональних дробів із невизначеними коефіцієнтами та відшукати ці коефіцієнти;

- знайти $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ як суму інтегралів від знайдених елементарних раціональних дробів.

18.3 Контрольні запитання і завдання.

1. До інтегралів яких типів приводить інтегрування раціональних дробів?
2. Які дробу називають найпростішими?
3. Як інтегруються найпростіші раціональні дробу?
4. Наведіть схему інтегрування правильних раціональних дробів.
5. За допомогою яких методів обчислюються невідомі коефіцієнти при розкладанні правильного раціонального дробу на найпростіші?
6. Як інтегрується неправильний раціональний дріб?

18.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 3.121, 3.123, 3.125, 3.128.

Домашні задачі: [15] №№ 3.122, 3.124, 3.126, 3.129.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{(2x+3)dx}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є правильним дробом. Знайдемо корені знаменника:

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1).$$

Знаменник має різні дійсні корені $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$. Тому дріб розкладається на найпростіші дробі I типу:

$$\frac{2x+3}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Для знаходження чисел A, B, C можна скористатися методом окремих значень аргумента.

Підставимо $x = 0$ в ліву частину рівняння, попередньо помноживши її на x . Отримаємо $A = -\frac{3}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$.

Підставимо $x = 2$ в ліву частину рівняння, попередньо помноживши її на $(x-2)$. Отримаємо $B = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$.

Підставимо $x = -1$ в ліву частину рівняння, попередньо помноживши її на $(x+1)$. Отримаємо $C = \frac{2 \cdot (-1) + 3}{(-1) \cdot (-3)} = \frac{1}{3}$.

Таким чином,

$$\frac{2x+3}{x(x-2)(x+1)} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{7}{6} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln |x| + \frac{7}{6} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є правильним дробом. Оскільки знаменник має і дійсний, і комплексні корені, то розкладання даного дробу на найпростіші буде таким:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Зведемо до одного знаменника праву частину рівності та прирівняємо чисельники, отримаємо

$$1 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + Cx + (4A-C).$$

Для знаходження чисел A, B, C скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Прирівняємо в утвореній рівності коефіцієнти при однакових степенях x , отримуємо алгебраїчну систему з трьох рівнянь, з яких і визначаємо невідомі коефіцієнти A, B, C .

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} A+B=0, \\ C=0, \\ 4A-C=1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} B=-A, \\ C=0, \\ A=\frac{1+C}{4}, \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} B=-\frac{1}{4}, \\ C=0, \\ A=\frac{1}{4}. \end{array}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+4} = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + C. \end{aligned}$$

ЗАНЯТТЯ 19. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

19.1 Мета заняття. Вміти обчислювати інтеграли від найпростіших ірраціональних та тригонометричних функцій; знати підстановки, які необхідно застосовувати при обчисленні таких інтегралів. Вміти застосовувати тригонометричні підстановки при інтегруванні деяких видів ірраціональних функцій.

19.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Інтегрування тригонометричних функцій

Представимо **найбільш вживані типи** інтегралів від виразів, які містять тригонометричні та гіперболічні функції.

I-й тип. $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Будь-який інтеграл такого виду обчислюється за допомогою «універсальної» тригонометричної підстановки:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Недолік: ця підстановка може призвести до дуже громіздких раціональних виразів, подальше розкладання яких на найпростіші дробі буде ускладненим.

Укажемо **окремі випадки**, в яких можна уникнути «універсальної» тригонометричної підстановки:

I.1) $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$, тобто $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція від $\sin x$. Застосовується підстановка $\cos x = t$;

I.2) $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$, тобто $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція від $\cos x$. Застосовується підстановка $\sin x = t$;

I.3) $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$. Застосовується підстановка $\operatorname{tg} x = t$.

II-й тип. $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx$.

Для обчислення інтеграла зручно використовувати підстановку $\operatorname{tg} x = t$, звідки

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

III-й тип. $\int R(\sin^m x \cdot \cos^n x) dx$.

III.1) m або n – непарне додатне число.

Для обчислення інтеграла слід:

- а) виділити в непарному степені множник першого степеня;
- б) внести цей множник під знак диференціала;
- в) виразити парну степінь, яка залишилася, через кофункцію;
- г) обчислити отриманий інтеграл.

III.2) m і n – парні числа, $m > 0, n > 0$

Інтеграли обчислюються за допомогою тригонометричних формул зниження

степеня $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$

III.3) $(m+n) = -2p$, $p > 0$, $p \in N$.

Якщо в чисельнику дробу знаходиться степінь $\sin x$, то більш зручною є

$$\text{підстановка } \operatorname{tg} x = t, \text{ звідки } \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Якщо в чисельнику дробу знаходиться степінь $\cos x$, то більш зручною є

$$\text{підстановка } \operatorname{ctg} x = t, \text{ звідки } \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Якщо чисельник дробу стала величина, то застосовується будь-яка з попередніх підстановок ($\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$).

III.4) $m+n = -(2p+1)$.

Можливі такі способи розв'язування (в залежності від умови прикладу):

а) застосування універсальної тригонометричної підстановки;

б) зведення до окремого випадку I.1 або I.2, наприклад,

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \frac{-d(\cos x)}{1 - \cos^2 x}. \text{ Далі застосовується підстановка } \cos x = t;$$

в) заміна одиниці в чисельнику виразом $\sin^2 x + \cos^2 x$ і подальше застосування інтегрування частинами.

IV-й тип. $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Інтегруємо за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} x$.

$$\text{V-й тип. } \int \left[\frac{\sin}{\cos} \right]_{mx} \cdot \left[\frac{\sin}{\cos} \right]_{nx} dx.$$

Застосовуються тригонометричні формули

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

1. Інтеграл $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ після виділення повного квадрата в підкореновому виразі зводиться до табличного за допомогою підстановки $t = x + \frac{b}{2a}$. Дійсно,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

При цьому матимемо:

а) якщо $a > 0$, то $I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |t + \sqrt{t^2 \pm k^2}| + C$, де

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \pm k^2;$$

б) якщо $a < 0$, то $I_1 = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{k} + C$, де $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = k^2$.

2. Інтеграл $I_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, після виділення в чисельнику похідної

підкоренового виразу $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$, необхідно перетворити таким чином:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

оскільки $Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax + b) - \frac{Ab}{2a} + B$. Тут перший інтеграл зводиться до інтеграла від степеневі функції, а другий є вже розглянутий інтеграл типу I_1 .

3. Інтеграл $I_3 = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n ,

обчислюється за формулою зведення

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $(n-1)$ з невідомими коефіцієнтами, а λ – невідоме стале число.

Для знаходження коефіцієнтів многочлена $Q_{n-1}(x)$ та числа λ продиференціюємо обидві частини цієї рівності. Матимемо

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{(2ax + b)Q_{n-1}(x)}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Помножимо цю рівність на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і одержимо рівність двох многочленів

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + (ax + \frac{b}{2})Q_{n-1}(x) + \lambda.$$

Зліва маємо многочлен $P_n(x)$, а справа – многочлен із невідомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержуємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Розв'язуючи цю систему, матимемо вираз для початкового інтеграла, який міститиме інтеграл типу I_1 .

4. Інтеграл
$$I_4 = \int \frac{dx}{(x+k)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (n=1,2)$$
 обчислюється за

допомогою зворотної підстановки $t = \frac{1}{x+k}$. Тоді $x = \frac{1}{t} - k$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Після

переходу до змінної t одержуємо або інтеграл типу $I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{mt^2 + nt + d}}$, або

інтеграл типу $I_3 = \int \frac{P_n(t)dt}{\sqrt{mt^2 + nt + d}}$, тобто уже розглянуті інтеграли.

Інтеграли типу
$$I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Ці інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій підстановкою

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Тоді матимемо $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, звідки $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $dx = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$.

Тому

$$I = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \cdot \frac{ad - bc}{(a - ct^n)^2} nt^{n-1} dt = \int r(t) dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція нової змінної t .

Розглянемо окремі випадки інтеграла цього типу.

$$1) I_5 = \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{k_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_s}{k_s}} \right) dx.$$

Тут $\frac{m_i}{k_i}$ ($i=1, \dots, s$) – нескоротні дробі. Знаходимо найменше спільне

кратне знаменників дробів степенів при дробі $\frac{ax+b}{cx+d}$. Нехай воно дорівнює n .

Застосовуємо ту саму підстановку $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тоді $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, а числа

$n \cdot \frac{m_i}{k_i} = n_i$ ($i=1, \dots, S$) будуть цілими числами. Отримаємо

$$I_5 = \int R \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t^{n_1}, t^{n_2}, \dots, t^{n_s} \right) \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt = \int r(t) dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція нової змінної t .

$$2) I_6 = \int R \left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{k_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{k_2}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_s}{k_s}} \right) dx.$$

Тут $c=0$, $d=1$. За попереднім маємо $t = \sqrt[n]{ax+b}$, $t^n = ax+b$, $x = \frac{t^n - b}{a}$,

$dx = \frac{nt^{n-1}}{a} dt$. Тоді

$$I_6 = \int R \left(\frac{t^n - b}{a}, t^{n_1}, \dots, t^{n_s} \right) \frac{n}{a} t^{n-1} dt = \int r(t) dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція нової змінної t .

$$3) I_7 = \int R \left(x, x^{\frac{m_1}{k_1}}, x^{\frac{m_2}{k_2}}, \dots, x^{\frac{m_s}{k_s}} \right) dx.$$

Тут $a=d=1$, $b=c=0$. Знаходимо найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{k_i}$. Нехай воно дорівнює n . Тоді за попереднім маємо

$t = \sqrt[n]{x}$, $x = t^n$, $dx = nt^{n-1} dt$. Таким чином,

$$I_7 = \int R(t^n, t^{n_1}, t^{n_2}, \dots, t^{n_s}) t^{n-1} dt = \int r(t) dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція нової змінної t .

$$4) I_8 = \int (ax+b)^{\frac{m_1}{n}} (cx+d)^{\frac{m_2}{n}} dx.$$

Цей інтеграл попередньою підстановкою: $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції тільки в тому разі, коли $\frac{m_1+m_2}{n} = -s$ є ціле число. При цьому матимемо

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n}} (cx+d)^{\frac{m_1+m_2}{n}} dx = \int \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n}} (cx+d)^{-s} dx = \\ &= \int t^{m_1} \left(\frac{a-ct^n}{ad-bc} \right)^s \cdot \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt = \int r(t) dt, \end{aligned}$$

де $r(t)$ – раціональна функція нової змінної t .

Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Інтегрування функцій, які раціонально залежать від x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$, можна звести до знаходження інтегралів одного з таких типів:

$$I_1 = \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2}) dt; \quad I_2 = \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2}) dt; \quad I_3 = \int R(t, \sqrt{q^2 - p^2 t^2}) dt,$$

де $t = x + \frac{b}{2a}$; $ax^2 + bx + c = \pm p^2 t^2 \pm q^2$ (завдяки виділенню повного квадрата). А

ці інтеграли призводяться до інтегралів від виразів, які є раціональними відносно синуса та косинуса, за допомогою таких підстановок:

а) для $I_1 = \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2}) dt$ підстановка $t = \frac{q}{p} \operatorname{tg} z$, тоді

$$dt = \frac{q}{p} \frac{dz}{\cos^2 z}, \quad \sqrt{p^2 t^2 + q^2} = \sqrt{q^2 \operatorname{tg}^2 z + q^2} = \frac{q}{\cos z}.$$

$$I_1 = \int R\left(q \operatorname{tg} z, \frac{q}{\cos z}\right) \frac{q}{p} \frac{dz}{\cos^2 z} = \int R_1(\sin z, \cos z) dz;$$

б) для $I_2 = \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2}) dt$ підстановка $t = \frac{q}{p} \frac{1}{\cos z}$, тоді

$$dt = -\frac{q}{p} \frac{\sin z}{\cos^2 z} dz, \quad \sqrt{p^2 t^2 - q^2} = \sqrt{p^2 \frac{q^2}{p^2 \cos^2 z} - q^2} = q \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$I_2 = \int R\left(\frac{q}{p \cos z}, q \frac{\sin z}{\cos z}\right) \left(-\frac{q}{p}\right) \frac{\sin z}{\cos^2 z} dz = \int R_2(\sin z, \cos z) dz;$$

в) для $I_3 = \int R(t, \sqrt{q^2 - p^2 t^2}) dt$ підстановка $t = \frac{q}{p} \sin z$, тоді

$$dt = \frac{q}{p} \cos z dz, \quad \sqrt{q^2 - p^2 t^2} = \sqrt{q^2 - p^2 \frac{q^2}{p^2} \sin^2 z} = q \cos z,$$

$$I_3 = \int R\left(\frac{q}{p} \sin z, q \cos z\right) \frac{q}{p} \cos z dz = \int R_3(\sin z, \cos z) dz.$$

19.3 Контрольні запитання і завдання

1. Як обчислюються інтеграл типу $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$?

2. Як обчислюються інтеграл типу $I = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$?

3. Як обчислюються інтеграл типу $I = \int \frac{dx}{(x+k)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$?

4. Як обчислюються інтеграли $I_1 = \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2}) dt$,

$$I_2 = \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2}) dt, \quad I_3 = \int R(t, \sqrt{q^2 - p^2 t^2}) dt?$$

5. Як обчислюються інтеграли типів $\int R(\sin x, \cos x) dx$, $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cdot \cos x) dx$, $\int R(\sin^m x \cdot \cos^n x) dx$, $\int R(\operatorname{tg} x) dx$?

19.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 3.142, 3.144, 3.158, 3.163, 3.171, 3.175.

Домашні задачі: [15] №№ 3.143, 3.145, 3.159, 3.166(а).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 + 4x - 5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-((x+2)^2 - 9)}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{9 - (x+2)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+2}{3} + C.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}} = \left| \begin{array}{l} 3x+1 = \frac{3}{2}((2x+4) - 4) + 1 = \frac{3}{2}(2x+4) - 6 + 1 = \\ = \frac{3}{2}(2x+4) - 5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+4)}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}} dx - 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}} =$$

$$= \frac{3}{2} \int (x^2 + 4x + 1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + 4x + 1) - 5 \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2 - 3}} =$$

$$= 3 \frac{(x^2 + 4x + 1)^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1} - 5 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1}| + C =$$

$$= 6\sqrt{x^2 + 4x + 1} - 5 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1}| + C.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 + 1}}$.

Розв'язання.

Тут доцільно скористатися зворотною підстановкою.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 + 1}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{9}{t^2} + 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{9 + t^2}} = - \ln |t + \sqrt{t^2 + 9}| =$$

$$= - \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 9} \right| + C = \ln \frac{x}{1 + \sqrt{9x^2 + 1}} + C.$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання.

Найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{6}$ є число 6, тому робимо підстановку: $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, звідки

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^5(1+t)}{1+t^2} dt = 6 \int (t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2}) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + t + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \operatorname{arctg} t \right) + C. \end{aligned}$$

Повертаючись до змінної x , маємо

$$\int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = 6 \left(\frac{1}{5} x^{5/6} + \frac{1}{4} x^{2/3} - \frac{1}{2} x^{1/2} + \frac{1}{2} \ln(1 + x^{1/3}) - \operatorname{arctg} x^{1/6} \right) + C.$$

Приклад 5.

Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} = \int \frac{1}{3 + \frac{5 - 5t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2} = - \int \frac{dt}{t^2 - 4} = - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right| + C.$$

Приклад 6.

Обчислити інтеграл $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^2 x dx &= \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int (1 - t^2) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.

Обчислити інтеграл $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Розв'язання.

$$I = \int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left(\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx \right) = \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{2} \int \sin^2 2x d \sin 2x \right) = \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.
\end{aligned}$$

Приклад 8.

Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$.

Розв'язання.

Покладемо $x = 3 \sin t$, $dx = 3 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{3}$. Тоді

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt = \int \frac{9\cos^2 t}{9\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = \\
&= -\operatorname{ctg} t - t + C = C - \arcsin \frac{x}{3} - \operatorname{ctg}(\arcsin \frac{x}{3}) = C - \arcsin \frac{x}{3} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x},
\end{aligned}$$

оскільки $\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.

ЗАНЯТТЯ 20. Контрольна робота №1

Література

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с. (517 (07) T29)
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серeda О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) B55).
3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) B55).
4. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебн. пособие. в 3 ч. Ч.1. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 270 с. (517(07) C23).
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.2. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Выш. шк., 1991. – 351 с. (517(07) C23).
6. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Х.: Компанія СМІТ, 2012.- 316 с. або: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 264 с. (512(07) K 49)
7. Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Курс лекцій з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. –Харків: ХНУРЕ, 2004. – 184 с.(517(07) H 54)
8. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. — 6-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.
9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.

10. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учеб. пос. — М.: Наука, 1985. — 392 с.
11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2003. — 704 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.-М.: Наука, 1975. — 548 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т.1. 616 с., Т.2. 810 с., Т.3. 662 с.
14. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. — Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2010. — 262 с.
15. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеева Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.2. Диференціальне та інтегральне числення. — Харків: Компанія СМІТ, 2010. — 330 с.
16. Вища математика: Підручник: У 2 кн. — К.: Либідь, 2003. — Кн. 1. Основні розділи /Призва Г.Й. та ін. — 400 с.
17. Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч. 1. - К.: Техніка, 2003. — 600 с. (517(07) О 35)
18. Елементи вищої математики для підготовчих відділень: Навч. посібник/ Упоряд.: В.В. Семенець, В.О. Дорошенко. Г.В. Сова. - Харків, ХНУРЕ, 2010. — 400с.
19. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання: Навч. посібник/ Упоряд.: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва. — Харків: ХТУРЕ, 2012. — 280 с. (517(07) К 49)
20. Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Основні теоретичні відомості з курсу вищої математики. Тести.: Навч. посібник. — Харків: ХНУРЕ, 2013. — 450 с. (Клімова Н.П., Ремаєва О.А. Основные теоретические сведения по курсу

- высшей математики. Тесты.: Уч. пособие. – Харьков: ХНУРЭ, 2013. – 462 с.) (517(07) К 49)
- 21.Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. –648 с.
- 22.Основні теоретичні відомості та завдання до підсумкового контролю з курсу вищої математики/Упоряд.: Н.П. Клімова, О.О. Ремаєва. – Харків, 2008. – 84с. (517(07) О 75)
- 23.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Основні формули з вищої математики та алгоритми розв'язування задач (Стислий довідник), Харків, ХНУРЕ, 2012. – 149 с.
- 24.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Збірник теорем, формул та алгоритмів розв'язування задач з вищої математики, Харків, ХНУРЕ, 2013. – 148 с.
- 25.Ружицька Н.М., Нерух О.Г., Бутенко Н.С. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія: Навч. посіб. – Харків : ХНУРЕ, 2015. – 232 с. (517(07) Р83)
- 26.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.2. Диференціальне і інтегральне числення функцій однієї змінної.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016.– 220 с. (517(07) М34)
- 27.Ремаєва О.О., Кравченко Л.К. Інтегрування функцій однієї змінної (конспект лекцій та завдання для самостійної роботи) для студентів усіх форм навчання. – Харків: ХТУРЕ, 2006. – 130 с. (517(07) К 65)
- 28.Російсько-український математичний словник. Навч. посібник/ Упоряд.: Сова Г.В. - Харків: ХТУРЕ, 2000. – 128 с.
- 29.Ічко Т.В., Бутенко Н.С., Кравченко Л.К., Чумак О.В. Завдання для самостійної роботи студентів з курсу вищої математики для 1-го семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2000. – 28 с.

30.Чумак О.В., Лапта С.І., Бутенко Н.С. Завдання для рейтингових контрольних робіт з курсу вищої математики для третього семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2001. – 80 с.

Електронний документ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ЧАСТИНА 1

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Упорядник СТОГНІЙ Надія Петрівна

Відповідальний випусковий О. Г. Нерух

Авторська редакція

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ЧАСТИНА 2

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою вищої математики.
Протокол № 2 від 04.10.2017 р.

ХАРКІВ 2017

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Вища математика», Частина 2 для студентів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія» [Електронний документ] / Упоряд. Н.П. Стогній. – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 79 с.

Упорядник Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

Рецензент: Н.П. Клімова, канд. техн. наук, проф. каф. ВМ

ЗМІСТ

1	Комплексні числа	4
2	Функція багатьох змінних. Область визначення. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал. Похідні вищих порядків.	8
3	Дотична площина і нормаль. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Екстремум функції двох змінних	14
4	Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца. Невласні інтеграли	21
5	Застосування визначеного інтегралу. Обчислення площі плоскої фігури (в декартовій системі координат)	32
6	Обчислення подвійних інтегралів в декартовій системі координат	35
7	Заміна змінних в подвійному інтегралі	38
8	Числові ряди. Ряди з додатними членами	40
9	Знакозмінні та знакопозичеревжні ряди	43
10	Функціональні та степеневі ряди. Область збіжності	46
11	Розкладання 2π -періодичної функції в ряд Фур'є	51
12	Диференціальні рівняння (ДР) I-го порядку (з розділяючими та розділеними змінними, лінійні рівняння та рівняння Бернуллі)	54
13	Однорідні лінійні ДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	59
14	ДР зі спеціальною правою частиною	61
15	Основні властивості перетворення Лапласа	64
16	Відновлення оригіналу за заданим зображенням	69
17	Розв'язання диференціальних рівнянь операційним методом	72
18	Контрольна робота №1	74
	Література	75

ЗАНЯТТЯ 1. Комплексні числа

1.1 Мета заняття. Вміти записувати комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах та виконувати дії з комплексними числами.

1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Комплексним числом z називається вираз вигляду $z = x + iy$, де x та y – дійсні числа, а i – так звана *уявна одиниця*, $i^2 = -1$.

Якщо $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ називається *суто уявним*; якщо $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ ототожнюється з *дійсним числом* x , а це означає, що множина всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$ є підмножиною множини $\mathbf{C}$ усіх комплексних чисел, тобто $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z та позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y – *уявною частиною* z та позначається $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексних числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються *рівними* ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх дійсні та їх уявні частини: $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Зокрема, комплексне число $z = x + iy$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$.

Геометричне зображення комплексних чисел

Будь-яке комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою $M(x, y)$ площини Oxy такою, що $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Площина, на якій зображені комплексні числа, називається *комплексною площиною*. Вісь абсцис називається *дійсною віссю* тому, що на ній лежать дійсні числа $z = x + i \cdot 0 = x$. Вісь ординат називається *уявною віссю*, бо на ній лежать суто уявні комплексні числа $z = 0 + iy = iy$.

Комплексне число $z = x + iy$ можна задавати за допомогою радіус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$. Довжина вектора $\vec{r}$, який зображує комплексне число z , називається *модулем* цього числа та позначається $|z|$ або r . Модуль комплексного числа визначається за формулою

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Величина кута між додатним напрямом дійсної осі та вектором $\vec{r}$, який зображує комплексне число, називається *аргументом* цього числа та позначається $\text{Arg } z$ або φ .

Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ є величиною багатозначною та визначається з точністю до доданка $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$): $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, де $\arg z$ – *головне значення аргументу*, що знаходиться в проміжку $(-\pi; \pi]$, тобто $-\pi < \arg z \leq \pi$ (іноді головне значення аргументу може належати проміжку $[0; 2\pi)$). Аргумент φ визначається з формул:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \sin \varphi = \frac{y}{r}, \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

Оскільки $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$, то

$$\cos \varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z),$$

$$\sin \varphi = \sin(\arg z + 2\pi k) = \sin(\arg z),$$

де

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, x > 0; \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0; \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Форми запису комплексних чисел

Запис числа z у вигляді $z = x + iy$ називають **алгебраїчною формою** комплексного числа.

Запис числа z у вигляді $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ називають **тригонометричною формою**. При переході від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної достатньо визначити лише головне значення аргументу комплексного числа z , тобто мати на увазі, що $\varphi = \arg z$.

Використовуючи *формулу Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

комплексне число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ можна записати в так званій **показниковій (або експоненціальній) формі** $z = re^{i\varphi}$.

Згідно з формулою Ейлера, функція $e^{i\varphi}$ є періодичною з основним періодом 2π . Для запису комплексного числа z у показниковій формі достатньо знайти модуль r та головне значення аргументу комплексного числа, тобто обчислити $\varphi = \arg z$.

Дії з комплексними числами

Нехай два комплексних числа задані в алгебраїчній формі: $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$.

Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі виконуються так:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Зауваження.

Неважко перевірити, що коли в рівностях **1 – 3** кожне комплексне число z замінити спряженим $\bar{z}$, то і результати вказаних дій заміняться спряженими числами.

Нехай два комплексних числа задані в тригонометричній формі: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Дії з комплексними числами в тригонометричній формі виконуються так:

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.
3. $z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (**формула Муавра**).
4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

1.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення комплексного числа.
2. Яке число називається комплексно спряженим для комплексного числа $z = x + iy$?
3. Чому дорівнює дійсна та уявна частини комплексного числа $z = x + iy$?
4. Дайте означення модуля та аргументу комплексного числа.

5. Наведіть формули для обчислення модуля та аргументу комплексного числа.
6. Наведіть три форми запису комплексного числа.
7. Як виконуються дії з комплексними числами, які задані в алгебраїчній формі?
8. Як виконуються дії з комплексними числами, які задані в тригонометричній або показниковій формах?
9. Наведіть формулу Муавра.

1.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 3.1, 3.7, 3.9, 3.19, 3.31, 3.21.

Домашні задачі: [16] №№ 3.2, 3.6, 3.20, 3.22.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити $(2 - 5i)^2 - i^{13} + \frac{4}{i}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (2 - 5i)^2 - i^{13} + \frac{4}{i} &= 4 - 20i + 25i^2 - (i^2)^6 \cdot i + \frac{4 \cdot i}{i \cdot i} = |i^2 = -1| = \\ &= 4 - 20i - 25 - i - 4i = -21 - 25i. \end{aligned}$$

Приклад 2.

Обчислити $(1 + \sqrt{3}i)^9$, використовуючи формулу Муавра.

Розв'язання.

Представимо комплексне число в тригонометричній формі $z = r(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \arg z = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Застосуємо формулу Муавра для піднесення до відповідної степені.

$$z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3} \right) = 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 (-1) = -512.$$

ЗАНЯТТЯ 2. Функція багатьох змінних. Область визначення. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал. Похідні вищих порядків

2.1. Мета заняття. Навчитися знаходити частинні похідні, повні диференціали першого та вищих порядків для функцій декількох змінних.

2.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функції багатьох (декількох) змінних

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y) . Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z , то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x, y)$.

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y – незалежними змінними (аргументами).

Множину пар (x, y) значень x та y , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають $D(f)$ або D . Множину значень z позначають $E(f)$ або E . Областю визначення $D \subset R_2$ функції є деяка множина точок площини Oxy . Зокрема, областю визначення функції може бути вся площина, або частина площини, обмежена певними лініями.

Лінію, що обмежує область D , називають *межею області визначення*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні. *Графіком функції* $z = f(x, y)$ у прямокутній системі $Oxyz$ називається геометричне місце точок $M(x; y; f(x, y))$, проекції яких $(x; y)$ належать області D .

Поняття функції двох змінних узагальнимо на випадок трьох і більшого числа незалежних змінних.

Нехай D – деяка множина упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, тобто точок $M(x; y; z)$ тривимірного простору R_3 .

Якщо кожній точці $(x; y; z) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x , y і z та записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$.

Якщо кожній точці $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ за певним законом відповідає єдине число u , то кажуть, що на множині D визначено функцію u від n змінних: $x_1, x_2, \dots, x_n$ і записують $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $u = f(M), M \in R_n$.

Частинні похідні. Частинний приріст $\Delta_x z$ функції за змінною x : $\Delta_x z = f(x, y + \Delta x) - f(x, y)$, за змінною y : $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в точці $M(x; y)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right)$, то вона називається частинною похідною за x (за y) функції $z = f(x; y)$ у точці $(x; y)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x ($\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y).

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ за змінною x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx} : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ або $f''_{xx} = (f'_x)'_x$.

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ за змінною y , то цю похідну називають мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або f''_{xy} : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ або $f''_{xy} = (f'_x)'_y$.

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають частинними похідними третього порядку функції $f(x, y)$.

Якщо функція $f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними f'_x , f'_y , f''_{xy} , f''_{yx} в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0 , то в цій точці $f''_{xy}|_{M_0} = f''_{yx}|_{M_0}$.

Повний диференціал функції. Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ визначається за формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Аналогічна формула має місце для диференційованої функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

Похідна складеної функції. Повна похідна.

Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовані в точці t , а функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x, y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційована в точці t . Похідну цієї функції знаходять за формулою $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

Якщо $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Зокрема, якщо $u = f(x, y, z)$, а $y = y(x)$, $z = z(x)$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} - \text{формула для обчислення повної похідної.}$$

Якщо функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ диференційовані в точці $M_1(u, v)$, а функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M_2(x(u, v); y(u, v))$, то складена функція $f(x(u, v), y(u, v))$ диференційована в точці $M_1(u, v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$.

Диференціювання неявної функції

Нехай задана неявна функція $y = \varphi(x)$ рівнянням $F(x, y) = 0$. Похідна цієї функції знаходиться за формулою $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Частинні похідні z'_x і z'_y неявної функції $z = \varphi(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, визначаються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D .

Візьмемо будь-яку точку $(x, y) \in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і

$\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y , тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна

ставити питання про знаходження їхніх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ або } z''_{xx}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ або } z''_{yy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ або } z''_{xy}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &\equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ або } z''_{yx}.\end{aligned}$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

Похідні другого порядку можна знову диференціювати як по x , так і по y . Отримаємо частинні похідні третього порядку, яких усього вісім:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x; y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3 z = d(d^2 z) \dots \dots \dots d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y , а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

2.3. Контрольні запитання і завдання.

1. Дати означення частинної похідної функції двох змінних за однією з них.
2. Дати означення диференційованості функції $z = f(x, y)$.
3. Дати означення повного диференціала функції двох змінних і вказати формулу для його знаходження.
4. Як знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = f(x(t), y(t))$?
5. Що називається повною похідною?
6. Написати формулу для знаходження похідних z'_x і z'_y , якщо $z = f(u, v, t)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $t = t(x, y)$.
7. Записати правила диференціювання неявних функцій однієї і двох змінних.
8. Як визначають частинні похідні другого і третього порядку від функції двох змінних?
9. В якому випадку рівні другі мішані похідні?
10. Сформулюйте правило знаходження частинних похідних вищих порядків функції багатьох змінних.
11. Записати формулу для знаходження диференціала n -го порядку функції $z = f(x, y)$.

2.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 4.41, 4.50, 4.51, 4.53, 4.64, 4.67, 4.73, 4.95, 4.97, 4.103, 4.105.

Домашні задачі: [15] №№ 4.42, 4.49, 4.54, 4.56, 4.65, 4.68, 4.72, 4.96, 4.102.

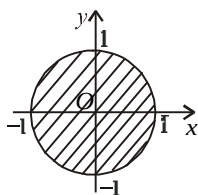
Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію: $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$

Розв'язання.

Функція визначена, якщо $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є коло з центром $(0; 0)$ та радіусом 1.



Приклад 2.

Знайти диференціал функції $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$.

Розв'язання.

Послідовно отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y,$$

Маємо $dz = (6xy - 2y)dx + (3x^2 - 2x + 2y)dy$.

Приклад 3.

Знайти частинні похідні z'_u і z'_v складеної функції $z = x^2 \ln y$, де

$$x = \frac{u}{v}, \quad y = uv.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} v = \frac{u}{v^2} (1 + 2 \ln(uv)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \ln y \frac{1}{v} \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y} u = \frac{u^2}{v^2} (1 - 2 \ln(uv)).$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні та диференціали першого та другого порядків функції $z = x^y$.

Розв'язання.

Послідовно знаходимо частинні похідні:

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x, \quad z''_{xx} = (y \cdot x^{y-1})'_x = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2},$$

$$z''_{yy} = (x^y \ln x)'_y = x^y \ln^2 x, \quad z''_{xy} = (y \cdot x^{y-1})'_y = 1 \cdot x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x = x^{y-1} (1 + y \cdot \ln x),$$

$$z''_{yx} = (x^y \ln x)'_x = y \cdot x^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} (y \cdot \ln x + 1).$$

Остаточні диференціали мають вигляд:

$$dz = y \cdot x^{y-1} \cdot dx + x^y \ln x \cdot dy,$$

$$d^2z = y(y-1) \cdot x^{y-2} dx^2 + 2x^{y-1} (1 + y \cdot \ln x) dx dy + x^y \cdot \ln^2 x dy^2.$$

ЗАНЯТТЯ 3. Дотична площина і нормаль. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Екстремум функції двох змінних

3.1. Мета заняття. Навчитися складати рівняння дотичної площини та нормалі. Навчитися знаходити похідну функції за напрямом, її градієнт, а також досліджувати на екстремум функцію двох змінних.

3.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Дотична площина та нормаль до поверхні

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x; y; z) = 0$ в точці $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

де $A = F'_x(x_0; y_0; z_0)$, $B = F'_y(x_0; y_0; z_0)$, $C = F'_z(x_0; y_0; z_0)$.

Якщо поверхню задано у просторі явним рівнянням $z = f(x; y)$, то рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$(z - z_0) = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Нормаль до поверхні в точці $(x_0; y_0; z_0)$ — це пряма, що проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}.$$

Якщо поверхню задано у просторі явним рівнянням $z = f(x; y)$, то рівняння нормалі до поверхні $z = f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Похідна за напрямом та градієнт функції

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ характеризує швидкість змінювання функції

$z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ має в точці $P_0(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом

$\vec{l} = (\cos \alpha; \cos \beta)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \Big|_{P_0} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \cos \beta,$$

де $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0}$ і $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0}$ - значення частинних похідних функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$.

Для функції трьох змінних $u = u(x; y; z)$ похідна за напрямом $\vec{l} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ подається у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0} \cos \gamma.$$

Вектор з координатами $\left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$, називається *градієнтом функції* $z = f(x; y)$ у цій точці і позначається $\overrightarrow{\text{grad } z}$ ($\vec{i}, \vec{j}$ — одиничні орти):

$$\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j}.$$

Для функції трьох змінних $u = u(x; y; z)$ градієнт у точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$ визначається так:

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0} \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні орти і $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0}, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0}, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0}$ обчислені в точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $z = f(x; y)$ та градієнт пов'язані співвідношенням $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \overrightarrow{\text{grad}} z \cdot \vec{l}$.

Вектор $\overrightarrow{\text{grad}} z \Big|_{P_0} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j}$ напрямлений перпендикулярно до лінії рівня $z(x; y) = C$, яка лежить в площині Oxy і проходить через точку $P_0(x_0; y_0)$.

Теорема. Нехай задано $u = u(x; y; z)$ — скалярне поле, в якому визначено поле градієнтів $\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_0} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_0} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{P_0} \vec{k}$. Похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції вектора $\overrightarrow{\text{grad}} u$ на вектор $\vec{l}$.

Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x; y)$ цього околу виконується нерівність $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$ [$f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$], тоді ця точка (x_0, y_0) називається *точкою максимуму (мінімуму)* функції $z = f(x; y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці (x_0, y_0) , тоді в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці $(x_0; y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0; y_0) = 0$ та $f'_y(x_0; y_0) = 0$, а також $f''_{xx}(x_0; y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0; y_0) = C$. Якщо:

- 1) $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, тоді $(x_0; y_0)$ — точка максимуму функції $z = f(x; y)$;
- 2) $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, тоді $(x_0; y_0)$ — точка мінімуму функції $z = f(x; y)$;
- 3) $\Delta = AC - B^2 < 0$, тоді в точці $(x_0; y_0)$ немає екстремуму.
- 4) $\Delta = AC - B^2 = 0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x; y)$ на екстремум.

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.
5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі вищезазначених теорем.

3.3. Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення дотичної площини і нормалі до поверхні.
2. Запишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, якщо поверхня задана у явному вигляді.
3. Запишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, якщо поверхня задана у неявному вигляді.
4. Дайте означення похідної за напрямом функції трьох змінних.
5. Запишіть формулу похідної за напрямом функції трьох змінних.
6. Дайте означення градієнта функції трьох змінних.
7. Запишіть формулу градієнта функції трьох змінних.
8. Як пов'язані похідна за напрямом і градієнт функції трьох змінних?
9. Дайте означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.
10. У чому полягають відмінності між локальним та глобальним екстремумами функції?
11. Сформулюйте необхідні умови існування екстремумів функції двох змінних.
12. Сформулюйте достатні умови існування екстремумів функції двох змінних.

3.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 4.74, 4.76, 4.108, 4.110, 4.112, 4.122, 4.125.

Домашні задачі: [15] №№ 4.75, 4.77, 4.109, 4.111, 4.123.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S: x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ у точці $M(1; 2; -1)$.

Розв'язання.

Позначимо $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6$. Тоді:

$$F'_x = 3x^2 + yz; F'_x(M) = 3 - 2 = 1, F'_y = 3y^2 + xz; F'_y(M) = 3 \cdot 4 - 1 = 11,$$

$$F'_z = 3z^2 + xy; F'_z(M) = 3 + 2 = 5.$$

Запишемо шукані рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Підставимо отримані числові значення частинних похідних і координати точки M у відповідні формули:

Рівняння дотичної площини:

$$P: F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

$$1 \cdot (x - 1) + 11 \cdot (y - 2) + 5 \cdot (z + 1) = 0 \text{ або } x + 11y + 5z - 18 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$N: \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}.$$

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$S: z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \text{ в точці } M(3; 1; 4).$$

Розв'язання.

$$z'_x = x; \quad z'_x(M_0) = 3, \quad z'_y = -y; \quad z'_y(M_0) = -1.$$

Запишемо шукані рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Підставимо отримані числові значення частинних похідних у відповідні формули.

Рівняння дотичної площини:

$$P: z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1(z - z_0) = 0.$$

$$3 \cdot (x - 3) - 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot (z - 4) = 0 \text{ або } 3x - y - z - 4 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$N: \frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 4}{-1}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1; 2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Розв'язання.

$$u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad u'_x(M) = \frac{2}{1 + 4 + 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$u'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad u'_y(M) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$u'_z = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad u'_z(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l} = (2; 4; 4)$.

$$|\vec{l}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6; \quad \cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}; \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3}.$$

За формулою $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = u'_x(M) \cdot \cos \alpha + u'_y(M) \cdot \cos \beta + u'_z(M) \cdot \cos \gamma = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

Приклад 4. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці $M_0(1; -1; 2)$. Визначити, в яких точках градієнт перпендикулярний до осі Ox , в яких точках градієнт дорівнює нулю.

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2yz; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = 2 + 4 = 6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2xz; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = -2 - 4 = -6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2xy; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 4 + 2 = 6.$$

Скориставшись формулою $\text{grad} u = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \vec{k}$, запишемо

$$\text{grad} u = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

З аналітичної геометрії відомо, що умовою перпендикулярності вектора

$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ до осі Ox є $a_x = 0$. У нашому випадку маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, тобто

$2x - 2yz = 0 \rightarrow x = yz$. Таким чином, $\text{grad} u$ перпендикулярний до осі Ox в точках $x = yz$. Визначимо точки, в яких $\text{grad} u$ дорівнює нулю. Для цього потрібно розв'язати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - yz = 0, \\ y - xz = 0, \\ z - xy = 0. \end{cases}$$

Розв'язки системи рівнянь є шуканими точками:

$$M_1(1;1;1), M_2(-1;-1;1), M_3(1;-1;-1), M_4(-1;1;-1), M_5(0;0;0).$$

Приклад 5. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні першого порядку функції z .

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y); \quad z'_y = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x).$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (x^3 - 1) = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ y = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Знайшли дві точки $M_1(0;0)$ і $M_2(1;1)$. Обидві точки є стаціонарними, оскільки функція z визначена на всій площині xOy .

$$z''_{xx} = 6x; \quad z''_{yy} = 6y; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -3.$$

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}.$$

Обчислимо $\Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$. Згідно з достатньою умовою в точці M_1 екстремуму немає.

Обчислимо $\Delta(M_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$. Згідно з достатньою умовою точка

M_2 є точкою мінімуму ($z''_{xx}(M_2) = 6 > 0$).

Обчислимо значення функції z в точці M_2 . В результаті маємо $z_{\min} = z(M_2) = 1 + 1 - 3 = -1$.

ЗАНЯТТЯ 4.1. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.
Невласні інтеграли (одна година)

4.1.1 Мета заняття. Вивчити формулу Ньютона-Лейбніца та вміти її застосовувати. Вивчити різні методи обчислення визначених інтегралів і вміти

їх застосовувати. Вміти визначати та обчислювати невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду) та невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду), вміти встановлювати збіжність або розбіжність таких інтегралів.

4.1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Теорема (про обчислення визначеного інтеграла). Якщо $F(x)$ є первісною неперервної функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

яка називається *формулою Ньютона-Лейбніца*.

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символом $F(x)|_a^b$. Тому формулу Ньютона-Лейбніца можна записати ще й так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Теорема (про заміну змінної у визначеному інтегралі). Нехай виконуються умови:

- 1) функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) функція $x = \varphi(t)$ та її похідна $x' = \varphi'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha; \beta]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ і $a < \varphi(t) < b \quad \forall t \in (\alpha; \beta)$.

Тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема (про формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла). Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні, то має місце формула

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Визначення невласного інтеграла з нескінченними межами інтегрування (невласного інтеграла першого роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ та є інтегрованою на будь-якому відрізку $[a; b]$, де b – довільне дійсне число.

Границя інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \rightarrow +\infty$ називається *невласним інтегралом першого роду* та позначається

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

У випадку, коли ця границя є число скінченне, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **збіжним**, а підінтегральна функція $f(x)$ – інтегрованою на проміжку $[a; +\infty)$. А якщо ця границя є нескінченна або не існує, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **розбіжним**, а функція $f(x)$ – неінтегрованою на проміжку $[a; +\infty)$.

Аналогічно можна дати означення невластного інтеграла на проміжку $(-\infty; b]$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, де a і b – довільні дійсні числа, то можна визначити невластний інтеграл з двома нескінченними межами, припустивши

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx,$$

де c – довільне дійсне число.

Інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними інтеграли $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ та $\int_c^{\infty} f(x)dx$. При цьому інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ не залежить від вибору числа c .

Отже, невластний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; +\infty)$, а інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то він дорівнює площі необмеженої області, що обмежена графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ та віссю OX .

Формула Ньютона-Лейбніца для невластних інтегралів із нескінченними межами інтегрування.

Нехай первісна функція $F(x)$ для функції $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$, а сама функція $f(x)$ є неперервною на будь-якому відрізку $[a; b]$, де b довільне дійсне число.

Маємо формулу Ньютона-Лейбніца для невластних інтегралів

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогічно можна записати

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^b,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Ознаки збіжності невластних інтегралів з нескінченними межами інтегрування.

Теорема (про ознаку порівняння). Нехай $\forall x \in [a; +\infty)$ функція $f(x) > 0$ і існують числа $\alpha > 0$ і $M > 0$ такі, що:

1) $\forall x \in [a; +\infty)$ при $\alpha > 1$ має місце нерівність $f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$, то інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ збігається;}$$

2) $\forall x \in [a; +\infty)$ при $0 < \alpha \leq 1$ має місце нерівність $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha}$, то інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ розбігається.}$$

Теорема. Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то:

1) із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема (*про граничну ознаку порівняння*). Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні, $f(x) > 0$ і $\varphi(x) > 0$ та існує скінченна границя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,$$

де $0 < k < +\infty$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідок. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $[a; +\infty)$ неперервні, додатні, тоді, якщо $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

У наведених теоремах розглядалися невласні інтеграли від невід'ємних функцій. Нехай тепер $f(x)$ є знакозмінною.

Теорема (*про ознаку абсолютної збіжності*). Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, при цьому $\left| \int_a^{\infty} f(x)dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)| dx$.

Якщо разом із інтегралом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, а функція $f(x)$ – *абсолютно інтегрованою* на проміжку $[a; +\infty)$.

Тобто, абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *умовно збіжним*.

Наведені ознаки збіжності мають місце і на проміжках $(-\infty; b]$, $(-\infty; +\infty)$.

Практичні рекомендації

1. Для з'ясування питання збіжності в якості інтеграла, з яким вестиметься порівняння, береться інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{збігається,} & \text{якщо } \alpha > 1; \\ \text{розбігається,} & \text{якщо } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Цей інтеграл називається *еталонним*.

2. Якщо підінтегральна функція в інтегралі $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ має вигляд

$$f(x) = \frac{R_m(x)}{Q_n(x)}, (m < n), \text{ де } R_m(x), Q_n(x) - \text{раціональні або ірраціональні}$$

многочлени, то в еталонному інтегралі $\alpha = n - m$, тому що $\frac{R_m(x)}{Q_n(x)} \sim \frac{1}{x^{n-m}}$ при $x \rightarrow \infty$.

3. Якщо підінтегральна функція $f(x)$ – містить трансцендентні функції, то використовуються методи порівняння. При цьому важливо пам'ятати такі оцінки:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}; \ln x < x^a (a > 0) \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Визначення невластного інтеграла від необмежених функцій (невластного інтеграла другого роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a; b]$ та є необмеженою справа від точки $x = a$, тобто $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Проте нехай $f(x)$ є обмеженою та інтегрованою на будь-якому відрізку $[a + \varepsilon; b]$, де $\varepsilon > 0$ – довільне, як завгодно мале число, таке, що $a + \varepsilon < b$.

