Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кафедра фізики

КОМПЛЕКС НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

навчальної дисципліни

фізика

(назва дисципліни)

підготовки бакалаврів

(назва освітнього рівня)

спеціальність 172 Телекомунікації та радіотехніка

освітньо-професійна програма Інфокомунікаційна інженерія
Інформаційно- мережна інженерія

(назва освітньої програми)

Розробники: Коваленко О.М., зав. каф. фізики, доцент, к. фіз.-мат. н.
Приймачов Ю.Д., асистент каф. фізики

Схвалено на засіданні кафедри фізики

Протокол від "28" жовтня 2021 р. № 4

Харків 2021

ЗМІСТ

1. Робоча програма ……..... 3
2. Анотації навчальних посібників……..... 15
3. Методичні вказівки до практичних занять (частина 1)…….... 23
4. Методичні вказівки до практичних занять (частина 2)…….... 172
5. Методичні вказівки до лабораторних занять з фізики, частина 2 (електрика та магнетизм)..……...……..... 312
6. Методичні вказівки до лабораторних занять з фізики частина 3 (оптика, атомна фізика, фізика твердого тіла)……..... 424
7. Методичні вказівки до комп'ютерних лабораторних робіт……... 476
8. Контрольні завдання (1 семестр)…….. 609
9. Контрольні завдання (2 семестр)…….. 626

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____Інфокомунікацій_____
(повна назва)
Кафедра_____Фізики_____
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Декан факультету ІК

_____ А.В.Снігуров
(підпис, ініціали, прізвище)
“_____”_____20__ р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

_____Фізика_____
(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти_____бакалаврський_____

спеціальність _____172 Телекомунікації та радіотехніка_____
(код і повна назва спеціальності)
освітньо-професійна програма___Інформаційно- мережна інженерія _____
_____Інфокомунікаційна інженерія_____
(повна назва програми)

Харків – 2021 рік

Розробник(и): О.М.Коваленко, завідувач кафедри фізики, доцент,_____
кандидат фіз.-мат. наук_____
(ініціали, прізвище, посада, науковий ступінь, вчене звання)

Робочу програму схвалено на засіданні кафедри _____фізики_____

Протокол від “_30_”___серпня___ 2021 р. № _1_

Завідувач кафедри ___фізики___ _____ О.М. Коваленко
(підпис) (ініціали , прізвище)

Керівник проектної групи /гарант освітньої програми _____ _____
(підпис) (ініціали, прізвище)

Схвалено методичною комісією факультету ІК

Протокол від “____”_____20__ року № ___

Голова методичної комісії _____ _____
(підпис) (ініціали , прізвище)

1 ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td colspan="2">денна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Кількість кредитів ЄКТС 6</td><td colspan="2">Обов’язкова</td></tr>
<tr><td>Модулів 2</td><td colspan="2">Рік підготовки</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів 4</td><td colspan="2">1-й</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Загальна кількість годин 180

Мова навчання українська</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>1-й</td><td>2-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кількість годин</td></tr>
<tr><td>90</td><td>90</td></tr>
<tr><td colspan="2">Навчальні заняття:
1) лекції, год.</td></tr>
<tr><td>20</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) практичні, год.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) лабораторні, год.</td></tr>
<tr><td>12</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">4) консультації, год.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота, год.</td></tr>
<tr><td>42</td><td>48</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:</td></tr>
<tr><td>Залік</td><td>Іспит комбінований</td></tr>
</table>

2 МЕТА ДИСЦИПЛІНИ ТА ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ З ЇЇ ВИВЧЕННЯ

2.1 Мета вивчення дисципліни:

Дисципліна входить до обов'язкових компонент циклу загальної та спеціальної (фахової) підготовки освітньо-професійних програм Інформаційно-мережна інженерія та Інфокомунікаційна інженерія. Метою дисципліни є формування створення у студентів основ широкої теоретичної підготовки в галузі фізики, які дозволять майбутнім інженерам орієнтуватися у потоці наукової і технічної інформації, забезпечуючи їм можливість застосування нових фізичних принципів у галузях техніки за їх майбутнім фахом; формування у студентів наукового мислення, вірного розуміння межі застосування різних фізичних законів, здатності до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; здатності планувати та управляти часом; здатності вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

2.2 Результати навчання:

За результатом вивчання дисципліни студенти повинні:

знати: теорії і методи фундаментальних та загальноінженерних наук в об'ємі необхідному для розв'язання спеціалізованих задач та практичних проблем у галузі професійної діяльності.

вміти: аналізувати взаємозв'язок фізичних явищ різної природи; застосовувати фізичні знання для розв'язання практичних задач, що виникають під час розробки та експлуатації телекомунікаційних систем, інфокомунікаційних, телекомунікаційних мереж, радіотехнічних систем та систем телевізійного й радіомовлення тощо; аналізувати вплив фізичних явищ на режими роботи сучасної техніки; планувати та проводити найпростіші фізичні експерименти із застосуванням сучасного обладнання та обробляти результати цих експериментів; виділяти конкретний фізичний зміст у прикладних задачах майбутньої спеціальності

володіти: готовністю до вивчення науково-технічної інформації, вітчизняного і закордонного досвіду з тематики інвестиційного (або іншого проекту засобів телекомунікацій та радіотехніки ; здатністю проводити розрахунки у процесі проектування споруд і засобів інформаційно-телекомунікаційних мереж, телекомунікаційних та радіотехнічних систем, відповідно до технічного завдання з використанням як стандартних, так і самостійно створених методів, прийомів і програмних засобів автоматизації проектування.

2.3 Передумови для вивчення дисципліни:

знання основних розділів вищої математики, зокрема лінійної та векторної алгебри, диференціального та інтегрального числення.

3 ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1

Змістовий модуль 1. Електростатика та постійний струм.
Тема 1. Електричне поле в вакуумі.
Тема 2. Електричне поле в діелектриках.
Тема 3. Провідники в електричному полі.
Тема 4. Електричний струм.

Змістовний модуль 2. Магнетизм.
Тема 5. Магнітне поле в вакуумі.
Тема 6. Магнітне поле в речовині.
Тема 7. Явище електромагнітної індукції.
Тема 8. Електромагнітне поле.

Модуль 2

Змістовий модуль 3. Електромагнітні коливання та хвилі. Оптика.

Тема 9. Електромагнітні коливання та змінний струм
Тема 10. Електромагнітні хвилі
Тема 11. Хвильова оптика.
Тема 12. Квантова оптика.

Змістовий модуль 3. Елементи квантової механіки
Тема 13. Квантова механіка.
Тема 14. Квантова теорія будови атомів та молекул.
Тема 15. Спонтанне та вимушене випромінювання.

3 СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	усього	у тому числі				
		л	п	лб.	конс.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1						
Змістовий модуль 1. Електростатика та постійний