Границя інтеграла $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ називається *невласним інтегралом другого роду* від необмеженої функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ та позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо ця границя є скінченним числом, то невластний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *збіжним*, а якщо границя є нескінченною або не існує, то

невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається розбіжним.

Якщо функція $f(x)$ є необмеженою зліва від точки b , тобто $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$, то за означенням вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ є необмеженою в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0 \in (a; b)$, то за означенням вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_0} f(x)dx + \int_{c_0}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c_0-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c_0+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ є необмеженою як справа від точки a , так і зліва від точки b , тобто $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ і $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$, то за означенням вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)dx,$$

де c – довільна точка інтервалу $(a; b)$.

Ознаки збіжності невластних інтегралів від необмежених функцій

Теорема (про ознаку порівняння). Нехай функція $f(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b]$ і нехай $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Тоді

1) інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається, якщо існують додатні числа $0 < \alpha < 1$ та $M \geq 0$

такі, що для всіх $x \in (a; b]$ справджується нерівність $f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^\alpha}$;

2) інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, якщо існують додатні числа $\alpha \geq 1$ та $M > 0$

такі, що справджується нерівність $f(x) \geq \frac{M}{(x-a)^\alpha}$.

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на проміжку $(a; b]$,

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \varphi(x) = \infty$ і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то:

1) із збіжності інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$;

2) із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ впливає розбіжність інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема (про граничну ознаку порівняння). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $(a;b]$ неперервні, додатні та $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \varphi(x) = \infty$, тоді якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, де $0 < k < +\infty$, то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b \varphi(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідок. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на проміжку $(a;b]$ неперервні, додатні та $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \varphi(x) = \infty$, тоді якщо $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \rightarrow a+0$, то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b \varphi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Достатня ознака збіжності невластивого інтеграла від знакозмінної підінтегральної функції підтверджується наступною теоремою.

Теорема (про ознаку абсолютної збіжності). Якщо $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ та інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

У цьому випадку інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*.

Якщо ж інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *умовно збіжним*.

Аналогічні ознаки мають місце і для невластивих інтегралів $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ є необмеженою зліва від точки $x = b$.

Практичні рекомендації

1. Для з'ясування питання збіжності як інтеграл, з яким вестиметься порівняння, береться інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{збігається,} & \text{якщо } \alpha < 1; \\ \text{розбігається,} & \text{якщо } \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

Цей інтеграл називається *еталонним*.

Використовуються також інтеграли:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

які збігаються при $\alpha < 1$ та розбігаються при $\alpha \geq 1$.

2. Якщо підінтегральна функція в інтегралі $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ має вигляд

$$f(x) = \frac{R_m(x)}{Q_n(x)}, (m < n), \quad \text{де } R_m(x), Q_n(x) - \text{раціональні або ірраціональні}$$

многочлени, то необхідно виділити у знаменнику множник $(x-a)^k$, де $x=a$ – особлива точка функції $f(x)$ (множник $(b-x)^k$, де $x=b$ – особлива точка $f(x)$) та застосувати, якщо є можливість, таблицю еквівалентних нескінченно малих. Далі перейти до еталонного інтеграла або використовувати ознаки порівняння.

4.1.3 Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть формулу Ньютона-Лейбніца.
2. Чому при заміні змінної у визначеному інтегралі можна не повертатися до попередньої змінної?
3. Доведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Де конкретно використана при доведенні формули неперервність вхідних функцій $u(x)$ і $v(x)$?
4. Чи є невластний інтеграл першого роду границею інтегральної суми?
5. Дайте означення невластного інтеграла першого роду; зазначте його геометричний зміст у випадку, коли підінтегральна функція невід’ємна. Наведіть приклади збіжного та розбіжного інтегралів першого роду.
6. Доведіть теорему про граничну ознаку збіжності невластного інтеграла першого роду.
7. Чи є невластний інтеграл другого роду границею інтегральної суми?
8. Дайте визначення невластного інтеграла другого роду. Наведіть приклади збіжного та розбіжного інтегралів другого роду.
9. Доведіть теорему про граничну ознаку збіжності невластного інтеграла другого роду.

4.1.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 3.211 – 3.229 (непарні), 3.233, 3.235, 3.237, 3.241, 3.247, 3.249, 3.257.

Домашні задачі: [15] №№ 3.212 – 3.230 (парні), 3.232, 3.238, 3.242, 3.248, 3.258.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \arcsin \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} + \int_0^1 \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \frac{\pi^2}{16} \right). \end{aligned}$$

$$\left| [\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}] \right| = \left| -4(\vec{a} \times \vec{b}) \right| = 4 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$.

Розв'язання.

Застосуємо підстановку $x = 2 \sin t$. При розв'язанні рівнянь $\sqrt{3} = 2 \sin t$ і $-\sqrt{3} = 2 \sin t$ маємо, що $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$. Функція $x = \varphi(t) = 2 \sin t$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

задовольняє всі умови теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі та

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}. \quad \text{Тоді} \quad dx = 2 \cos t dt, \quad \sqrt{4 - x^2} = 2 |\cos t| = 2 \cos t,$$

оскільки $\cos t > 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Отже, шуканий інтеграл дорівнює

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$.

Розв'язання.

Спочатку виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів, тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x+3)^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+3)^2 + 1} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x+3) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x+3) \Big|_0^b = \\ &= \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3 = \pi, \end{aligned}$$

оскільки $\lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ і $\lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 5.

Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} x \cos x dx$.

Розв'язання.

За означенням

$$\int_0^{\infty} x \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cos x dx.$$

Поклавши $u = x$, $dv = \cos x dx$ та інтегруючи частинами під знаком границі, одержуємо

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (x \sin x \Big|_0^b - \int_0^b \sin x dx) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b \sin b + \cos b - 1).$$

Оскільки $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ не існує, то інтеграл $\int_0^{\infty} x \sin x dx$ є розбіжним.

Приклад 6.

Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + 2x^2 + 3x^4}.$$

Розв'язання.

Для $\forall x \in [1; +\infty)$ виконується умова

$$0 < \frac{1}{1 + 2x^2 + 3x^4} \sim \frac{1}{3x^4}.$$

Тоді за ознакою порівняння заданий інтеграл збігається, оскільки

$$M = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 4 > 1.$$

ЗАНЯТТЯ 4.2. (продовження) Застосування визначеного інтегралу. Обчислення площі плоскої фігури (в декартовій системі координат) (одна година)

4.2.1 Мета заняття. Вміти обчислювати площу плоскої фігури в залежності від способу задання кривої в декартовій системі координат.

4.2.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Обчислення площі, якщо крива задана в декартових координатах.

Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ є неперервною та набуває додатних значень, площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і дугою

кривої $y = f(x)$, дорівнює
$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

Якщо крива задана рівнянням $x = \varphi(y)$, де функція $\varphi(y)$ на відрізку $[c; d]$ є неперервною та набуває на цьому відрізку додатних значень, то площа фігури, обмеженої відрізками прямих $y = c$, $y = d$, $x = 0$ і дугою кривої $x = \varphi(y)$,

обчислюється за формулою
$$S = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d x dy.$$

Якщо $f(x)$ на $[a; b]$ є неперервною, але знакозмінною функцією, то фігура, обмежена кривою $y = f(x)$ та відрізками прямих $x = a$, $x = b$, вже не є криволінійною трапецією.

Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то площа фігури, обмеженої такою кривою та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, дорівнюватиме площі криволінійної трапеції, яка зверху обмежена кривою $-f(x) \geq 0$.

$$\text{Тоді } S = -\int_a^b f(x)dx \text{ або } S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Ця формула залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ декілька разів змінює знак.

2. Якщо фігура обмежена прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$), причому $y_1(x) \leq y_2(x)$ і $y_1(x) \geq 0$ на $[a; b]$, тоді її площа дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, обмежених прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, а зверху кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx, \text{ або } S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

В загальному випадку, коли фігура обмежена зверху та знизу кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – неперервні, але знакозмінні на відрізку $[a; b]$ функції, то площу такої фігури можна записати так:

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx.$$

3. В окремих випадках ліва межа $x = a$ (або права межа $x = b$) може перетворитися в точку перетину кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. В цих випадках межі інтегрування a та b знаходяться як абсциси точок перетину заданих кривих.

4.2.3 Контрольні запитання і завдання

1. Як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат?

4.2.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

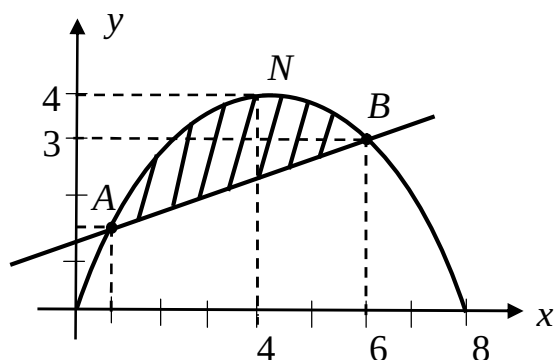
Аудиторні задачі: [15] №№ 3.261, 3.263, 3.265, 3.232, 3.241, 3.246.

Домашні задачі: [15] №№ 3.262, 3.264, 3.233, 3.247.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Обчислити площу області, обмеженої параболою $4y = 8x - x^2$ і прямою $4y = x + 6$.

Розв'язання.



Знайдемо абсциси точок перетину параболі і прямої. Для цього розв'яжемо систему їхніх рівнянь.

$$\begin{cases} 4y = 8x - x^2, \\ 4y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow 8x - x^2 = x + 6 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Точками перетину параболі і прямої є точки $A(1; \frac{7}{4})$ і $B(6; 3)$. На рис.

шукана площа заштрихована.

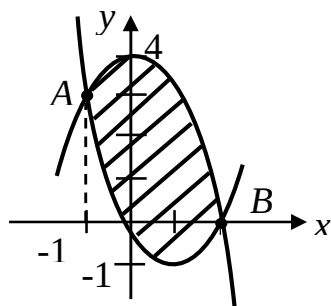
Область ANB зверху обмежена параболою, знизу прямою, тому:

$$S = \int_1^6 \left(\frac{8x - x^2}{4} - \frac{x + 6}{4} \right) dx = \frac{1}{4} \int_1^6 (7x - x^2 - 6) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right) \Big|_1^6 = \frac{125}{4}.$$

Приклад 2. Обчислити площу області, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і $y = x^2 - 2x$.

Розв'язання.

Розв'яжемо систему рівнянь заданих парабол і знайдемо точки перетину цих ліній.



$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \text{ або } x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\text{звідки } \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Підставляючи ці значення в рівняння будь-якої параболі, отримуємо координати точок перетину $A(-1; 3)$ і $B(2; 0)$. Маємо відшукати площу заштрихованої області.

Задана область обмежена зверху параболою $y = 4 - x^2$, а знизу параболою $y = x^2 - 2x$. Тому:

$$S = \int_{-1}^2 ((4 - x^2) - (x^2 - 2x)) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = \left(4x - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = 9.$$

ЗАНЯТТЯ 5. Обчислення подвійних інтегралів в декартовій системі координат

5.1 Мета заняття. Оволодіти основними поняттями та навчитися обчислювати подвійні інтеграли в декартовій системі координат.

5.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Поняття подвійного інтеграла. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Розіб'ємо область D на n частини D_i , які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і утворимо інтегральну суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i .

Якщо інтегральна сума при $\lambda \rightarrow 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i , ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом*:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається інтегрованою в області D ; D – областю інтегрування; x, y – змінними інтегрування; dS (або $dx dy$) – елементом площі.

Достатня умова інтегровності функції. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то вона інтегровна в цій області.

Властивості подвійного інтеграла

1. Сталій множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D C f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy, \quad C = \text{const}.$$

2. Подвійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy.$$

3. Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$.

4. Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ визначені в одній і тій самій області D і $f(x, y) \geq g(x, y)$, то $\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$.

5. (Адитивність подвійного інтеграла). Якщо область інтегрування функції $f(x, y)$ розбити на області D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$.

6. (Оцінка подвійного інтеграла). Якщо функція неперервна в обмеженій замкненій області D , яка має площу S , то $mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS$,

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D .

7. (Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , яка має площу S , то в цій області існує така точка (x_0, y_0) що $\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0)S$.

Обчислення подвійного інтеграла. Обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла.

Нехай область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = a$ та $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всіх $x \in (a; b)$ (область правильна в напрямі осі Oy).

Формула для обчислення подвійного інтеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Права частину формули називають повторним інтегралом від функції $f(x, y)$ за областю D .

5.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ за областю D ?
2. Сформулювати достатню умову існування подвійного інтеграла.
3. Перерахувати властивості подвійного інтеграла.
4. Яка область D називається правильною в напрямі осі Oy ? Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла за такою областю.
5. Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла за областю D у випадку, коли ця область правильна в напрямі осі Ox .

5.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

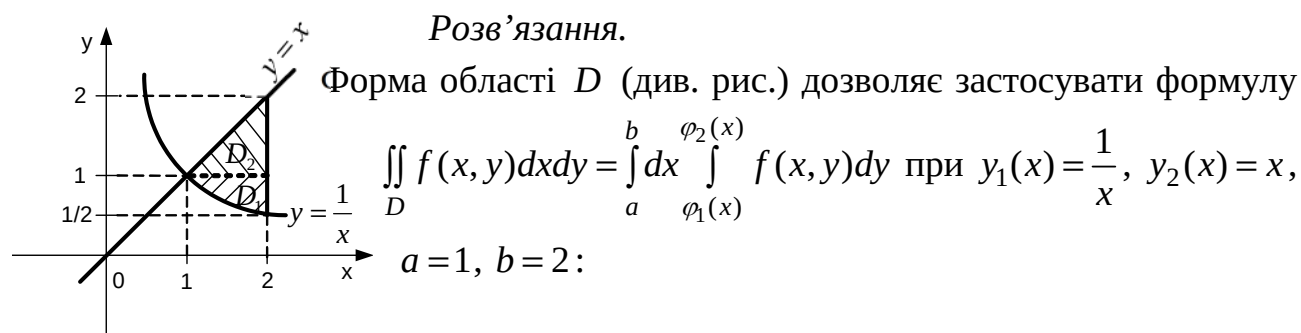
Аудиторні задачі: [15] №№ 5.1, 5.3, 5.5, 5.20, 5.22, 5.24.

Домашні задачі: [15] №№ 5.2, 5.4, 5.6, 5.21, 5.23, 5.25.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Звести подвійний інтеграл $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ до повторного двома способами і обчислити його, якщо область інтегрування D обмежена лініями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.



$$I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{1/x}^x \frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{1/x}^x dx = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{8}.$$

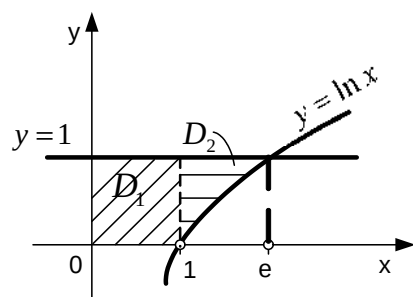
Приклад 2.

Змініть порядок інтегрування у повторному інтегралі $I = \int_0^1 dy \int_0^{e^y} f(x, y) dx$

Розв'язання.

Область інтегрування D обмежена лініями: $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = e^y$ або $y = \ln x$ (див. рис.).

Якщо внутрішнє інтегрування провести по y , а зовнішнє – по x , то задану область слід розбити на дві частини D_1 та D_2 . Маємо



$$D_1 = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\};$$

$$D_2 = \{\ln x \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq e\};$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy.$$

ЗАНЯТТЯ 6. Заміна змінних в подвійному інтегралі

6.1 Мета заняття. Оволодіти основними поняттями та навчитися виконувати заміну змінних при обчислюванні подвійних інтегралів в полярній системі координат.

6.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Подвійний інтеграл у полярних координатах. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D , тоді існує інтеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Припустимо, що за допомогою формул $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, які називаються *формулами перетворення координат*, ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та v . Вважатимемо, що $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Ці формули називаються *формулами оберненого перетворення*. Кожній точці $M(x, y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u, v)$ на координатній площині з прямокутними координатами u і v . Нехай множина всіх точок $M^*(u, v)$ утворює обмежену замкнену область D^* .

Якщо перетворення $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля функціональний визначник

$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, який називається **визначником Якобі** або **якобіаном**, а

функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива така формула заміни змінних

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Оскільки

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho, \quad |J(\rho, \varphi)| = \rho, \text{ то}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy , а D^* – відповідна їй область в полярній системі координат.

6.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Запишіть загальну формулу заміни змінних у подвійному інтегралі.
2. Що таке Якобіан?
3. Запишіть формулу переходу до полярних координат у подвійних інтегралах.
4. Чому дорівнює Якобіан для полярних координат?
5. Запишіть формулу переходу до узагальнених полярних координат у подвійних інтегралах.
6. Чому дорівнює Якобіан для узагальнених полярних координат?

6.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [15] №№ 5.39(а, в), 5.40(а), 5.41, 5.43, 5.45, 5.49.

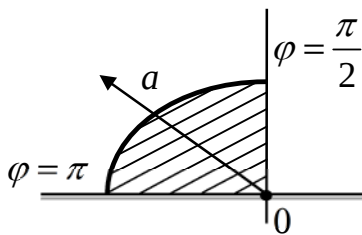
Домашні задачі: [15] №№ 5.39(б), 5.40(б), 5.42, 5.44.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1.

Обчислити подвійний інтеграл $I = \iint_D \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$, якщо область D –

круговий сектор, обмежений лініями $\rho = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$.



Розв'язання.

Зробимо рисунок області інтегрування D .

Побудувавши коло $\rho = a$ і промені, які утворюють з полярною віссю кути $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, отримаємо круговий сектор OAB з центром у полюсі O .

Зовнішня межа області D визначається рівнянням $\rho = a$. Рухаючись вздовж променя, що прямує із полюса і виходить із області D по колу $\rho = a$, знаходимо границі змінювання полярного радіуса $\rho = [0; a]$. В результаті маємо двократний інтеграл:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^a \sin \varphi \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} (-\cos \varphi) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{a^2}{2}.$$

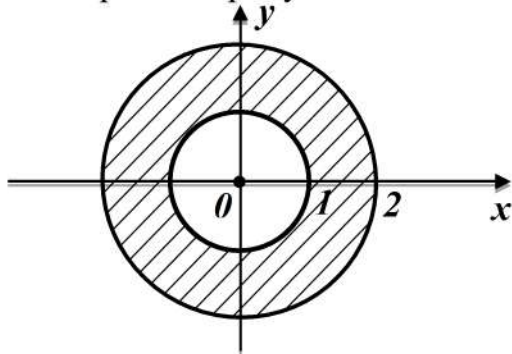
Приклад 2.

Обчислити подвійний інтеграл $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де D – кругове кільце,

яке утворене колами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання.

Зробимо рисунок області інтегрування D .



Оскільки задана область обмежена двома колами, то доцільно перейти до полярних координат.

За відповідними формулами одержимо

$$I = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ dxdy = \rho d\varphi d\rho \end{array} \right| = \iint_D \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho} = \iint_D d\varphi d\rho = \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \rho \Big|_1^2 = 2\pi.$$

ЗАНЯТТЯ 7. Числові ряди. Ряди з додатними членами

7.1 Мета заняття. Вивчити ознаки збіжності додатних рядів, навчитися досліджувати знакопостійні ряди на збіжність.

7.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Нескінченним числовим рядом називається послідовність чисел, з'єднаних знаками додавання. Ці числа, які називаються членами ряду, позначимо a_n , а ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ запишемо у вигляді $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Доданок a_n називається загальним членом ряду.

Сума $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i = S_n$ називається частинною сумою

ряду. Сумою S ряду, що збігається, називається границя послідовності його частинних сум, тобто $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i$. Суму ряду, що збігається, прийнято

позначати тим же символом, що і сам даний ряд $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Деякі властивості рядів, що збігаються:

1) Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Наслідок. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або не існує, то ряд розбігається.

2) Якщо ряд збігається, то збігаються і ряди, отримані з нього приєднанням або відкиданням скінченної кількості членів.

Залишковим членом r_n збіжного ряду називається різниця між сумою S ряду й частинною сумою S_n його перших n доданків: $r_n = S - S_n$.

Очевидно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

Знакопостійним рядом називається ряд, всі члени якого, крім, може бути, скінченної їхньої множини, числа того самого знака (або додатні або від'ємні).

Достатні ознаки збіжності знакопостійних рядів:

1) Ознака порівняння.

Нехай $0 < a_n \leq b_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

Якщо ряд:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

збігається, то збігається й ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots,$$

причому $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ розбігається, то розбігається й ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

2) Ознака Даламбера

Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то

ряд збігається при $l < 1$; ряд розбігається при $l > 1$.

3) Ознака Коші збіжності ряду

Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тоді знакододатний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається, якщо $l < 1$ і

розбігається, якщо $l > 1$.

4) Інтегральна ознака збіжності рядів

Якщо $f(x)$ неперервна невід'ємна й не зростаюча на множині $[1, \infty)$ функція, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

7.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення числового ряду, частинної суми і суми ряду.

2. Сформулюйте ознаку порівняння знакопостійних рядів.

3. Сформулюйте ознаку Даламбера збіжності ряду.

4. Сформулюйте ознаку Коші збіжності ряду.

5. Сформулюйте інтегральну ознаку збіжності ряду.

7.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 2.2, 2.5, 2.9, 2.18, 2.31, 2.34, 2.43, 2.50.

Домашні задачі: [16] №№ 2.4, 2.6, 2.10, 2.19, 2.32, 2.35.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера

$$a_n = \frac{n!}{n^n}; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{ряд}$$

збігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p - \text{const}$)

Розв'язання.

а) Нехай $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Тоді $\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} =$

$$= \begin{cases} \ln x \Big|_1^\infty & (p=1) \\ \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^\infty & (p \neq 1) \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & p \leq 1 \\ \text{const}, & p > 1 \end{cases}.$$

Таким чином, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p > 1$ і розбігається до $+\infty$, якщо $p \leq 1$.

Отже, заданий ряд збігається при $p > 1$ і розбігається в протилежному випадку.

Даний ряд часто використовується при дослідженні рядів на збіжність за допомогою ознаки порівняння. Зокрема, при $p = 1$ одержимо гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

ЗАНЯТТЯ 8.1. Знакозмінні та знакопозначені ряди (одна година)

8.1.1 Мета заняття. Навчитися досліджувати знакопозначені ряди на збіжність. Навчитися використовувати до розв'язування задач на дослідження збіжності рядів ознаку Лейбніца.

8.1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними так і від'ємними, називають знакозмінними. Серед рядів з доданками змінного знака виділяють ряди, в яких знаки членів строго чергуються, тобто ряди виду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ (або $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$), де $a_n > 0$. Такі ряди називають знакопозначеними. Для таких рядів справедлива наступна достатня ознака збіжності.

Теорема Лейбніца. Якщо члени ряду, знаки якого строго чергуються $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ не зростають по абсолютній величині: $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_k| \geq \dots$ і виконується необхідна ознака збіжності рядів: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд збігається.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*.

Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів:

1) Сума умовно збіжного ряду залежить від порядку членів.

2) Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається умовно, то яким би не було число L , то

члени ряду можливо переставити так, щоб здобутий ряд збігався до L .

3) Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, здобутий з нього будь-яким переставленням членів, збігається до того ж самого числа, що й поданий ряд, крім того здобутий ряд збігається абсолютно.

8.1.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення знакозмінного та знакопозначеного рядів.

2. Сформулюйте теорему Лейбніца.

3. Дайте означення абсолютної і умовної збіжності знакозмінних рядів.

8.1.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 2.59, 2.61, 2.65, 2.67, 2.69, 2.71.

Домашні задачі: [16] №№ 2.60, 2.64, 2.68, 2.70.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Розв'язання

Маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$. Даний ряд збігається,

оскільки виконані умови теореми Лейбніца: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Причому збігається умовно, тому що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, утворений із модулів його членів, розбігається.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання

Складемо ряд з абсолютних величин заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Перевіримо необхідну умову збіжності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 \Rightarrow$ виконується.

Скористаємося першою ознакою порівняння рядів у формі нерівності. Для аналізу збіжності ряду порівняємо його з розбіжним гармонічним рядом

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Логарифмічна функція $f(x) = \ln(x+1)$ зростає повільніше за лінійну

функцію $\varphi(x) = x+1$, тому $\ln(n+1) < n+1$, звідки $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$. Оскільки ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ розбігається, то за ознакою порівняння ряд з більшими членами

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ розбігається. Остаточно, абсолютний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ – розбіжний.

Для подальшого дослідження слід застосувати ознаку Лейбніца:

1) оскільки логарифмічна функція $f(x) = \ln(x+1)$ монотонно зростає, то функція $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$ монотонно спадає. Отже, члени ряду монотонно

спадають за абсолютною величиною $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} \forall n > 1$;

2) крім того $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$.

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються.

Оскільки за ознакою Лейбніца ряд збігається, а ряд з абсолютних величин розбігається, то заданий ряд є умовно збіжним.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{2^n}$ ($a \in R$).

Розв'язання

Даний ряд є знакозмінним. Складемо ряд з його абсолютних значень і дослідимо отриманий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos na|}{2^n}$ з додатними членами. Перевіримо

виконання для нього необхідної умови збіжності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\cos na|}{2^n} = 0$. Далі

порівняємо цей ряд з геометричною нескінченно спадною прогресією $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, яка є збіжним рядом (можна обчислити її суму). Кожен член отриманого ряду не більший відповідного члена геометричної прогресії: $\frac{|\cos na|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Тому згідно з першою ознакою порівняння (у формі нерівності), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos na|}{2^n}$ теж збігається.

Застосувавши достатню ознаку збіжності знакозмінних рядів, робимо висновок, що заданий ряд є абсолютно збіжним.

ЗАНЯТТЯ 8.2 (продовження). Функціональні та степеневі ряди. Область збіжності (одна година)

8.2.1 Мета заняття. Вивчити функціональних рядів, вміти знаходити область збіжності. Вивчити степеневі ряди, навчитися знаходити радіус збіжності, навчитися розкладати функцію у степеневий ряд.

8.2.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функціональним рядом називається сума $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, де $u_1(x); u_2(x); \dots; u_n(x); \dots$ деякі функції визначені на деякій множині D .

Для кожного числового значення змінної x функціональний ряд перетворюється в деякий числовий ряд. Деякі із цих рядів будуть збіжними, а інші - розбіжними. Точка x називається точкою збіжності (розбіжності) функціонального ряду, якщо збігається (розбігається) відповідний числовий ряд. Множина точок збіжності (розбіжності) називається областю збіжності D_1 (розбіжності - D_2) функціональних рядів.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* на множині D_1 до граничної функції $S(x)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall x \in D_1 \forall n > N |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Ряд $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ називається мажорованим на множині Q , якщо існує такий

збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами, що, починаючи з деякого n ,

$|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in Q$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *мажоруючим рядом*.

З означення випливає, що будь-який ряд, мажорований на множині Q , абсолютно збігається на цій множині.

Достатня ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності рядів. Будь-який функціональний ряд, мажорований на множині Q , рівномірно збігається на цій множині.

Властивості рівномірно збіжних рядів:

1) Сума рівномірно збіжного числового ряду, складеного з неперервних функцій, неперервна.

2) Сума рівномірно збіжного на $[a; b]$ ряду неперервних функцій інтегровна і справедлива формула почленного інтегрування (тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів).

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt, \text{ де } x \in [a; b]$$

3) Нехай ряд $\sum_1^{\infty} u_n(x)$, складений з неперервно диференційовних функцій, збігається в кожній точці множини $[a; b]$, а ряд, складений з похідних, рівномірно збігається, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ допускає почленне диференціювання, тобто,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Серед великого різноманіття функціональних рядів найбільш простим у теоретичному відношенні й, разом з тим, найбільш важливим для більшості застосувань є клас степеневих рядів.

Степневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n (x-a)^n,$$

де $a, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні числа.

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

Поклавши $x-a = t$, одержимо степеневий ряд за степенями t . Тому, не порушуючи спільності, надалі будемо розглядати ряди вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Загальна форма області збіжності степеневому ряду є простим наслідком наступної найважливішої властивості рядів цього класу.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ збігається в точці $\alpha \neq 0$, то він збігається абсолютно на множині $(-\lvert\alpha\rvert; +\lvert\alpha\rvert)$. Якщо в точці $x = \beta$ степеневий ряд розбігається або збігається умовно, то даний ряд розбігається всюди, де $\lvert x \rvert > \lvert \beta \rvert$.

Наслідком теореми Абеля є наявність існування для степеневому ряду інтервалу збіжності $(-R, R)$. Число R називається *радіусом збіжності степеневому ряду*. Для визначення радіусу збіжності користуються однією з формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\lvert a_n \rvert}}$$

Степеневий ряд $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ рівномірно збігається на будь-якій замкненій підмножині своєї області збіжності.

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

При $a = 0$ ряд Тейлора приймає вигляд

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Цей ряд називають *рядом Маклорена*.

Формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Легко перевірити, що радіус збіжності отриманих рядів дорівнює нескінченності, тобто областю їхньої збіжності є вся числова вісь.

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

Якщо $m = -1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1;1)$$

Цей ряд збіжний в інтервалі $(-1;1)$.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1).$$

8.2.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення функціонального ряду та області його збіжності.
2. Дайте означення рівномірно збіжного функціонального ряду.
3. За яких умов функціональний ряд можна почленно диференціювати, інтегрувати?
4. Дайте означення степеневому ряду та області його збіжності
5. Сформулюйте теорему Абеля
6. Як знаходиться радіус збіжності степеневому ряду
7. Наведіть формули розкладання основних елементарних функцій в ряд Маклорена.

8.2.4. Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 2.82, 2.83, 2.89, 2.100, 2.102, 2.105.

Домашні задачі: [16] №№ 2.84, 2.85, 2.88, 2.101, 2.104.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти область збіжності наступних функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{|x|^n}}{n}$

Розв'язання.

а) Оскільки $\left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, то за ознакою порівняння

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right|$ також збігається $\forall x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, $x \in (-\infty; +\infty)$ — область

абсолютної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$ — сума геометричної прогресії зі знаменником $q = \cos x$.

Оскільки $|\cos x| \leq 1$, то ряд збігається, якщо $|\cos x| < 1$ і розбігається, якщо $|\cos x| = 1$. Таким чином, $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) — точки розбіжності ряду, а $\forall x \neq \pi k$ ряд збігається абсолютно.

в) Оскільки $\frac{e^{n|x|}}{n} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонічний ряд) розбігається, то за ознакою порівняння $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n|x|}}{n}$ є розбіжним рядом $\forall x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти область збіжності рядів а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (x+1)^n}{n!}$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n (x+1)^n}{2^n}$

Розв'язання

$$\text{а) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n (n+1)!}{n! 5^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty.$$

Отже, ряд збігається на множині $(-\infty; \infty)$.

$$\text{б) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^n 2^{n+1}}{2^n 5^{n+1}} \right| = \frac{2}{5}.$$

Ряд збігається на множині $(-1-R, -1+R)$, поза цією множиною розбігається. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності точки $-1 \pm R$:

При $x = -1 - R = -\frac{7}{5}$, маємо $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{7}{5} + 1\right)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ який є розбіжним.

При $x = -1 + R = -\frac{3}{5}$, дістаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{3}{5} + 1\right)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ який також розбіжний.

Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал: $\left(-\frac{7}{5}; -\frac{3}{5}\right)$

Приклад 3. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Розв'язання

Коли у формулі $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $x \in (-1; 1)$ покласти $-x^2$ замість x і

знайдений ряд проінтегрувати, то отримаємо:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ тобто } \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$x \in (-1; 1)$.

ЗАНЯТТЯ 9. Розкладання 2π - періодичної функції в ряд Фур'є

9.1 Мета заняття. Навчитися розкладати в ряди Фур'є 2π періодичні функції.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Тригонометричним рядом називається ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де a_0, a_n, b_n - задані числа, $n = 1, 2, \dots$

Рядом Фур'є функції періодичної функції $f(x)$, визначеної на відріжку $[-\pi, \pi]$, називається ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Числа a_0 , a_n , b_n називаються коефіцієнтам Фур'є.

Теорема Діріхле. Якщо $f(x)$ кусково-гладка на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є збігається в кожній точці цього відрізку, причому для будь-якої точки t_0 сума ряду

$$S(t_0) = \frac{f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)}{2}.$$

Якщо функція парна на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ непарна відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

9.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення тригонометричного ряду.
2. Запишіть ряд Фур'є для функції періодичної з періодом 2π .
3. Запишіть ряд Фур'є для функції парної на відрізку $[-\pi, \pi]$, непарної на відрізку $[-\pi, \pi]$.

9.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

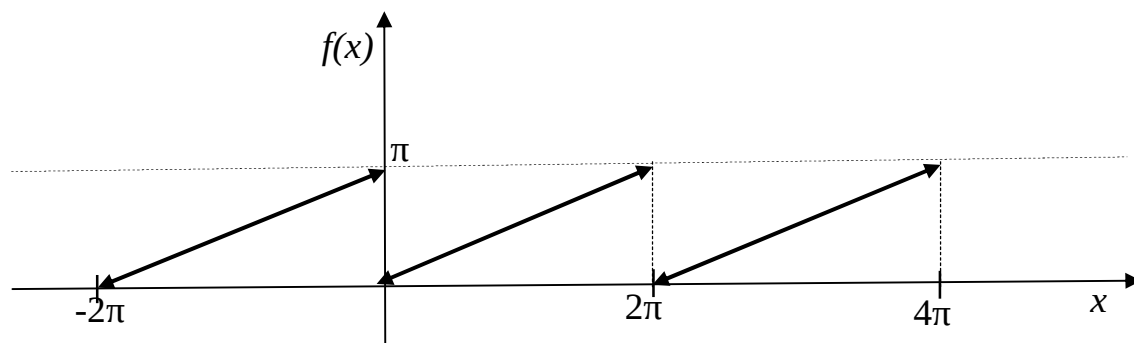
Аудиторні задачі: [16] №№ 2.211, 2.213, 2.216, 2.225.

Домашні задачі: [16] №№ 2.212, 2.217.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{x}{2}$, $0 < x < 2\pi$.

Розв'язання.



Зобразили задану функцію та її періодичне продовження на всю числову вісь. Задана функція задовольняє умови Діріхле.

Функція не є ні парною, ні непарною. Скористаємося формулами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx,$$

$$\text{де} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx.$$

Оскільки функція задана на інтервалі $(0; 2\pi)$, змінимо у цих формулах межі інтегрування.

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cdot \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x \cdot \sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cdot \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x \cdot \cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Важливо пам'ятати: $\sin(n\pi) = 0, \forall n, \cos(n\pi) = (-1)^n, \forall n$.

Підставляючи отримані значення a_0, a_n, b_n у вищенаведену формулу, отримуємо шуканий розклад заданої функції в ряд Фур'є:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

Цей розклад справедливий, тобто отриманий ряд збігається до заданої функції, у всіх точках її області визначення $0 \leq x \leq 2\pi$. У граничних точках $x=0$ і $x=2\pi$ сума ряду дорівнює $\frac{\pi}{2}$ (у цих точках усі члени ряду, крім першого, обертаються в нуль).

ЗАНЯТТЯ 10. Диференціальні рівняння (ДР) I-го порядку (з розділяючими та розділеними змінними, лінійні рівняння та рівняння Бернуллі)

10.1 Мета заняття — навчити студентів розв'язувати диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними, лінійні рівняння, а також рівняння Бернуллі

10.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення виду

$$F(x, y, y') = 0,$$

де x — незалежна змінна (аргумент); $y = y(x)$ — невідома функція аргументу x ; $F(x, y, y')$ — задана функція змінних $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$. Наведене рівняння не розв'язане відносно похідної.

Іноді не можна знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в явному виді, але можна записати його неявно, тобто

$$F(x, y, C) = 0.$$

Останнє співвідношення називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння з відокремленими змінними — це рівняння, які можна записати у вигляді $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$. Інтегруючи ліву та праву частини цього рівняння, отримаємо його загальний інтеграл

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$, де $f_1(x), f_2(x)$ — функції тільки від x , $g_1(y), g_2(y)$ — функції тільки від y . Поділивши обидві частини

початкового диференціального рівняння на $g_1(y) f_2(x) \neq 0$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0,$$

загальний інтеграл якого

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = C.$$

Функція $F(x, y)$ називається однорідною степені k , якщо для всіх $\lambda > 0$ виконується рівність $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y)$. Прикладом однорідної функції може бути будь-яка форма (однорідний многочлен) степені k . Функції

$$\frac{x-y}{x+y}, \frac{x^2+xy}{x-y}, x^2+y^2-xy, x^{k-1}y+y^k,$$

наприклад, є однорідними відповідно до степені $0, 1, 2, \dots, k$.

Диференціальне рівняння вигляду $y' + P(x)y = Q(x)$ називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним (це рівняння $y' + P(x)y = 0$), у протилежному випадку – лінійним неоднорідним.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку можна інтегрувати методом Бернуллі, який полягає у тому, що розв'язок рівняння шукається у вигляді добутку двох функцій $U = U(x)$ і $V = V(x)$, тобто $y = UV$. Для визначення цих функцій маємо систему

$$\begin{cases} V' + P(x)V = 0, \\ U' V = Q(x). \end{cases}$$

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку можна інтегрувати методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа). Цей метод полягає в тому, що спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного рівняння, тобто рівняння $y' + P(x)y = 0$. Цей загальний розв'язок має вигляд $y = C \cdot e^{-\int P(x) dx}$. Вважаючи у цьому співвідношенні величину C функцією від x , шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx}$. Для цього підставляємо y і y' , які визначаються із співвідношення $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx}$, в задане рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, а потім із отриманого диференціального рівняння визначаємо функцію $C(x)$. Таким

чином, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння отримаємо у вигляді $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Рівняння (нелінійне) вигляду $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ (де $m \neq 0, m \neq 1$) називається рівнянням Бернуллі. Його можна перетворити у лінійне рівняння, виконавши заміну невідомої функції за допомогою підстановки $z = y^{1-m}$, внаслідок чого початкове рівняння буде мати вигляд

$$\frac{z'}{1-m} + P(x) \cdot z = Q(x).$$

Рівняння Бернуллі можна також розв'язати, безпосередньо використавши підстановку $y = U \cdot V$, а також використовуючи метод варіації довільної сталої.

10.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення диференціального рівняння.
2. Дайте означення порядку диференціального рівняння.
3. Що таке розв'язок диференціального рівняння?
4. Дайте означення загального розв'язку та загального інтегралу диференціального рівняння 1-го порядку.
5. Що таке початкові умови для диференціального рівняння першого порядку?
6. Що таке задача Коші?
7. Сформулюйте теорему Коші про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
8. Наведіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремленими змінними.
9. Наведіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
10. Наведіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку.
11. В чому полягає метод Бернуллі розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку?

10.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 1.9, 1.14, 1.26, 1.73, 1.79, 1.82, 1.94, 1.96.

Домашні задачі: [16] №№ 1.10, 1.23, 1.70, 1.86.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння
 $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0$.

Розв'язання.

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві частини рівняння на $y\sqrt{1 + x^2}$, отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними: $\frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{(1 + y^2)dy}{y} = 0$. Інтегруючи,

маємо:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}} + \int \left(\frac{1}{y} + y \right) dy = C \Rightarrow \frac{1}{2} \int (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 + x^2) + \int \frac{dy}{y} + \int y dy = C \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Отримали загальний інтеграл початкового рівняння, де C – довільна стала.

Загальний розв'язок: $\sqrt{1 + x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C$.

Приклад 2.

Розв'язати диференціальне рівняння $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

Розв'язання.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Покладемо $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' у початкове рівняння, отримаємо: $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2 \Rightarrow u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = x^2$.

Поклавши $v' + \frac{v}{x} = 0$, приходимо до наступної системи рівнянь для знаходження u та v :

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0; \\ u'v = x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо v , а з другого функцію u . Розв'язуючи перше рівняння, отримаємо $v = \frac{1}{x}$ (довільну постійну під час знаходження не записуємо). З рівняння (2): $u' = \frac{x^2}{v} = x^3 \Rightarrow u = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, звідси маємо для y :

$$y = uv = \left(\frac{x^4}{4} + C \right) \frac{1}{x} = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x} - \text{загальний розв'язок.}$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$.

Розв'язання.

Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \cdot y^2 \neq 0$ ($x=0$ і $y=0$ не задовольняють рівняння): $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2}$. Маємо рівняння Бернуллі, де $\alpha = -2$.

Зробимо заміну $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'v + u \cdot v'$.

Рівняння має вигляд $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}$.

$$u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}.$$

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, & (1) \\ u'v = \frac{1}{x^2 u^2 v^2}. & (2) \end{cases}$$

$$(1): \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|v| = -\ln|x| \rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

$$(2): \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{u^2} \Big| \cdot x \cdot u^2 dx \rightarrow u^2 \cdot du = x dx \rightarrow \int u^2 du = \int x \cdot dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3} \rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}.$$

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C} - \text{загальний розв'язок.}$$

ЗАНЯТТЯ 11.1. Однорідні лінійні ДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами (одна година)

11.1.1 Мета заняття — навчити студентів розв'язувати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

11.1.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Диференціальне рівняння виду $ay'' + by' + cy = 0$, де a, b, c – сталі ($a \neq 0$), називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння). Загальний розв'язок у лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку $ay'' + by' + cy = 0$ має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

де y_1, y_2 — лінійно незалежні розв'язки цього рівняння. Початкове диференціальне рівняння $ay'' + by' + cy = 0$ можна привести до виду $y'' + py' + qy = 0$. Щоб розв'язати це рівняння, потрібно скласти характеристичне рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Залежно від характеру коренів λ_1, λ_2 , можливі три випадки:

- 1) корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 дійсні і різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ — загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$;
- 2) корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 дійсні та співпадаючі, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (λ — двократний корінь характеристичного рівняння). Тоді $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$ — загальний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$.
- 3) корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 комплексно-спряжені $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тоді загальний розв'язок початкового рівняння $y'' + py' + qy = 0$ має вигляд $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

11.1.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.
2. Дайте означення лінійно залежних і лінійно незалежних функцій на відрізьку.

3. Яка система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння називається фундаментальною?

4. Як записувати загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?

5. Яке рівняння називається характеристичним? Як його знаходять?

6. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?

7. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні?

8. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені?

11.1.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16]: №№ 1.252, 1.261, 1.263, 1.270.

Домашні задачі: [16]: №№ 1.254, 1.262, 1.264, 1.271.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язання.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 6$. Характеристичне рівняння має дійсні і різні корені. Звідси загальний розв'язок початкового диференціального рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$ має вигляд: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Отже, відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y^{IV} - 81y = 0$.

Розв'язання.

Розв'язуємо характеристичне рівняння $k^4 - 81 = 0 \Rightarrow$

$$k = \sqrt[4]{81} = 3 \left(\cos \frac{2\pi m}{4} + i \sin \frac{2\pi m}{4} \right) = 3 \left(\cos \frac{\pi m}{2} + i \sin \frac{\pi m}{2} \right).$$

Припускаючи $m = 0; 1; 2; 3$, отримаємо $k_{1,2} = \pm 3, k_{3,4} = \pm 3i$. Таким чином, характеристичне рівняння має чотири корені. Звідси загальний розв'язок початкового диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x, \text{ де } C_1, C_2 \text{ — довільні сталі.}$$

$$\text{Отже, відповідь: } y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$$

ЗАНЯТТЯ 11.2. (продовження) ДР зі спеціальною правою частиною (одна година)

11.2.1 Мета заняття — навчити студентів розв'язувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною.

11.2.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

У найпростіших випадках, коли права частина заданого неоднорідного диференціального рівняння має спеціальний вигляд, вказаний частинний розв'язок $y_{\text{ч}}$ можна знайти з використанням методу невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо два спеціальних вигляди правої частини.

1) $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ — многочлен n -го степеня. Тоді можливі наступні три випадки:

а) Число α не є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок $y_{\text{ч}}$ шукається у вигляді

$$y_{\text{ч}} = R_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n)e^{\alpha x}.$$

б) Число α є простим (однократним) коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок $y_{\text{ч}}$ шукається у вигляді $y_{\text{ч}} = xR_n(x)e^{\alpha x}$.

в) Число α є двократним коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок $y_{\text{ч}}$ шукається у вигляді $y_{\text{ч}} = x^2 R_n(x)e^{\alpha x}$.

$$2) y'' + py' + qy = e^{\alpha x} (P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x), \text{ де } \beta \neq 0,$$

$P_m(x), Q_n(x)$ — многочлени m -го та n -го степеней відповідно. Тоді можливі наступні два випадки:

а) Число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок y_u шукається у вигляді $y_u = e^{\alpha x} (U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x)$ де $U(x), V(x)$ — многочлени, степінь яких дорівнює найбільшому з чисел m і n .

б) Число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. У цьому випадку частинний розв'язок y_u шукається у вигляді $y_u = x e^{\alpha x} (U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x)$.

11.2.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Як записується частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$?

2. Як записується частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має вигляд $f(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$?

3. Як записується частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} (P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$?

11.2.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16]: №№ 1.274, 1.279, 1.288, 1.304, 1.309(1, 3).

Домашні задачі: [16] №№ 1.276, 1.278, 1.289, 1.306.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x.$$

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною $f(x) = 37\cos 3x$.

Його характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 10 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Тобто

$$y_0 = e^x \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x).$$

Запишемо вигляд $y_u(x)$ – окремого розв'язку ДР.

Скористаємось методом підбору $y_u(x)$:

- 1) права частина $f(x) = 37 \cos 3x$ ($\alpha = 0, \beta = 3$). «Контрольне число» $m = \pm 3i$;
- 2) попередньо окремий розв'язок заданого рівняння має вигляд $\bar{y}_u(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$.
- 3) «контрольне число» $m = \pm 3i$ не є коренем характеристичного рівняння, тому зазначений попередній вигляд $\bar{y}_u(x)$ є остаточною.

Знайдемо коефіцієнти A і B :

$$y'_u = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x, \quad y''_u = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Підставимо y_u, y'_u, y''_u в задане рівняння, отримаємо рівність

$$(A - 6B) \cdot \cos 3x + (B + 6A) \cdot \sin 3x = 37 \cos 3x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$ з обох частин рівняння.

$$\begin{cases} A - 6B = 37, \\ B + 6A = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -6. \end{cases}$$

Отже, $y_u(x) = \cos 3x - 6 \sin 3x$.

Знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР:

$$y(x) = y_0(x) + y_u(x) = e^x (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x) + \cos 3x - 6 \sin 3x.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$.

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною $P(x) = 25x^2 - 2$ (многочлен другого порядку).

Його характеристичне рівняння: $k^2 + 6k + 5 = 0 \rightarrow k_1 = -5, k_2 = -1$. Корені характеристичного рівняння дійсні різні. Отже, $y_0 = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{-x}$.

Запишемо вигляд $y_u(x)$ – окремого розв'язку ДР.

Застосовуємо метод підбору:

- 1) права частина рівняння $f(x) = 25x^2 - 2$ – многочлен другого порядку, $f(x)$ не містить множника $e^{\alpha x}$, не містить також ні синуса, ні косинуса. Це означає, що «контрольне число» $m = \alpha \pm i\beta = 0$;
- 2) окремий розв'язок попередньо слід знаходити у вигляді многочлена другого порядку, тобто $\bar{y}_u(x) = Ax^2 + Bx + C$ (окремий розв'язок має співпадати за структурою з правою частиною рівняння);
- 3) «контрольне число» $m = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, отже, множити «попередній вигляд» окремого розв'язку $\bar{y}_u(x)$ на x^s не потрібно.

Остаточно, окремий розв'язок рівняння знаходитимемо у вигляді $y_u(x) = \bar{y}_u(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Знайдемо невизначені коефіцієнти A, B, C :

$$y'_u = 2Ax + B, \quad y''_u = 2A.$$

Підставимо y_u, y'_u, y''_u в задане рівняння, отримаємо рівність

$$2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 - 2 \quad \text{або}$$

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + (2A + 6B + 5C) = 25x^2 - 2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x з обох частин рівняння, маємо систему

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = -2, \end{cases}$$

з якої знаходимо $A = 5, B = -12, C = 12$.

$$\text{Отже, } y_u(x) = 5x^2 - 12x + 12.$$

Запишемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР:

$$y(x) = y_0(x) + y_u(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12.$$

ЗАНЯТТЯ 12. Основні властивості перетворення Лапласа

12.1 Мета заняття. Вміти знаходити зображення функції на основі властивостей перетворення Лапласа та таблиці зображень.

12.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Функцією оригіналом називається довільна комплексна функція $f(t) = u(t) + iv(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє такі умови:

1) $f(t)$ неперервна або кусково неперервна на всій осі t , тобто $f(t)$ інтегровна на будь-якому скінченному проміжку

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$

3) $|f(t)|$ зростає при $t \rightarrow +\infty$ не швидше показникової функції, тобто існують такі сталі $M > 0$ і $s_0 > 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, число s_0 називається показником росту функції.

Найпростішою функцією оригіналом є одинична функція Хевісайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

У подальшому під заданою функцією $f(t)$ будемо розуміти $f(t)\eta(t)$, тобто вважати, що $f(t)=0$ при $t < 0$. Функцію Хевісайда будемо також позначати 1.

Зображенням функції оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається інтегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \text{ Цей інтеграл збігається у півплощині } \operatorname{Re} p > s_0, \text{ } s_0 \text{ є}$$

показником росту функції $f(t)$, тобто функція $F(p)$ визначена при $\operatorname{Re} p > s_0$. В цій же півплощині вона є аналітичною. Перетворення, що ставить у відповідність функції $f(t)$ функцію $F(p)$, називається перетворенням Лапласа. Позначається $f(t) \rightarrow F(p)$, $F(p) \leftarrow f(t)$.

Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, а $g(t) \rightarrow G(p)$, то

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \rightarrow \alpha F(p) + \beta G(p), \text{ де } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

2. Теорема подібності

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, то

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

3. Теорема запізнювання

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, то

$$f(t - \tau)\eta(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} F(p)$$

4. Теорема зміщення

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $p_0 \in \mathbb{C}$, тоді $e^{p_0 t} f(t) \rightarrow F(p - p_0)$

5. Диференціювання оригіналу

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0).$$

$$f''(t) \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \rightarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

.....

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

6. Диференціювання зображення

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$F'(p) \leftarrow -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \leftarrow t^2 \cdot f(t),$$

.....

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-1)^n t^n \cdot f(t)$$

7. Інтегрування оригіналу

$$\text{Якщо } f(t) \rightarrow F(p), \text{ то } \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{F(p)}{p}$$

8. Інтегрування зображення

$$\text{Якщо } f(t) \rightarrow F(p) \text{ і інтеграл } \int_p^{+\infty} F(p) dp \text{ збігається, то } \frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp$$

9. Теорема множення (теорема про згортку)

Якщо $F_1(p) \leftarrow f_1(t)$, $F_2(p) \leftarrow f_2(t)$, то

$$F_1(p)F_2(p) \leftarrow f_1(t) * f_2(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \text{ -згортка функцій}$$

10. Формула Дюамеля

Якщо $F_1(p) \leftarrow f_1(t)$, $F_2(p) \leftarrow f_2(t)$, то

$$pF_1(p)F_2(p) \leftarrow f_1(0)f_2(t) + f_1'(t) * f_2(t) = \\ = f_1(t)f_2(0) + f_1(t) * f_2'(t)$$

Таблиця зображень основних функцій

Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$

$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha t} sh \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}$
$e^{\alpha t} ch \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$tsh \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 - \beta^2)^2}$
$tch \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
$\frac{1}{2\beta^3} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$	$\frac{1}{(p^2 + \beta^2)^2}$

12.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Дайте означення функції оригіналу.
2. Що називається зображенням функції-оригіналу.

3. Дайте означення перетворення Лапласа.
4. Наведіть властивості перетворення Лапласа.
5. Наведіть таблицю зображень основних функцій.

12.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 4.1 (а), 4.3 (а,в), 4.4 (а, г), 4.6 (а,б), 4.7 (а,б), 4.8 (а), 4.9 (а), 4.10 (а,в), 4.11 (а, б).

Домашні задачі: [16] №№ 4.6 (в,г), 4.7 (г,д), 4.8 (б), 4.9 (в).

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Використовуючи властивості лінійності знайти зображення функцій: $\sinh \alpha t$, $\cosh \alpha t$, $\sin \alpha t$, $\cos \alpha t$.

Розв'язання.

У кожному з випадків представляємо функцію у вигляді лінійної комбінації експоненціальних функцій, зображення яких відомі

$$\sinh \alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{2} \frac{1}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$$

$$\cosh \alpha t = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p - \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + \alpha} = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$$

$$\cos \alpha t = \frac{e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p - i\alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{p + i\alpha} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$$

$$\sin \alpha t = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} \frac{1}{p - i\alpha} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + i\alpha} = \frac{1}{2i} \frac{2i\alpha}{p^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$$

Приклад 2. Використовуючи теорему запізнювання знайти зображення функцій (а) $\eta(t - \tau)$, (б) $\sin(t - 2)\eta(t - 2)$ та функції заданої графічно (в)

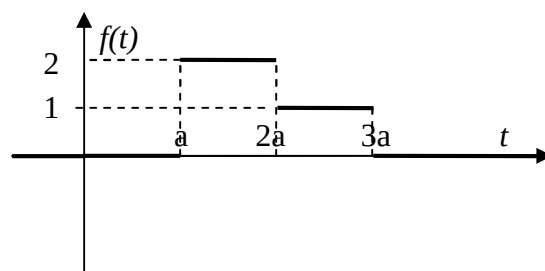


Рис. 1

Розв'язання.

$$\text{а) } \eta(t - \tau) \rightarrow \frac{e^{-p\tau}}{p}$$

$$\text{б) } \sin(t - 2)\eta(t - 2) \rightarrow \frac{e^{-2\tau}}{p^2 + 1}$$

в) Запишемо спочатку задану функцію аналітично, потім скористаємося теоремою запізнювання

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\eta(t - a) - 2\eta(t - 2a) + \eta(t - 2a) - \eta(t - 3a) = 2\eta(t - a) - \eta(t - 2a) - \eta(t - 3a) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2}{p}e^{-ap} - \frac{1}{p}e^{-2ap} - \frac{1}{p}e^{-3ap} \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{\sin 2t - \sin t}{t}$.

Розв'язання.

Зображення функцій $\sin 2t$ та $\sin t$ знайдемо виходячи з таблиці

$$\sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 + 4}, \quad \sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$$

Скористаємось теоремою про інтегрування зображення

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2t - \sin t}{t} &\rightarrow \int_p^{+\infty} \left(\frac{2}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) dp = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{p}{2} - \operatorname{arctg} p \right) \Big|_p^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(\operatorname{arctg} \frac{N}{2} - \operatorname{arctg} N \right) - \left(\operatorname{arctg} \frac{p}{2} - \operatorname{arctg} p \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{2} + \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p - \operatorname{arctg} \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

ЗАНЯТТЯ 13. Відновлення оригіналу за заданим зображенням

13.1 Мета заняття. Уміти знаходити оригінал функції за відомим зображенням.

13.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

У багатьох випадках задане зображення можливо перетворити до такого виду, коли оригінал неважко знайти безпосередньо за допомогою властивостей перетворення Лапласа та таблицею зображень. Наведемо деякі прийоми знаходження зображень:

- 1) Якщо $F(p)$ є правильним раціональним дробом, тоді зображення записують у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{A}{p-a}, \frac{A}{(p-a)^k}, \frac{Ap+B}{p^2+ap+b}, \frac{Ap+B}{(p^2+ap+b)^k}$$

Для кожного з дробів знаходимо оригінал, користуючись властивостями перетворення Лапласа

- 2) Якщо зображення має вигляд $F_1(p) \cdot F_2(p)$, тоді спочатку знаходять оригінали функцій $F_1(p)$ і $F_2(p)$, а потім користуються теоремою про згортку.

- 3) Якщо зображення має вигляд $F(p)e^{-p\tau}$, тоді спочатку знаходять оригінал функції $F(p)$, а потім користуються теоремою запізнювання.

13.3 Контрольні запитання і завдання.

1. Як знаходити оригінал за його зображенням?

2. Наведіть метод знаходження оригіналу, якщо зображення є правильний раціональний дріб.

3. Яка теорема використовується для знаходження оригіналу для зображення вигляду $F_1(p)F_2(p)$?

4. Яка теорема використовується для знаходження оригіналу для зображення вигляду $F(p)e^{-p\tau}$?

13.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 4.12, 4.16, 4.19, 4.20, 4.26, 4.29.

Домашні задачі: [16] №№ 4.13, 4.17, 4.27, 4.30.

Приклади розв'язання типових задач.

Приклад 1. Знайти оригінали функцій:

(а) $F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$, (б) $F(p) = \frac{p}{p^2+2p+5}$,

(в) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2+1}$, (г) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

Розв'язання.

$$\text{а) } F(p) = \frac{1}{p^2(p+3)}$$

Розкладаємо дріб на суму найпростіших та, використовуючи таблицю і властивість лінійності, знаходимо

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3},$$

$$\text{де } A = -\frac{1}{9}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\frac{1}{p^2(p+3)} = -\frac{1}{9} \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{p+3} \leftarrow -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

б) Спочатку виділяємо у знаменнику повний квадрат, потім користуємося таблицею зображень

$$\frac{p}{p^2+2p+5} = \frac{p}{(p+1)^2+2^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\cos 2t \rightarrow \frac{p}{p^2+2^2}, \sin 2t \rightarrow \frac{2}{p^2+2^2}$$

$$e^{-t} \cos 2t \rightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}, e^{-t} \sin 2t \rightarrow \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

Тоді

$$\frac{p}{p^2+2p+5} \leftarrow e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2+1}$$

Спочатку за таблицею знайдемо оригінал для дробу

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2+1}$$

За теоремою запізнювання

$$\sin(t-3)\eta(t-3) \rightarrow \frac{e^{-3p}}{p^2+1}$$

г) Спочатку розкладемо дріб на найпростіші, а потім скористаємося теоремою запізнювання

$$\frac{1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} \leftarrow -1 + e^t$$

$$\frac{e^{-p}}{p(p-1)} \leftarrow -\eta(t-1) + e^{t-1}\eta(t-1)$$

Приклад 2. Знайти оригінал функції $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$, $f(t) = ?$

Розв'язання.

Відомо, що $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$. Тоді, за теоремою про згортку,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \int_0^t \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

ЗАНЯТТЯ 14. Розв'язання диференціальних рівнянь операційним методом

14.1 Мета заняття. Уміти застосовувати операційне числення до розв'язання диференціальних рівнянь.

14.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів.

Розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами операторним методом

Нехай потрібно знайти розв'язання $x(t)$ лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t),$$

(де $f(t)$ – оригінал), яке задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Застосуємо до обох частин (4.1) перетворення Лапласа та використаємо теорему про диференціювання оригіналу та властивість лінійності перетворення Лапласа. Таким чином, дістанемо операторне рівняння

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X(p) + Q(p) = F(p),$$

де $X(p)$ – зображення функції $f(t)$, а $Q(p)$ – деякий многочлен, тотожний нулю, коефіцієнти якого залежать від початкових даних $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, якщо $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$.

З отриманого операторного рівняння знаходимо операторне розв'язання

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{L(p)},$$

де $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристичний многочлен даного диференціального рівняння. Знаходячи за $X(p)$ оригінал $x(t)$, ми таким чином знайдемо $x(t)$ – розв’язання задачі Коші. Коротко алгоритм розв’язання можна сформулювати так:

- 1) Визначити лінійне диференціальне рівняння на просторі оригіналів.
- 2) Використовуючи перетворення Лапласа та його властивості, звести розв’язання задачі Коші до розв’язання операторного рівняння.
- 3) Розв’язати операторне рівняння відносно зображення невідомої функції.
- 4) Знайти невідому функцію (розв’язання задачі Коші) за її зображенням.

14.3. Контрольні запитання і завдання.

1. Що таке операторне рівняння?

2. У чому полягає метод розв’язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння з використанням операційного числення?

14.4 Приклади аудиторних і домашніх задач.

Аудиторні задачі: [16] №№ 4.31, 4.38, 4.45, 4.49.

Домашні задачі: [16] №№ 4.33, 4.37.

Приклади розв’язання типових задач.

Приклад 1. Знайти розв’язання диференціального рівняння при заданих початкових умовах $x'' - 2x' + 2x = \sin t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Розв’язання.

Нехай $x(t) \rightarrow X(p)$, тоді $x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0)$,
 $x''(t) \rightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0)$. Використовуючи початкові умови $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, маємо $x'(t) \rightarrow pX(p)$, $x''(t) \rightarrow p^2 X(p) - 1$. Оскільки $\sin t \rightarrow 1/(p^2 + 1)$, операторне рівняння має вигляд $(p^2 X(p) - 1) - 2pX(p) + 2X(p) = 1/(p^2 + 1)$ або

$$(p^2 - 2p + 2)X(p) - 1 = 1/(p^2 + 1).$$

$$\text{Звідки } X(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \left(\frac{1}{p^2 + 1} + 1 \right) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 - 2p + 2}.$$

Для знаходження $x(t)$ за відомим зображенням $X(p)$ використовуємо властивості лінійності, зсуву та теорему про множення зображень:

$$\frac{1}{p^2 - 2p + 2} = \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \leftarrow e^t \sin t,$$

$$\frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow (e^t \sin t) * \sin t = \int_0^t e^\tau \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau =$$

$$= \left| \sin \tau \cdot \sin(t - \tau) = \frac{1}{2} (\cos(2\tau - t) - \cos t) \right| = \frac{1}{2} \int_0^t e^\tau \cos(2\tau - t) d\tau = e^\tau \cos(2\tau - t) \Big|_0^t +$$

$$+ 2 \int_0^t e^\tau \sin(2\tau - t) d\tau = e^t \cos t - \cos t + 2 \left[e^\tau \sin(2\tau - t) \Big|_0^t - 2 \int_0^t e^\tau \cos(2\tau - t) d\tau \right].$$

$$\int_0^t e^\tau d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1.$$

$$\int_0^t e^\tau \cos(2\tau - 1) d\tau = \frac{1}{5} (e^t - 1) \cos t + \frac{2}{5} (e^t + 1) \sin t;$$

$$- \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \frac{1}{5} (e^t + 1) \sin t + \frac{2}{5} (1 - e^t) \cos t;$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 - 2p + 2} \leftarrow \frac{1}{5} (6e^t + 1) \sin t + \frac{2}{5} (1 - e^t) \cos t.$$

$$\text{Звідки } x(t) = \frac{1}{5} (6e^t + 1) \sin t + \frac{2}{5} (1 - e^t) \cos t.$$

ЗАНЯТТЯ 15. Контрольна робота №1

Література

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) В55).
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с. (517 (07) В55).
3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) В55).
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.2. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Вышейш. шк., 1991. – 351 с. (517(07) С23).
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Вышейш. шк., 1991. – 287 с. (517(07) С23).
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2003. – 704 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2004. – 720 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.-М.: Наука, 1976. – 576 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. 616 с., Т.2. 810 с., Т.3. 662с.

- 10.Інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання: Навч. посібник/ Упоряд.: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва. – Харків: ХТУРЕ, 2012. – 280 с. (517(07) К 49)
- 11.Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Основні теоретичні відомості з курсу вищої математики. Тести.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 450 с. (Климова Н.П., Ремаева О.А. Основные теоретические сведения по курсу высшей математики. Тесты.: Уч. пособие. – Харьков: ХНУРЭ, 2013. – 462 с.) (517(07) К 49)
- 12.Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. –300 с.
- 13.Араманович И.Г., Лунц Г.Е., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1968. – 416 с.
- 14.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Основні формули з вищої математики та алгоритми розв'язування задач (Стислий довідник), Харків, ХНУРЕ, 2012. – 149 с.
- 15.Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.2. Диференціальне та інтегральне числення. – Харків: Компанія СМІТ, 2010. – 430 с.
- 16.Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика. Збірник задач. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: Компанія СМІТ, 2010. – 268 с.
- 17.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Збірник теорем, формул та алгоритмів розв'язування задач з вищої математики, Харків, ХНУРЕ, 2013. – 148 с.
- 18.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.2. Диференціальне і

- інтегральне числення функцій однієї змінної.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016.– 220 с. (517(07) М34)
- 19.Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016. – 140 с. (517(07) М34)
- 20.Ружицька Н.М., Нерух О.Г., Бутенко Н.С. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.4. Диференціальні рівняння. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2015. – 232 с. (517(07) Р83)
- 21.Ремаєва О.О., Кравченко Л.К. Інтегрування функцій однієї змінної (конспект лекцій та завдання для самостійної роботи) для студентів усіх форм навчання. – Харків: ХТУРЕ, 2006. – 130 с. (517(07) К 65)
- 22.Сова Г.В. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». Розділ «Диференціальне числення функцій багатьох змінних». – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 126 с.
- 23.Сова Г.В., Дорошенко В.А. Лекції з дисципліни «Вища математика». Розділ «Інтегральне числення функцій багатьох змінних». – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 126 с.
- 24.Константинова Л.І., Сова Г.В., Колесников Д.О. Тексти лекцій з теорії рядів. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – 127 с. (В-3487 ВМ)
- 25.Дорошенко В.О., Зуєв М.Г., Титаренко О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тексти лекцій. – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 112 с. (517(07) З 43)
- 26.Російсько-український математичний словник. Навч. посібник/ Упоряд.: Сова Г.В. - Харків: ХТУРЕ, 2000. – 128 с.
- 27.Дидактичні матеріали та індивідуальні завдання до теми «Диференціальні рівняння». / Упоряд.: – Бутенко Н.С., Дорошенко В.О., Ремаєва О.О. - Харків, ХТУРЕ, 2000. – 52 с.

28.Чумак О.В., Лапта С.І. Завдання для рейтингових контрольних робіт з курсу вищої математики для другого семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2001. – 64 с.

Електронний документ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
ЧАСТИНА 2

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Упорядник СТОГНІЙ Надія Петрівна

Відповідальний випусковий О. Г. Нерух

Авторська редакція

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою вищої математики.
Протокол № 2 від 04.10.2017 р.

ХАРКІВ 2017

Контрольні завдання з дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія» [Електронний документ] / Упоряд. Н.П. Стогній. – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 36 с.

Упорядник Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

Рецензент: Н.П. Клімова, канд. техн. наук, проф. каф. ВМ

ВСТУП

Оцінювання знань, вмінь та навичок студентів враховує види занять, які згідно з робочою програмою дисципліни «Вища математика» передбачають практичні заняття та самостійну роботу в таких формах:

- виконання практичних робіт;
- виконання самостійних робіт;
- виконання контрольних робіт.

Дане видання покликане допомогти в організації самостійної роботи студентів під час підготовки до виконання контрольних робіт з курсу вищої математики. Наведено загальні методичні поради, програма навчальної дисципліни і зразки виконання типових задач всіх 2 контрольних робіт. Кожний варіант складається з задач, які охоплюють змістові модулі вищої математики. Метою даних методичних рекомендацій є ознайомлення студентів з практичними порадами та завданнями щодо самостійної підготовки до контрольних робіт. За складом, змістом та структурою матеріал повністю узгоджено з навчальним планом.

Методичні рекомендації призначені для студентів першого курсу освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія».

1 ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ

Методичні рекомендації призначені для студентів першого курсу освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія» денної форми навчання.

Зміст контрольних робіт та їх послідовність відповідають робочій програмі курсу «Вища математика».

Завданням поточного контролю є перевірка розуміння та засвоєння певного матеріалу з даної теми, вироблення вмінь та навичок самостійно розв'язувати задачі, вироблення здатності осмислювати зміст теми (модуля) у взаємозв'язку з попередніми темами. Перед виконанням кожної контрольної роботи студент вивчає відповідний лекційний матеріал, проглядає приклади розв'язування задач, розв'язує типові задачі та вправи з кожної теми.

При виконанні контрольної роботи розв'язки всіх задач та пояснення до них повинні бути короткими, але обґрунтованими. При необхідності слід включати до описання розв'язування задачі теоретичний матеріал з використанням формул, теорем, зауважень тощо. Рисунки та графіки потрібно виконувати акуратно, з дотриманням масштабу у вибраній системі координат. Пояснення до розв'язування задач повинні відповідати позначенням на рисунках та графіках.

2 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

2.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

Змістовний модуль 0. Основні формули елементарної математики.

Змістовний модуль 1. Лінійна алгебра.

Тема 1. Визначники, їх властивості та обчислення.

Тема 2. Матриці, дії з матрицями. Ранг матриці.

Тема 3. Обернена матриця. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь в матричному виді. Формули і теорема Крамера.

Тема 4. Теорема Кронекера-Капеллі для систем лінійних алгебраїчних рівнянь загального виду. Метод Гаусса.

Змістовний модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія.

Тема 1. Системи координат. Геометричні вектори. Розкладання вектора за базисом. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.

Тема 2. Рівняння прямої на площині, загальне, з нормальним вектором, з направляючим вектором.

Тема 3. Площина у просторі. Загальне рівняння, відстань від точки до площини. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами. Умова паралельності та перпендикулярності площин. Рівняння площини у відрізках.

Тема 4. Пряма у просторі. Канонічні рівняння, параметричні рівняння. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Перехід від загального рівняння до канонічних. Відстань від точки до прямої.

Тема 5. Рівняння і властивості кривих другого порядку.

Змістовний модуль 3. Вступ до математичного аналізу. Теорія границь.

Тема 1. Послідовності. Границя послідовності. Число e . Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.

Тема 2. Функції. Екстремуми функції. Обернена функція. Неявна функція. Складена функція. Класи елементарних функцій.

Тема 3. Границя функції. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Арифметичні дії над функціями, що мають границю.

Тема 4. Неперервність функції. Типи розривів. Властивості неперервних функцій.

Тема 5. Порівняння функцій. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні функції. Перша та друга визначні границі.

Змістовний модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Тема 1. Похідна та диференціал функції однієї змінної, їх геометричний та фізичний зміст. Правила диференціювання. Таблиця похідних.

Тема 2. Похідні і диференціали вищих порядків. Інваріантність форми першого диференціалу.

Тема 3. Основні теореми для диференційованих функцій: теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коші. Правила Лопіталя для розкриття невизначеностей в границях.

Тема 4. Екстремуми функції. Необхідна умова екстремуму. Достатня умова екстремуму за першою похідною та за похідними старшого порядку.

Тема 5. Випуклість функції. Точки перегину. Асимптоти функції. Дослідження функції і побудова її графіка.

Змістовний модуль 5. Невизначений інтеграл.

Тема 1. Первісна, її властивості. Таблиця невизначених інтегралів елементарних функцій. Заміна змінних, інтегрування частинами.

Тема 2. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій.

2.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

Змістовний модуль 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Тема 1. Функції багатьох (декількох) змінних. Область визначення. Частинні похідні і диференціали. Повний диференціал.

Тема 2. Властивості диференційованих функцій. Геометричний зміст частинних похідних і диференціалу. Дотична площина. Похідна за напрямком. Градієнт функції.

Тема 3. Частинні похідні і диференціали вищих порядків.

Тема 4. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідна і достатня умови екстремуму функції.

Змістовний модуль 2. Визначені та подвійні інтеграли.

Тема 1. Комплексні числа.

Тема 2. Визначений інтеграл, його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінних і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 3. Застосування визначеного інтегралу: площа плоскої фігури, об'єм тіла.

Тема 4. Невласні інтеграли першого і другого родів. Ознаки абсолютної збіжності невластного інтегралу.

Тема 5. Подвійні інтеграли. Зведення подвійного інтегралу до повторних. Заміна змінних в подвійних інтегралах. Перехід до полярних координат.

Змістовний модуль 3. Ряди.

Тема 1. Числові ряди. Необхідна умова збіжності ряду. Властивості рядів, що сходяться. Ознаки збіжності рядів з додатними членами. Знакопочережні ряди. Абсолютно і умовно збіжні ряди.

Тема 2. Функціональні ряди. Степеневі ряди, радіус збіжності степеневого ряду.

Тема 3. Тригонометричні ряди Фур'є. Комплексна форма ряду Фур'є. Ряд Фур'є для функції, заданої на довільному періоді. Ряд Фур'є для функції, заданої на півперіоді.

Тема 4. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Синус- і косинус-перетворення Фур'є.

Змістовний модуль 4. Звичайні диференціальні рівняння.

Тема 1. Визначення диференціального рівняння, його загального і часткового розв'язку. Розв'язок спеціальних типів рівнянь першого порядку: зі змінними, що розділяються, лінійні рівняння та рівняння Бернуллі.

Тема 2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) n -го порядку. Принцип суперпозиції.

Тема 3. Однорідні ЛДР. Лінійно незалежна система розв'язків. Фундаментальна система розв'язків ЛДР.

Тема 4. Неоднорідні ЛДР. Підбір розв'язку за видом правої частини.

Змістовний модуль 5. Операційне числення.

Тема 1. Перетворення Лапласа. Зображення основних елементарних функцій. Властивості перетворення Лапласа.

Тема 2. Відновлення оригіналу.

Тема 3. Застосування операційного числення для розв'язання диференціальних рівнянь.

З ТЕМИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

3.1 Частина 1 (1-й семестр, денна форма)

Контрольна робота №1

Контрольна робота складається з 7 завдань. Вони відповідають теоретичному матеріалу змістовних модулів Частини 1 робочої програми. Термін проведення контрольної роботи – 2 години. Наведено типові задачі контрольної роботи.

Задача 1. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Розв'язання

За правилом Крамера $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, де $i = 1, 2, 3$. Знаходимо всі визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 12 - 27 - 2 - 4 = 21 - 33 = -12;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -20 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -16 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -20 & -4 \\ -16 & -5 \end{vmatrix} = -(100 - 64) = -36;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -10 + 7 + 27 = 24;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 + 3 + 28 - 63 - 12 - 4 = 67 - 79 = -12.$$

А далі знаходимо всі невідомі x_i :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-36}{-12} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{-12} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1.$$

Відповідь: (3; -2; 1).

Задача 2. Знайти: а) A^{-1} ; б) $A(A - B)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

а) Для знаходження оберненої матриці використовуємо формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot A^* = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} - це алгебраїчні доповнення елементів матриці A (для їх обчислення використовуємо формулу $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$).

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & 15 \\ 5 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 15 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 60 - 75 = -15;$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 24 = 10;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(16 - 18) = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 21 = 11;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 12) = -10;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 3) = -5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 21 = -15;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-12 + 24) = -12;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -14 + 8 = -6.$$

Отримали, що

$$A^{-1} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 & -15 \\ 2 & -5 & -12 \\ 11 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

б) виконуємо операції над матрицями:

$$1) A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 9 & -11 & -11 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$2) A \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 9 & -11 & -11 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9+18 & 2+11-6 & -12+11-24 \\ 8-63+36 & 8+77-12 & -48+77-48 \\ -3+36-12 & -3-44+4 & 18-44+16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & -25 \\ -19 & 73 & -19 \\ 21 & -43 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: а) } A^{-1} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 & -15 \\ 2 & -5 & -12 \\ 11 & -5 & -6 \end{pmatrix}; \text{ б) } A \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -25 \\ -19 & 73 & -19 \\ 21 & -43 & -10 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язання

Приведемо розширену матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$B = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -9 & 12 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 2 & -7 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -1 & -6 \\ 0 & 15 & 10 & 1 & 6 \\ 0 & 30 & 20 & 2 & 12 \end{array} \right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Отримали, що $r(A) = r(B) = 3$, тобто система сумісна, невизначена (нескінченна кількість розв'язків). Кількість констант $n - r = 4 - 3 = 1$.

Перепишемо отриману систему в алгебраїчній формі:

$$\begin{cases} -x_3 + 3x_2 + 2x_1 + x_4 = 1; \\ 15x_2 + 15x_1 + x_4 = 6; \quad \uparrow \\ -5x_1 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо невідомі:

- 1) $-5x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;
- 2) $x_2 = c_1 - \dots$;
- 3) $15x_2 + 15x_1 + x_4 = 6$;
 $x_4 = 6 - 15x_2 - 15x_1$;
 $x_4 = 6 - 15c_1$;
- 4) $-x_3 + 3x_2 + 2x_1 + x_4 = 1$;
 $x_3 = 3x_2 + 2x_1 + x_4 - 1$;
 $x_3 = -12c_1 + 5$.

$$\text{Отримали: } x_{\text{заг}} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ -12c_1 + 5 \\ 6 - 15c_1 \end{pmatrix}, \quad x_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Задані точки: $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(-1,0,1)$, $A_4(-4,6,-3)$.

Знайти:

- 1) $\angle A_2 A_3 A_4$;
- 2) площу $\Delta A_2 A_3 A_4$;
- 3) об'єм піраміди $A_1 A_2 A_3 A_4$;
- 4) рівняння прямої, що проходить через точки A_2 та A_3 ;
- 5) рівняння площини, що проходить через точки A_1 , A_2 , A_3 .

Розв'язання

- 1) $\angle A_2 A_3 A_4$;

$$\vec{A_3 A_2} = (3, 2, 0), \quad \vec{A_3 A_4} = (-3, 6, -4),$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A_3 A_2} \cdot \vec{A_3 A_4}}{|\vec{A_3 A_2}| \cdot |\vec{A_3 A_4}|} = \frac{-9 + 12}{\sqrt{9 + 4} \cdot \sqrt{9 + 36 + 16}} = \frac{3}{\sqrt{13 \cdot 61}} = \frac{3}{\sqrt{793}}.$$

- 2) площу $\Delta A_2 A_3 A_4$;

$$\vec{A_3 A_2} \times \vec{A_3 A_4} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -8i + 12j + 24k = (-8, 12, 24) = 4(-2, 3, 6),$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{A_3 A_2} \times \vec{A_3 A_4}| = \frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{4 + 9 + 36} = 2 \cdot 7 = 14.$$

- 3) об'єм піраміди $A_1 A_2 A_3 A_4$;

$$\vec{A_3 A_1} = (2, 3, 5),$$

$$\left(\vec{A_3 A_1}, \vec{A_3 A_2}, \vec{A_3 A_4} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-12) + 5 \cdot 24 = -16 + 36 + 120 = 140.$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \left(\vec{A_3 A_1}, \vec{A_3 A_2}, \vec{A_3 A_4} \right) = \frac{140}{6} = \frac{70}{3}.$$

- 4) рівняння прямої, що проходить через точки A_2 та A_3 ;

Для розв'язування використовуємо формулу:

$$A_2A_3: \frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-1}{1-1}, \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{0}.$$

5) рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 .

$$A_1A_2A_3: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 2-1 & 2-3 & 1-6 \\ -1-1 & 0-3 & 1-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(5-15) - (y-3)(-5-10) + (z-6)(-3-2) = -10(x-1) + 15(y-3) - 5(z-6) =$$

$$= -10x + 10 + 15y - 45 - 5z + 30 = -10x + 15y - 5z - 5 = 0,$$

$$A_1A_2A_3: 5(2x - 3y + z + 1) = 0,$$

$$A_1A_2A_3: 2x - 3y + z + 1 = 0.$$

Задача 5. Побудувати прямі $3x - 2y + 7 = 0$; $5x + y + 3 = 0$ на площині.
Знайти точку перетину.

Розв'язання

Знайдемо точку перетину прямих, для цього розв'яжемо систему рівнянь, яка складається із рівнянь вказаних прямих:

$$N = l_1 \cap l_2,$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 5x + y + 3 = 0 \end{cases} \cdot 2, \quad \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 10x + 2y + 6 = 0 \end{cases}, \Rightarrow 13x + 13 = 0 \Rightarrow x = -1,$$

$$y = -5x - 3 = 5 - 3 = 2 \Rightarrow y = 2.$$

Отже, $N(-1, 2)$.

Для побудови прямих, зведемо рівняння кожної з прямих до рівнянь в «відрізках», тобто до виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$1) l_1: 3x - 2y + 7 = 0,$$

$$3x - 2y = -7,$$

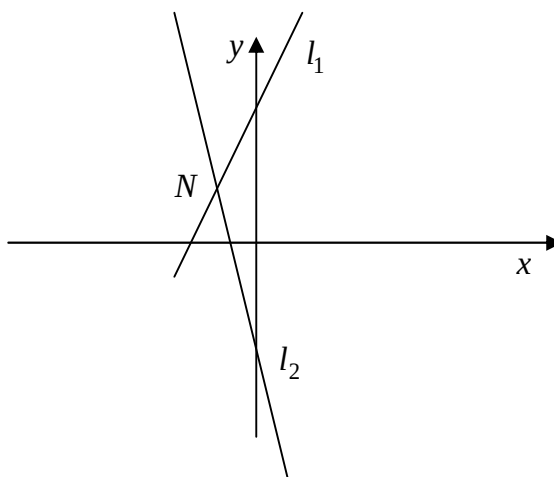
$$\frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1, \text{ отже, } a_1 = -\frac{7}{3}, \quad b_1 = \frac{7}{2}.$$

$$2) l_2: 5x + y + 3 = 0,$$

$$5x + y = -3,$$

$$\frac{x}{-\frac{3}{5}} + \frac{y}{-3} = 1, \text{ отже, } a_2 = -\frac{3}{5}, \quad b_2 = -3.$$

Будуємо прямі l_1 та l_2 :



Задача 6. Написати канонічні рівняння прямої $L: \begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0, \\ 2z + y - 4x + 1 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання

Знайдемо напрямний вектор прямої L : за умовою $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$, а $\vec{n}_2 = (2; 1; -4)$.

Тому

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 10\vec{j} - 3\vec{k} = (-11; 10; -3).$$

Знайдемо координати якої-небудь точки, що належить прямій: покладемо $z = 0$ і розв'яжемо отриману систему рівнянь.

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Таким чином, точка $M_0(-2; 3; 0)$ – одна з точок на прямій.

Запишемо канонічні рівняння прямої $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Підставляючи знайдені координати точки $M_0(-2; 3; 0)$ і координати напрямного вектора $\vec{s} = (-11; 10; -3)$ в останнє рівняння, одержуємо

$$\frac{x + 2}{-11} = \frac{y - 3}{10} = \frac{z}{-3}.$$

Задача 7. Обчислити границі, не використовуючи правило Лопітала:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x + 5}{\sqrt{x^6 + 1}}$, б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 3x}{1 - \sin 3x}$, в) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x - 2) - \ln(x + 3))$.

Розв'язання

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x + 5}{\sqrt{x^6 + 1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3})}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}} = \left| \frac{c}{\infty} \rightarrow 0, c \neq 0 \right| = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 3x}{1 - \sin 3x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin^2 3x}{1 - \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(1 - \sin 3x)(1 + \sin 3x)}{1 - \sin 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 + \sin 3x) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x-2) - \ln(x+3)) &= \{\infty \cdot (\infty - \infty)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x-2}{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{x-2-x-3}{x+3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{-5}{x+3}\right) = \left| t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \ln\left(1 + \frac{-5}{\frac{1}{t} + 3}\right) = \left| \ln(1+x) \sim x \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{(-5t)}{1+3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-5}{1+3t} = -5. \end{aligned}$$

Задача 8. Дослідити на неперервність задані функції, визначити точки розриву та встановити їх характер:

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}.$$

Розв'язання

В область допустимих значень функції не входять точки, в яких знаменник даної функції перетворюється в 0, тобто це точки, в яких

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Отримали, що в точці $x=1$ можливий розрив функції. Перевіримо це:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow \frac{1}{0} \rightarrow \infty;$$

Оскільки, границя функції зліва та справа в точці $x=1$ приймає значення ∞ , то точка $x=1$ - точка розриву другого роду.

Відповідь: функція $f(x)$ має розрив в точці $x=1$, це точка розриву другого роду.

Задача 9. Продиференціювати функції:

Функція	Знайти
а) $y = (\ln x)^x$,	$y' - ?$
б) $3^x + 3^y = \cos y$,	$y' - ?$
в) $\begin{cases} x = t - \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$,	$y''_{xx} - ?$

Розв'язання

а) $y = (\ln x)^x$,

Для розв'язування застосовуємо логарифмічне диференціювання, оскільки за умовою $y = (f(x))^{g(x)}$:

$$\ln y = \ln(\ln x)^x,$$

$$\ln y = x \ln(\ln x) \text{ (згідно із властивістю логарифма } \ln a^b = b \ln a),$$

а далі диференціюємо обидві частини виразу, пам'ятаючи, що $y = y(x)$:

$$(\ln y)' = (x \ln(\ln x))',$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln(\ln x) + \frac{x}{x \ln x},$$

$$y' = y \left(\ln(\ln x) + \frac{x}{x \ln x} \right),$$

Підставимо в y' значення функції y :

$$y' = (\ln x)^x \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right).$$

б) $3^x + 3^y = \cos y$,

В даній задачі функція задана неявним чином, тобто $F(x, y) = 0$.

Диференціюємо обидві частини виразу, пам'ятаючи, що $y = y(x)$:

$$3^x \ln 3 + 3^y \ln 3 \cdot y' = -\sin y \cdot y'.$$

Виражаємо з отриманого виразу y' :

$$3^y \ln 3 \cdot y' + \sin y \cdot y' = -3^x \ln 3,$$

$$y'(3^y \ln 3 + \sin y) = -3^x \ln 3,$$

$$y' = -\frac{3^x \ln 3}{3^y \ln 3 + \sin y}.$$

$$в) \begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$$

В даній задачі функція задана параметрично, тобто

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$$

Отже, для знаходження похідної від даної функції застосовуємо формули:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_{xx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Похідні функцій x і y по змінній t відповідно дорівнюють

$$x'_t = 2t + 2; \quad y'_t = \frac{1}{t+1}.$$

За формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ отримуємо, що:

$$y'_x = \frac{1}{2(t+1)^2}.$$

Знаходимо другу похідну функції:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{1}{2} \cdot (t+1)^{-2} \right)' = -(t+1)^{-3} = -\frac{1}{(t+1)^3}.$$

За формулою $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ знаходимо:

$$y''_{xx} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^3}}{2(t+1)} = \frac{-1}{2(t+1)^4}.$$

Задача10. Знайти границю, використовуючи правило Лопіталя: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}.$

Розв'язання

Зазначимо, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Тому $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \left\{ \infty^0 \right\} = A$.

Для даної функції

$$A = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x)} = e^B.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \stackrel{Л\ddot{o}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x \cdot x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отримали, що

$$A = e^B = e^0 = 1.$$

Задача 11. Обчислити невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{x+1}{7x^2+1} dx; \quad \text{б) } \int \frac{e^{\arctg x}}{x^2+1} dx.$$

Розв'язання

Для розв'язування застосовуємо метод внесення під знак диференціалу.

$$\text{а) } \int \frac{x+1}{7x^2+1} dx = \frac{1}{14} \int \frac{d(7x^2+1)}{7x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{d(\sqrt{7}x)}{(\sqrt{7}x)^2+1} = \frac{1}{14} \ln|7x^2+1| + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg(\sqrt{7}x) + C;$$

$$\text{б) } \int \frac{e^{\arctg x}}{x^2+1} dx = \int e^{\arctg x} d(\arctg x) = e^{\arctg x} + C.$$

Задача 12. Обчислити невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int \arccos \frac{x}{12} dx; \quad \text{б) } \int x \sin(x+7) dx.$$

Розв'язання

Для розв'язування застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{а) } \int \arccos \frac{x}{12} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arccos \frac{x}{12} & dv = dx \\ du = \frac{1}{12} \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{x}{12})^2}} & v = x \end{array} \right| = x \arccos \frac{x}{12} + \int \frac{\frac{1}{12} \cdot 12x}{\sqrt{144-x^2}} dx =$$

$$= x \arccos \frac{x}{12} - \frac{1}{2} \int \frac{d(144-x^2)}{\sqrt{144-x^2}} = x \arccos \frac{x}{12} - \sqrt{144-x^2} + C.$$

$$\text{б) } \int x \sin(x+7) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin(x+7) dx \\ du = dx & v = -\cos(x+7) \end{array} \right| = -x \cos(x+7) + \int \cos(x+7) dx =$$

$$= -x \cos(x+7) + \sin(x+7) + C.$$

Задача 13. Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx.$

Розв'язання

Запишемо знаменник дробу у вигляді

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2. \text{ Тепер } I = \int \frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} dx.$$

Напишемо розклад підінтегрального дробу на найпростіші дробу.

Множнику x у розкладі відповідає один доданок $\frac{A}{x}$.

Множнику $(x+2)^2$ у розкладі відповідають два доданки $\frac{B}{x+2}$ і

$$\frac{C}{(x+2)^2}. \text{ Отже, } \frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}. \quad (*)$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C у попередньому розкладі.

Позбавимося від знаменників (помножимо обидві частини рівності $(*)$ на $x(x+2)^2$).

$$3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + B \cdot x(x+2) + C \cdot x. \quad (**)$$

Знайдемо коефіцієнти A, B і C методом надавання окремих значень. Підставимо в ліву і праву частину тотожності $(**)$ значення коренів знаменника $x=0$ і $x=-2$. Оскільки коренів більше немає, а шуканих коефіцієнтів три, надамо змінній x ще будь-якого значення, наприклад, $x=1$.

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 8 = A \cdot 4, \quad \text{звідси } A=2; \\ x=-2 & 20 = C \cdot (-2), \quad \text{звідси } C=-10; \\ x=1 & 11 = 18 + 3B - 10, \text{ звідси } B=1. \end{array}$$

Коефіцієнти в розкладі $(*)$ обчислені. Отже,

$$\frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Обчислимо інтеграл від найпростіших дробів:

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right) dx = 2 \ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

Задача 14. Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5}.$

Розв'язання

Застосовуємо «універсальну» тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x + 5} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4-4t^2+6t+5+5t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = \\
&= -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C.
\end{aligned}$$

Задача 15. Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання

Оскільки найменше спільне кратне показників коренів дорівнює чотирьом, то застосуємо підстановку $x = t^4$.

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = \left| x = t^4 \quad dx = 4t^3 dt \right| = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^3(1+t)}{t^2(t^2+1)} dt = 4 \int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt.$$

Маємо інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділимо цілу частину в підінтегральному виразі (поділимо чисельник на знаменник).

$$I = 4 \int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1} \right) dt = 4 \int dt + 4 \int \frac{t-1}{t^2+1} dt$$

Перший інтеграл табличний, а другий інтеграл є найпростішим дробом III-го типу. Оскільки у його знаменнику вже виділено повний квадрат (t^2) , то:

$$I = 4t + 4 \int \frac{tdt}{t^2+1} - 4 \int \frac{dt}{t^2+1} = 4t + 2 \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 4 \operatorname{arctg} t = 4t + 2 \ln |t^2+1| - 4 \operatorname{arctg} t + C.$$

Повернемось до змінної x ($t = \sqrt[4]{x}$):

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = 4\sqrt[4]{x} + 2 \ln |\sqrt{x}+1| - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C.$$

3.2 Частина 2 (2-й семестр, денна форма)

Контрольна робота №1

Контрольна робота складається з 6 завдань. Вони відповідають теоретичному матеріалу змістовних модулів Частини 2 робочої програми. Термін проведення контрольної роботи – 2 години. Наведено типові задачі контрольної роботи.

Задача 1. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}.$$

Розв'язання

Застосуємо підстановку $x = 2 \sin t$.

Знайдемо $dx = 2 \cos t \, dt$ і підкореневий вираз

$$4 - x^2 = 4 - 4 \sin^2 t = 4 \cos^2 t.$$

Границі інтегрування знаходимо зазначивши, що $t = \arcsin \frac{x}{2}$, тому

$$t_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ при } x_1 = 1; \quad t_2 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ при } x_2 = \sqrt{3}.$$

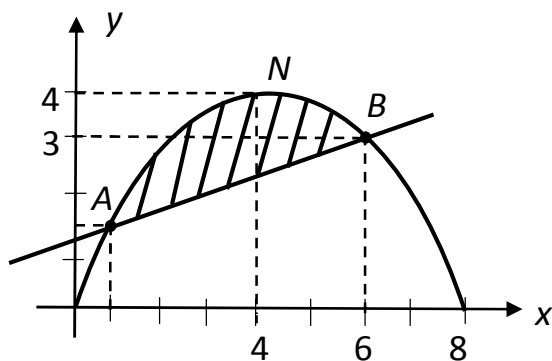
$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(8 \sin^3 t + 1) \cdot 2 \cos t \, dt}{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8 \sin^3 t + 1}{4 \sin^2 t} dt,$$

Поділимо почленно чисельник на знаменник.

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \, dt + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} = -2 \cos t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \right) - \\ & - \frac{1}{4} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \right) = -2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 1. \end{aligned}$$

Задача 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$4y = 8x - x^2 \text{ та } 4y = x + 6.$$

Розв'язання

Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь:

$$\begin{cases} 4y = 8x - x^2, \\ 4y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow 8x - x^2 = x + 6 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Точками перетину параболі і прямої є точки $A(1; \frac{7}{4})$ і $B(6;3)$. На рис. шукана площа заштрихована.

Область ANB зверху обмежена параболою, знизу прямою, тому:

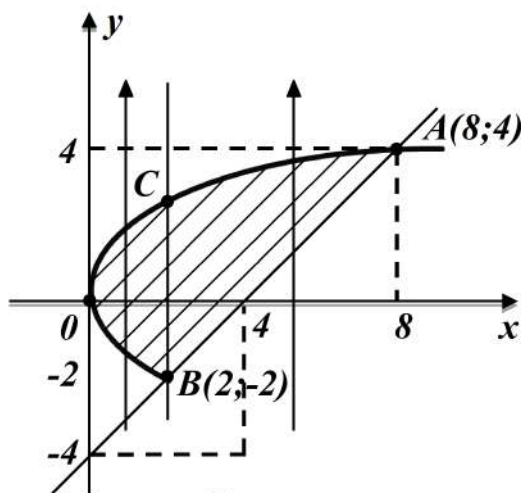
$$S = \int_1^6 (\frac{8x - x^2}{4} - \frac{x+6}{4}) dx = \frac{1}{4} \int_1^6 (7x - x^2 - 6) dx = \frac{1}{4} (\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x) \Big|_1^6 = \frac{125}{4} \text{ (кв. од.)}.$$

Задача 3. Представити подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ у вигляді повторного інтегралу із зовнішнім інтегруванням по x та зовнішнім інтегруванням по y

$$D: y = x - 4; y^2 = 2x$$

Розв'язання

Для побудови рисунка потрібно знати координати точок перетину прямої і параболі. Для цього потрібно розв'язати систему їхніх рівнянь.



$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x - 4, \\ y^2 = 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4, \\ (x - 4)^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4, \\ x^2 - 10x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -2, \\ x = 8, \\ y = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Область D є правильною в обох напрямках (будь-яка пряма паралельна координатним осям, перетинає область D лише в двох точках).

Обираємо напрям осі Ox . Отже, внутрішньою змінною буде x .

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx.$$

Границі зовнішнього інтеграла знаходимо як ординати найнижчої і найвищої точок області D : $c = -2$; $d = 4$. Границі внутрішнього інтеграла отримуємо, розв'язуючи рівняння лівої і правої межі відносно x . З рівняння параболі

$y^2 = 2x$ маємо $x = \frac{y^2}{2}$. Отже, нижньою границею внутрішнього інтеграла

буде функція $\psi_1(y) = \frac{y^2}{2}$.

З рівняння прямої $y = x - 4$ одержимо $x = y + 4$. Таким чином, функція $\psi_2(y) = y + 4$ являє собою верхню границю внутрішнього інтеграла. В результаті, заданий подвійний інтеграл звели до двократного

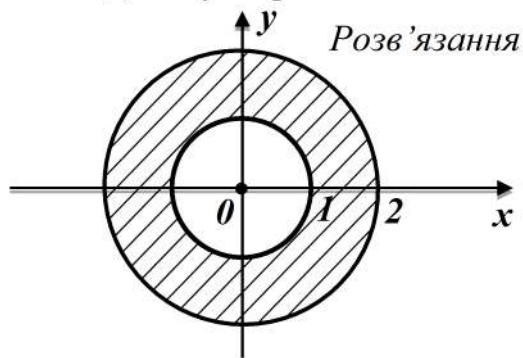
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} f(x, y) dx.$$

Якщо обрати інший порядок інтегрування (внутрішня змінна y), то необхідно, розбити область інтегрування прямою BC , паралельною осі Oy , на дві частини, оскільки нижня межа складається з двох ділянок, які мають різні рівняння: $y = -\sqrt{2x}$ (OB) і $y = x - 4$ (BA). Обчислення при цьому ускладнюються:

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_2^8 dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy.$$

Задача 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де D – кругове

кільце, яке утворене колами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4$.



Зробимо рисунок області інтегрування D .

Оскільки задана область обмежена двома колами, то доцільно перейти до полярних координат.

Отримаємо:

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ dx dy = \rho d\varphi d\rho \end{array} \right| = \iint_D \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho} = \iint_D d\varphi d\rho.$$

В полярних координатах рівняння $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4$ мають вигляд $\rho = 1$ і $\rho = 2$. Отже,

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \rho \Big|_1^2 = 2\pi.$$

Задача 5. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання

Знайдемо область визначення функції: областю визначення заданої функції є вся площина xOy .

Знайдемо стаціонарні точки функції:

знаходимо частинні похідні першого порядку функції z .

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y);$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x).$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (x^3 - 1) = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1, \\ y = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Знайшли дві точки $M_1(0;0)$ і $M_2(1;1)$. Обидві точки є стаціонарними, оскільки функція z визначена на всій площині xOy .

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 6x; \quad z''_{yy} = 6y; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -3.$$

$$\text{Складемо визначник } \Delta(x, y): \Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}.$$

Дослідимо стаціонарну точку $M_1(0;0)$:

$$\text{Оскільки } \Delta(M_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0, \text{ то в точці } M_1 \text{ екстремуму немає.}$$

Дослідимо стаціонарну точку $M_2(1;1)$:

Оскільки, $\Delta(M_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$, то в точці M_1 екстремуму існує.

Маємо, що точка M_2 є точкою мінімуму, бо $z''_{xx}(M_2) = 6 > 0$.

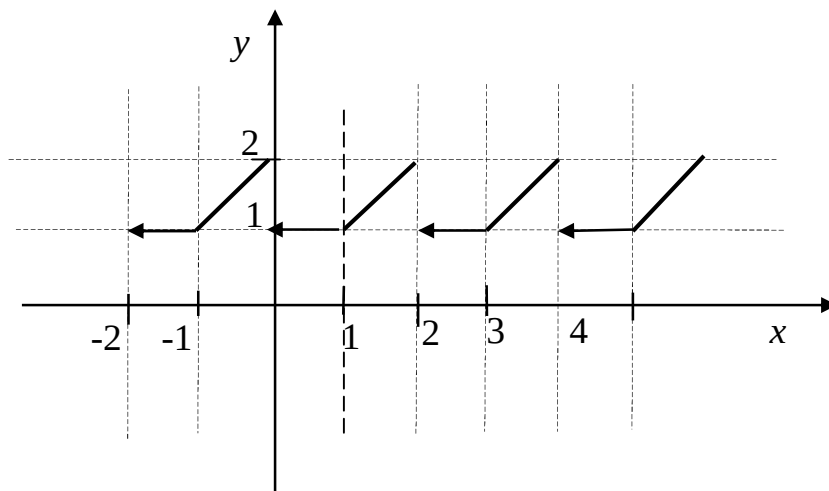
Обчислимо значення функції z в точці M_2 . В результаті маємо

$$z_{\min} = z(M_2) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Задача 6. Розкласти функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ в ряд Фур'є.

Розв'язання

Наведемо графік функції, одержаної періодичним продовженням заданої функції на всю числову вісь.



Задана функція задовольняє умови Діріхле і може бути розкладена в ряд Фур'є.

Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$ має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Застосовуватимемо вказані формули, в яких покладемо $l=1$. Інтервал інтегрування $(0;2)$ точкою $x=1$ розіб'ємо на дві частини, оскільки у кожній з них функція задана різними формулами.

$$a_0 = \int_0^1 dx + \int_1^2 x dx = x \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \cos \pi n x dx + \int_1^2 x \cdot \cos \pi n x dx = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos \pi n x dx \\ du = dx & v = \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \end{array} \right| + \\ &+ x \cdot \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_1^2 - \frac{1}{\pi n} \int_1^2 \sin \pi n x dx = 0 + 0 + \frac{\cos \pi n x}{\pi^2 n^2} \Big|_1^2 = \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n - \text{парне } (n \rightarrow 2n), \\ \frac{2}{\pi^2 n^2}, & n - \text{непарне } (n \rightarrow 2n-1). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 \sin \pi n x dx + \int_1^2 x \cdot \sin \pi n x dx = -\frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin \pi n x dx \\ du = dx & v = \frac{-\cos \pi n x}{\pi n} \end{array} \right| + \\ &- x \cdot \frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_1^2 + \frac{1}{\pi n} \int_1^2 \cos \pi n x dx = -\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} - \frac{2 - (-1)^n}{\pi n} + \frac{\sin \pi n x}{\pi^2 n^2} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{-(-1)^n + 1 - 2 + (-1)^n}{\pi n} = -\frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

Шуканий розклад даної функції має вигляд

$$f(x) = \frac{5}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n}.$$

Задача 7. Розв'язати диференціальні рівняння

$$(y^2 x + x) \cdot dy + (x^2 y + y) \cdot dx = 0.$$

Розв'язання

Винесемо спільний множник в обох дужках:

$$x \cdot (y^2 + 1) \cdot dy + y \cdot (x^2 + 1) \cdot dx = 0.$$

Тепер очевидно, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Поділимо обидві частини рівняння на $x \cdot y \neq 0$. Маємо:

$$\frac{y^2 + 1}{y} \cdot dy = -\frac{x^2 + 1}{x} \cdot dx,$$

$$\int \frac{y^2 + 1}{y} \cdot dy = -\int \frac{x^2 + 1}{x} \cdot dx,$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln|xy| + \ln e^{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \ln|C|,$$

$$|xy| \cdot e^{\frac{x^2 + y^2}{2}} = |C|.$$

Звідси знаходимо загальний інтеграл рівняння $xy \cdot e^{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \pm C$ або

$$xy \cdot e^{\frac{x^2 + y^2}{2}} = C_1 \quad (C_1 = \pm C).$$

Задача 8. Розв'язати диференціальні рівняння

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

Розв'язання

Рівняння є лінійним, оскільки містить y' і y тільки в першому степені.

Для розв'язування вводимо заміну:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x), \quad y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Тоді рівняння має вигляд

$$u'v + uv' - u \cdot v \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

$$u'v + u(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x) = \sin x.$$

$$\begin{cases} v' - v \operatorname{ctg} x = 0, & (1) \\ u'v = \sin x. & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(1): \quad \frac{dv}{dx} = v \cdot \operatorname{ctg} x \rightarrow dv = v \cdot \operatorname{ctg} x \cdot dx \rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x \cdot dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x \cdot dx \rightarrow \ln|v| = \ln|\sin x| \rightarrow v = \sin x.$$

Розв'яжемо друге рівняння системи. Підставимо $v = \sin x$ у друге рівняння системи. Знову отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними.

$$(2): du = dx \rightarrow \int du = \int dx \rightarrow u = x + C.$$

Знайдемо шукану функцію $y(x)$:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = (x + C) \cdot \sin x - \text{загальний розв'язок рівняння.}$$

Задача 9. Знайти зображення $F(p)$ за заданим оригіналом $f(t)$:

$$\text{а) } f(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau; \quad \text{б) } f(t) = \operatorname{sh} 3t \cdot \cos 2t.$$

Розв'язання

$$\text{а) } f(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau;$$

Ділення оригіналу на t відповідає інтегруванню зображення (властивість інтегрування зображення). Інтегрування оригіналу відповідає діленню зображення на p (властивість інтегрування оригіналу).

Відомо, що $\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}$. За формулою:

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(p) dp,$$

$$\text{маємо} \quad \frac{\sin t}{t} \div \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Далі, застосовуючи формулу $\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}$, отримуємо

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \div \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right).$$

$$\text{б) } f(t) = \operatorname{sh} 3t \cdot \cos 2t.$$

Скориставшись формулами Ейлера, можна записати заданий оригінал так:

$$f(t) = \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} \cdot \cos 2t = \frac{1}{2} e^{3t} \cdot \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-3t} \cdot \cos 2t.$$

Застосуємо властивість лінійності. Як початковий оригінал для обох доданків обираємо функцію $\cos 2t$. Множення оригіналу на $e^{\alpha t}$, $\alpha \in R$ відповідає зміненню аргументу зображення на α (властивість зміщення).

Врахуємо, що $\cos 2t \div \frac{p}{p^2 + 4}$. Далі застосовуємо формулу $e^{-\alpha t} f(t) \div F(p + \alpha)$

для обох доданків $f(t)$.

$$\frac{1}{2}e^{3t} \cdot \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-3t} \cdot \cos 2t \div \frac{1}{2} \left(\frac{p-3}{(p-3)^2 + 4} - \frac{p+3}{(p+3)^2 + 4} \right).$$

Задача 10. Знайти оригінал $f(t)$ за заданим зображенням:

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2 - 3p + 5}.$$

Розв'язання

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2 - 3p + 5},$$

Даний дріб є найпростішим раціональним дробом III типу. Виділимо у знаменнику дробу повний квадрат.

$$p^2 - 3p + 5 = \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5 = \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

У чисельнику замість (p) створимо вираз $\left(p - \frac{3}{2}\right)$ і виконаємо зведення подібних членів.

$$F(p) = \frac{\left(p - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + 3}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \frac{\left(p - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{2}}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}.$$

Представимо отриманий дріб у вигляді двох доданків.

$$F(p) = \frac{\left(p - \frac{3}{2}\right)}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2}.$$

Застосуємо таблицю зображень і властивість зміщення.

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + \left(\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2} + \frac{9}{2} \frac{1}{p^2 + \left(\sqrt{\frac{11}{4}}\right)^2} \div \cos\left(t\sqrt{\frac{11}{4}}\right) + \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{11}} \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{11}{4}}\right)$$

Отримали, що $f(t) = \cos\left(t\sqrt{\frac{11}{4}}\right) \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{9}{2}\sqrt{\frac{4}{11}} \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{11}{4}}\right) \cdot e^{\frac{3}{2}t}$.

Отже,

$$f(t) = e^{\frac{3}{2}t} \left(\cos\left(\frac{t\sqrt{11}}{2}\right) + \frac{9}{\sqrt{11}} \sin\left(\frac{t\sqrt{11}}{2}\right) \right).$$

Задача 11. Розв'язати задачу Коші а) операційним методом та б) методом підбору:

$$x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Розв'язання

а) Знайдемо зображення лівої і правої частин рівняння.

Нехай $x(t) \div X(p)$, тоді

$$x'(t) \div p \cdot X(p), \quad x''(t) \div p^2 \cdot X(p).$$

Зображення правої частини рівняння: $e^{-t} \div \frac{1}{p+1}$.

Запишемо операторне рівняння для $X(p)$ і розв'яжемо його.

$$p^2 \cdot X(p) + 2p \cdot X(p) - 3X(p) = \frac{1}{p+1},$$

$$X(p) \cdot (p^2 + 2p - 3) = \frac{1}{p+1},$$

$$X(p) = \frac{1}{(p+1) \cdot (p^2 + 2p - 3)}.$$

Оскільки $X(p) = \frac{1}{(p+1)(p+3)(p-1)}$ – правильний раціональний дріб, то:

розкладемо $X(p)$ на суму найпростіших дробів.

$$X(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p-1}. \text{ Знайдемо коефіцієнти } A, B \text{ і } C.$$

$$A = \frac{1}{(p+3)(p-1)} \Big|_{p=-1} = -\frac{1}{4}; \quad B = \frac{1}{(p+1)(p-1)} \Big|_{p=-3} = \frac{1}{8};$$

$$C = \frac{1}{(p+3)(p+1)} \Big|_{p=1} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Отже, } X(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{p+3} + \frac{1}{p-1} \right).$$

Знаходимо шуканий оригінал:

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{8}(e^{-3t} + e^t) = \frac{1}{8}(e^{-3t} + e^t - 2e^{-t}).$$

б) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$,

1) складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -3, t_2 = 1.$$

Отже, $y_0 = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t$.

2) знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння:

оскільки права частина даного рівняння має вид $e^{-t} = e^{\alpha t}$, то $\alpha = -1 \neq t_1 \neq t_2$.

Тоді маємо

$$y_u = Ae^{-t}, \quad y'_u = -Ae^{-t}, \quad y''_u = Ae^{-t}.$$

Підставляємо в дане диференціальне рівняння:

$$Ae^{-t} - 2Ae^{-t} - 3Ae^{-t} = e^{-t} \Rightarrow -4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_u = -\frac{1}{4}e^{-t}.$$

Тоді, $y = y_0 + y_u = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$.

3) знайдемо невідомі коефіцієнти C_1 та C_2 , використавши початкові умови $x(0) = x'(0) = 0$:

$$y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t - \frac{1}{4}e^{-t}, \quad y' = -3C_1 e^{-3t} + C_2 e^t + \frac{1}{4}e^{-t},$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0, \\ -3C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = 0, \\ 4C_1 - \frac{1}{2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1}{8}, \\ C_1 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Отже, маємо, що $x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{8}(e^{-3t} + e^t) = \frac{1}{8}(e^{-3t} + e^t - 2e^{-t})$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с. (517 (07) T29)
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с. (517 (07) B55).
3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с. (517 (07) B55).
4. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) B55).
5. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебн. пособие. в 3 ч. Ч.1. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 270 с. (517(07) C23).
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.2. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Высшейш. шк., 1991. – 351 с. (517(07) C23).
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Высшейш. шк., 1991. – 287 с. (517(07) C23).
8. Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Х.: Компанія СМІТ, 2012.- 316 с. або: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва О.А. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Тексти лекцій. Тести. Індивідуальні завдання.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 264 с. (512(07) K 49)
9. Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Курс лекцій з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. –Харків: ХНУРЕ, 2004. – 184 с.(517(07) H 54)

10. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. — 6-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 280 с.
11. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с.
12. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учеб. пос. — М.: Наука, 1985. — 392 с.
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2003. — 704 с.
14. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. Т.2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Учеб. пос. — М.: Дрофа, 2004. — 720 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1.-М.: Наука, 1975. — 548 с.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.-М.: Наука, 1976. — 576 с.
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т.1. 616 с., Т.2. 810 с., Т.3. 662 с.
18. Вища математика: Підручник: У 2 кн. — К.: Либідь, 2003. — Кн. 1. Основні розділи /Призва Г.Й. та ін. — 400 с.
19. Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч. 1. - К.: Техніка, 2003. — 600 с. (517(07) О 35)
20. Элементы вищої математики для підготовчих відділень: Навч. посібник/ Упоряд.: В.В. Семенець, В.О. Дорошенко. Г.В. Сова. - Харків, ХНУРЕ, 2010. — 400с.
21. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. Комп'ютерні тести. Індивідуальні завдання: Навч. посібник/ Упоряд.: Клімова Н.П., Нерух О.Г., Ремаєва. — Харків: ХТУРЕ, 2012. — 280 с. (517(07) К 49)

22. Клімова Н.П., Ремаєва О.О. Основні теоретичні відомості з курсу вищої математики. Тести.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 450 с.
(Климова Н.П., Ремаева О.А. Основные теоретические сведения по курсу высшей математики. Тесты.: Уч. пособие. – Харьков: ХНУРЭ, 2013. – 462 с.)
(517(07) К 49)
23. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. –648 с.
24. Основні теоретичні відомості та завдання до підсумкового контролю з курсу вищої математики/Упоряд.: Н.П. Клімова, О.О. Ремаєва. – Харків, 2008. – 84с. (517(07) О 75)
25. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. –300 с.
26. Араманович И.Г., Лунц Г.Е., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1968. – 416 с.
27. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 400 с.
28. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. –М.: Наука, 1988. – 480 с.
29. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Высшая школа, 1977. – 480 с.
30. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. –М.: Высшая школа, 1979. – 400 с.
31. Герасін С.М., Константінова Л.І., Лапта С.І., Конспект лекцій з теорії ймовірностей. –Харків: ХНУРЕ, 2007. – 100 с.
32. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Части I-V в 3-х книгах. – Харьков: ХГУ, К.1. 1967, 947 с., К.2. 1971, 130 с., К.3. 1974, 413 с.
33. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров. – М.: Наука, 1986. – 723 с.
34. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, Ч. I 304 с., Ч. II. 416 с.

35. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и др. математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.
36. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по курсу математического анализа. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
37. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Основні формули з вищої математики та алгоритми розв'язування задач (Стислий довідник), Харків, ХНУРЕ, 2012. – 149 с.
38. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Збірник теорем, формул та алгоритмів розв'язування задач з вищої математики, Харків, ХНУРЕ, 2013. – 148 с.
39. Ружицька Н.М., Нерух О.Г., Бутенко Н.С. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.1.: Навч. посіб. – Харків : ХНУРЕ, 2015. – 232 с. (517(07) P83)
40. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.2. Диференціальне і інтегральне числення функцій однієї змінної.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016.– 220 с. (517(07) M34)
41. Бутенко Н.С., Нерух О.Г., Ружицька Н.М., Стогній Н.П. Матеріали до самостійної роботи студентів з вищої математики Ч.3. Диференціальне і інтегральне числення функцій багатьох змінних.: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016. – 140 с. (517(07) M34)
42. Ремаєва О.О., Кравченко Л.К. Інтегрування функцій однієї змінної (конспект лекцій та завдання для самостійної роботи) для студентів усіх форм навчання. – Харків: ХТУРЕ, 2006. – 130 с. (517(07) K 65)
43. Сова Г.В. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». Розділ «Диференціальне числення функцій багатьох змінних». – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 126 с.
44. Сова Г.В., Дорошенко В.А. Лекції з дисципліни «Вища математика». Розділ «Інтегральне числення функцій багатьох змінних». – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 126 с.

45. Константинова Л.І., Сова Г.В., Колесников Д.О. Тексти лекцій з теорії рядів. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – 127 с. (В-3487 ВМ)
46. Дорошенко В.О., Зуєв М.Г., Титаренко О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тексти лекцій. – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 112 с. (517(07) 3 43)
47. Дорошенко В.О., Зуєв М.Г., Титаренко О.М. Вища математика для студентів-заочників. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 344 с. (ISBN 978-966-659-194-7)
48. Ічко Т.В., Бутенко Н.С., Кравченко Л.К., Чумак О.В. Завдання для самостійної роботи студентів з курсу вищої математики для 1-го семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2000. – 28 с.
49. Чумак О.В., Лапта С.І., Бутенко Н.С. Індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів з курсу вищої математики. Тема «Числові та функціональні ряди». - Харків: ХТУРЕ, 2002. – 76 с.
50. Дидактичні матеріали та індивідуальні завдання до теми «Диференційні рівняння». / Упоряд.: – Бутенко Н.С., Дорошенко В.О., Ремаєва О.О. - Харків, ХТУРЕ, 2000. – 52 с.
51. Чумак О.В., Лапта С.І. Завдання для рейтингових контрольних робіт з курсу вищої математики для другого семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2001. – 64 с.
52. Чумак О.В., Лапта С.І., Бутенко Н.С. Завдання для рейтингових контрольних робіт з курсу вищої математики для третього семестру. - Харків: ХТУРЕ, 2001. – 80 с.

Електронний документ

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Упорядник СТОГНІЙ Надія Петрівна

Відповідальний випусковий О.Г. Нерух

Авторська редакція

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ЗАПИТАННЯ

з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Електронний документ

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою вищої математики.
Протокол № 2 від 04.10.2017 р.

ХАРКІВ 2017

Екзаменаційні запитання з дисципліни «Вища математика» для студентів денної форми навчання освітніх програм «Телекомунікації», «Інформаційно-мережна інженерія», «Інфокомунікаційна інженерія» [Електронний документ] / Упоряд. Н.П. Стогній. – Харків: ХНУРЕ, 2017. – 17 с.

Упорядник Н.П. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ВМ

ЗМІСТ

Пояснювальна записка	4
ЧАСТИНА 1	
1.1 Якісні критерії оцінювання	5
1.2 Перелік теоретичних питань до іспиту	7
1.3 Перелік типових задач до іспиту	10
ЧАСТИНА 2	
2.1 Якісні критерії оцінювання	10
2.2 Перелік теоретичних питань до іспиту	12
2.3 Перелік типових задач до іспиту	15
ЛІТЕРАТУРА	16

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Рейтингова оцінка за семестр є накопичувальною – підсумовуються бали за кожний модуль, передбачений у семестрі.

Кожний модуль включає наступні **контрольні заходи**:

- виконання індивідуального домашнього завдання;
- поза аудиторна самостійна робота (вивчення додаткових тем за літературними джерелами тільки в тих модулях, які передбачені робочою програмою);
- аудиторна контрольна робота.

Кількість балів за кожний вид роботи визначається у кожному модулі окремо. Нижня границя за семестр становить 60 балів, а максимальна – 100. Дисципліна вважається вивченою студентом за умови отримання мінімального рейтингового балу в кожній контрольній точці.

Як форма підсумкового контролю для дисципліни ВМ використовується комбінований іспит. При цьому виді контролю підсумкова оцінка P_{π} обчислюється за формулою: $P_{\pi} = 0,6 \cdot O_{\text{сем}} + 0,4 \cdot O_{\text{ісп}}$, де $O_{\text{сем}}$ – оцінка за семестр у 100-бальній системі, $O_{\text{ісп}}$ – оцінка за іспит у 100-бальній системі.

Білет для іспиту складається з двох теоретичних запитань та трьох задач. Теоретичні запитання та кожна задача оцінюються в 20 балів (в сумі – 100 балів).

Комбінований іспит передбачає поєднання таких видів роботи як письмову відповідь на екзаменаційний білет і/або тест (комп'ютерний/бланковий) та усну відповідь екзаменатору.

ЧАСТИНА 1

1.1 Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань та умінь для одержання позитивної оцінки.

ЗНАТИ:

- матриці та їх властивості;
- визначник квадратної матриці та способи його обчислення;
- вектори на площині та в просторі, операції над ними;
- способи задання прямої на площині, в просторі;
- поверхні в просторі;
- визначення границі функції в точці, правила граничного переходу, першу та другу особливі границі;
- визначення похідної функції в точці, диференціала функції, таблицю похідних елементарних функцій, правила диференціювання;
- невизначений інтеграл, таблицю інтегралів та основні методи інтегрування.

ВМІТИ:

- виконувати дії з матрицями, знаходити матрицю, обернену даній, та ранг матриці;
 - розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь;
 - виконувати лінійні операції над векторами, які задані в координатній формі;
 - знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та використовувати їх для обчислювання кутів, проекцій, площ трикутників та паралелограмів;
 - обчислювати відстань між точками, від точки до площини та прямої, між площиною та прямою;
 - визначати тип кривої чи поверхні другого порядку;
 - володіти технікою знаходження границі функції;
 - диференціювати функції, розв'язувати задачі прикладного характеру;

- обчислювати невизначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами;
- інтегрувати найпростіші дроби, раціональні, ірраціональні та тригонометричні функції.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента протягом 1-го семестру

«Задовільно» (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Знати таблицю еквівалентних н.м. функцій, першу та другу особливі границі, таблицю похідних. Уміти виконувати дії з матрицями та знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, які задані в координатній формі, обчислювати границі функції за допомогою таблиці еквівалентних н.м. функцій, диференціювати функції. Знати таблицю невизначених інтегралів. Уміти обчислювати невизначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами. Інтегрувати раціональні дроби у випадку простих та дійсних коренів знаменника.

«Добре» (75-89). Твердо знати мінімум, захистити всі індивідуальні завдання, виконати всі контрольні роботи та поза аудиторну самостійну роботу. Уміти: знаходити матрицю, обернену даній, та ранг матриці; розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь; використовувати вектори для обчислювання кутів, проєкцій, площ трикутників та паралелограмів; обчислювати відстань між точками, від точки до площини та прямої, між площиною та прямою; володіти технікою знаходження границі функції; диференціювати функції; обчислювати невизначені інтеграли від різних класів функцій.

«Відмінно» (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента на іспиті

«Задовільно» (60-74). Показати необхідний мінімум теоретичних знань (означення, формулювання теорем, формули). Знати методи розв'язування практичних завдань та вміти застосовувати їх на практиці.

«Добре» (75-89). Твердо знати теоретичні питання, але доказ тільки в схематичному виді. Показати вміння розв'язувати практичні завдання та обґрунтовувати всі етапи запропонованого розв'язання.

«Відмінно» (90-100). Показати повні знання основного та додаткового теоретичного матеріалу. Безпомилково розв'язати практичні завдання, пояснити та обґрунтувати обраний метод розв'язання.

1.2 ПЕРЕЛІК ТЕОРЕТИЧНИХ ПИТАНЬ ДО ІСПИТУ

1. Визначники 2-го та 3-го порядків. Формули Крамера для розв'язування квадратних систем лінійних рівнянь. Властивості визначників. Мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника. Теорема про розкладання визначника за елементами рядка (стовпця). Теорема про суму добутків елементів рядка (стовпця) і алгебраїчних доповнень елементів іншого рядка (стовпця). Визначники вищих порядків.

2. Матриця: квадратна, вироджена, невироджена, діагональна, одинична, нульова. Лінійні дії з матрицями. Властивості додавання матриць та множення на число. Множення матриць. Властивості множення матриць. Обернена матриця. Властивості обернених матриць. Матричний метод розв'язування лінійних систем.

3. Ранг матриці. Базисний мінор. Елементарні перетворення матриці. Теорема про елементарні перетворення. Лінійна залежність та незалежність рядків (стовпців) матриці. Тривіальна та нетривіальна лінійні комбінації рядків (стовпців) матриці. Необхідна і достатня умова лінійної залежності рядків (стовпців) матриці (д). Теорема про базисний мінор.

4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: сумісні, несумісні, визначені, невизначені. Теорема Кронекера-Капеллі про необхідну і достатню умову сумісності системи. Метод Гаусса. Системи однорідних рівнянь.

5. Вектори: рівні, колінеарні, протилежні, компланарні. Лінійні операції над векторами. Властивості лінійних операцій. Базис на прямій, площині та у

просторі. Теорема про розкладання вектора за базисом. Орт вектора. Ортонормований базис у просторі. Координати вектора.

6. Добутки векторів. Скалярний добуток. Властивості скалярного добутку. Проекція вектора на вектор. Напрямні косинуси. Векторний добуток. Властивості векторного добутку. Знаходження векторного добутку через координати векторів. Знаходження площі паралелограма та площі трикутника, побудованих на двох векторах. Змішаний добуток векторів. Властивості змішаного добутку. Знаходження змішаного добутку через координати векторів. Об'єм паралелепіпеда.

7. Площина у просторі. Загальне рівняння, відстань від точки до площини. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Кут між двома площинами. Умова паралельності та перпендикулярності площин. Рівняння площини у відрізках.

8. Пряма у просторі. Канонічні рівняння, параметричні рівняння. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Перехід від загального рівняння до канонічних. Кут між двома прямими. Знаходження точки перетину прямої і площини. Відстань від точки до прямої.

9. Пряма на площині. Загальне рівняння. Рівняння у відрізках. Канонічне рівняння. Параметричні рівняння. Відстань від точки до прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими.

10. Криві другого порядку. Еліпс. Гіпербола. Парабола. Ексцентриситет та директриси еліпса, гіперболи, параболи. Оптичні властивості кривих другого порядку.

11. Окіл точки. Проколений окіл точки. Обмежена множина. Послідовність. Границя послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Єдиність границі (д.). Обмеженість збіжної послідовності (д.). Число e .

12. Означення границі функції. Односторонні границі. Теорема про зв'язок границі з односторонніми границями.

13. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Теорема про добуток нескінченно малої функції та обмеженої (д.). Теорема про те, що $1/0 \rightarrow \infty$, а $1/\infty \rightarrow 0$ (д.). Функція як сума границі та нескінченно малої функції (д.).

14. Властивості границь: границя сталої функції, суми, добутку, частки. Теорема про функцію, обмежену двома іншими функціями. Границя складної функції. Перша важлива границя. Друга важлива границя. Еквівалентні нескінченно малі функції. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

(д). Теорема про заміну функцій еквівалентними (д). Порівняння нескінченно малих функцій. Необхідна і достатня умова еквівалентності нескінченно малих функцій (д).

15. Неперервність функцій. Необхідна і достатня умова неперервності (д). Типи точок розриву. Неперервність суми, добутку, частки. Неперервність складної функції. Неперервність функції на відрізку. Властивості функцій, неперервних на відрізку. Неперервність елементарних функцій.

16. Похідна функції. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі. Неперервність диференційованої функції (д). Похідна сталої функції, суми, добутку, частки. Похідна складеної функції. Похідна оберненої функції. Таблиця похідних.

17. Логарифмічне диференціювання. Похідна неявної функції. Похідна від функції, що задана параметрично.

18. Диференціал функції. Геометричний зміст диференціала. Інваріантність диференціала відносно заміни змінної (д).

19. Похідні та диференціали вищих порядків.

20. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа (про скінченні прирости). Теорема Коші (про скінченні прирости узагальнена).

21. Правило Лопітала (д). Формула Тейлора для многочлена (д). Формула Тейлора для довільної функції. Залишковий член в формі Пеано. Формула Маклорена для деяких елементарних функцій (д).

22. Монотонність функції. Необхідна та достатня умова монотонності (д). Екстремуми функції. Необхідна умова екстремуму. Достатня умова екстремуму (д). Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної (д). Опуклість. Точки перегину. Достатня умова напряду опуклості (д). Достатня умова точки перегину (д). Похилі та вертикальні асимптоти. Необхідна та достатня умова існування похилої асимптоти (д). Схема повного дослідження функції.

23. Алгебра многочленів. Теорема про розкладання многочлена на лінійні множники. Теорема про комплексні корені многочлена з дійсними коефіцієнтами. Раціональні дроби. Найпростіші дроби. Теорема про розкладання правильного раціонального дроби на найпростіші.

24. Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Основні методи інтегрування: заміна змінної (д) та інтегрування частинами (д).

25. Інтегрування основних класів елементарних функцій: інтегрування раціональних дробів, тригонометричних функцій та деяких ірраціональних функцій.

1.3 ПЕРЕЛІК ТИПОВИХ ЗАДАЧ ДО ІСПИТУ

[1] ІДЗ № 1 (задачі 1, 7, 8 (№7 – без рисунка)), ІДЗ №2 (задачі 1-5), ІДЗ №4 (задачі 3-5), ІДЗ№5 (задачі 1, 3).

[2] ІДЗ № 1 (задача 1 (а-е, ж, з)).

ЧАСТИНА 2

2.1 Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань та умінь для одержання позитивної оцінки.

ЗНАТИ:

- комплексні числа і дії над ними;
- визначений інтеграл та методи його обчислення;
- невласні інтеграли першого та другого родів;
- подвійний і потрійний інтеграли, їх властивості;
- означення функції багатьох змінних, її часткові похідні та диференціали;
- часткові похідні складеної функції багатьох змінних;
- локальні та умовні екстремуми функції двох змінних;
- визначення збіжності числових рядів за допомогою достатніх ознак;
- функціональні ряди, область збіжності;
- степеневі ряди, інтервал та радіус збіжності;
- розкладання функцій в ряд Фур'є;
- розв'язання диференціальних рівнянь першого та вищих порядків;
- основні властивості операційного числення.

ВМІТИ:

- виконувати дії над комплексними числами;
- обчислювати визначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами;

- проводити обчислення площі плоскої фігури, довжину плоскої лінії, об'єм тіла;
- розв'язувати задачі фізики за допомогою інтегралів;
- обчислювати подвійні інтеграли в декартовій системі координат;
- знаходити часткові похідні та диференціали функції багатьох змінних;
- застосовувати часткові похідні для знаходження рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні;
- розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою часткових похідних;
- розкладати періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є;
- розв'язувати диференціальні рівняння методом підбору та операційним методом.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента протягом 2-го семестру

«Задовільно» (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі індивідуальні завдання. Уміти знаходити модуль і аргумент комплексного числа. Уміти обчислювати визначені інтеграли, використовуючи різні методи інтегрування: безпосереднє, за допомогою підстановок та частинами. Проводити обчислення подвійних інтегралів у прямокутній системі координат. Знаходити часткові похідні функції багатьох змінних. Знати за якими формулами визначаються коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π . Вміти визначати коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π , яка задана графічно та складається з двох постійних частин. Вміти розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, коли права частина має спеціальний вигляд, методом невизначених коефіцієнтів та операційним методом (випадок, коли корені характеристичного рівняння дійсні та різні, а права частина така: $Qe^{\alpha t}$, де α не є коренем характеристичного рівняння).

«Добре» (75-89). Твердо знати мінімум, захистити всі індивідуальні завдання, виконати всі контрольні роботи та поза аудиторну самостійну роботу. Уміти: обчислювати визначені інтеграли від різних класів функцій; застосовувати інтегральне числення при розв'язанні задач геометрії; виконувати заміну змінних при обчисленні подвійних інтегралів; розв'язувати задачі прикладного характеру за допомогою часткових похідних; визначати область збіжності степеневих рядів; розкладати періодичні та неперіодичні функції в ряд та інтеграл Фур'є в дійсній формі; використовувати властивості операційного числення для знаходження оригіналів, зображень та розв'язувати диференціальні рівняння операційним методом.

«Відмінно» (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента на іспиті

«Задовільно» (60-74). Показати необхідний мінімум теоретичних знань (означення, формулювання теорем, формули). Знати методи розв'язування практичних завдань та вміти застосовувати їх на практиці.

«Добре» (75-89). Твердо знати теоретичні питання, але доказ тільки в схематичному виді. Показати вміння розв'язувати практичні завдання та обґрунтовувати всі етапи запропонованого розв'язання.

«Відмінно» (90-100). Показати повні знання основного та додаткового теоретичного матеріалу. Безпомилково розв'язати практичні завдання, пояснити та обґрунтувати обраний метод розв'язання.

2.2 ПЕРЕЛІК ТЕОРЕТИЧНИХ ПИТАНЬ ДО ІСПИТУ

1. Означення функції двох змінних, графік, область визначення. Функція n -змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних.

2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних. Частинні похідні. Геометричний зміст частинних похідних. Частинні похідні вищих порядків. Повний та частинні диференціали. Диференціали вищого порядку. Похідна складеної функції. Диференціювання неявної функції.

3. Дотична площина та нормаль до поверхні. Лінії та поверхні рівня. Похідна за напрямом. Градієнт. Теорема про зв'язок градієнта і похідної за напрямом. Властивості градієнта.

4. Локальні екстремуми функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму. Стаціонарні та критичні точки. Достатні умови екстремуму.

5. Комплексні числа. Дії над комплексними числами, що задані в алгебраїчній формі. Модуль та аргумент. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами, що задані в тригонометричній та показниковій формах. Формула Муавра. Знаходження кореня n степеня з комплексного числа (д).

6. Визначений інтеграл. Означення, геометричний зміст, теорема про достатню умову інтегрованості функції.

7. Властивості визначеного інтеграла: лінійність, адитивність, інтегрування нерівності, властивість модуля визначеного інтеграла, оцінка інтеграла, теорема про середнє значення функції.

8. Інтеграл зі змінною верхньою межею, теорема про похідну визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею.

9. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами.

10. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоских фігур: величина площі в декартових координатах; обчислення площі, якщо крива задана параметричними рівняннями, обчислення площі сектора, якщо крива задана в полярних координатах.

11. Обчислення довжини дуги плоскої кривої: довжина дуги в декартових координатах (д), довжина дуги у випадку параметричного рівняння; довжина дуги кривої в полярних координатах.

12. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду): означення, збіжність інтеграла $\int_1^{\infty} dx/x^{\alpha}$, ознаки збіжності, абсолютна та умовна збіжність.

13. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду): означення, збіжність інтеграла $\int_0^1 dx/x^\alpha$, ознаки збіжності, абсолютна та умовна збіжність.

14. Означення подвійного інтеграла, геометричний зміст. Теорема про існування подвійного інтеграла. Властивості подвійного інтеграла: лінійність, адитивність, інтегрування нерівності, оцінка подвійного інтеграла, теорема про середнє.

15. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій прямокутній системі координат, теорема про перехід від подвійного інтеграла до повторного.

16. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

17. Числові ряди. Основні поняття. Основні теореми про збіжність числових рядів.

18. Ознаки порівняння числових рядів з додатними членами. Ознака Даламбера. Радикальна й інтегральна ознаки Коші.

19. Знакозмінні й знакопозначені ряди. Основні поняття. Ознака Лейбніца. Умовна й абсолютна збіжність.

20. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Визначення. Теорема Абеля. Визначення радіуса збіжності степеневих рядів по Даламберу й Коші.

21. Ряди Тейлора й Маклорена. Розкладання основних елементарних функцій у ряд Тейлора.

22. Тригонометрична система функцій і її ортогональність. Ряд і коефіцієнти Фур'є. Умова Діріхле.

23. Розкладання в ряд Фур'є періодичних функцій з періодами 2π , $2l$. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій. Розкладання в ряд Фур'є неперіодичних функцій.

24. Ряд Фур'є в комплексній формі.

25. Інтеграл Фур'є. Інтеграл Фур'є для парних та непарних функцій. Синус та косинус перетворення Фур'є. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є.

26. Диференціальне рівняння, його порядок та розв'язок. Диференціальне рівняння першого порядку. Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння. Початкові умови. Загальний розв'язок, частинний розв'язок.

27. Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

28. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

29. Диференціальні рівняння вищих порядків. Теорема про існування і єдиність розв'язку. Початкові умови. Загальний розв'язок, частинний розв'язок.

30. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод побудови фундаментальної системи розв'язків.

31. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду.

32. Функція оригінал. Перетворення Лапласа.

33. Властивості перетворення Лапласа: лінійність, теорема подібності, теорема запізнювання, теорема зміщення, диференціювання оригіналу, диференціювання зображення, інтегрування оригіналу, інтегрування зображення, теорема множення (теорема про згортку).

34. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами операторним методом.

2.3 ПЕРЕЛІК ТИПОВИХ ЗАДАЧ ДО ІСПИТУ

[2] ІДЗ №2 (задачі 1, 2, 4).

[3] ІДЗ № 1 (задачі 1(а, в, г), 4, 5).

[4] ІДЗ № 5.1 (задачі 3, 4), ІДЗ №5.3 (задачі 1-3).

[5] ІДЗ № 12.1 (задачі 2-8), ІДЗ №12.2 (задачі 1, 3), ІДЗ №12.3 (задача 1), ІДЗ №13.1 (задачі 1-4).

Література

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Т.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. –Харків: ХНУРЕ, 2002. - 552 с.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серета О.Г. Вища математика у прикладах та задачах. Т.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. –Харків: ХНУРЕ, 2002. - 440 с.
3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Серета О.Г., Головка Н.О. Вища математика у прикладах та задачах. Т.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. - Харків: ХНУРЕ, 2002. - 596 с.
4. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. – К.: Кондор, 2006. – 556 с. (517 (07) В55).
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 частях. Ч.3. Под ред. А.П. Рябушко, - Мн.: Высшейш. шк., 1991. – 287 с. (517(07) С23).

Електронний документ

ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ЗАПИТАННЯ

з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для студентів денної форми навчання
освітніх програм «Телекомунікації»,
«Інформаційно-мережна інженерія»,
«Інфокомунікаційна інженерія»

Упорядник СТОГНІЙ Надія Петрівна

Відповідальний випусковий О.Г. Нерух

Авторська редакція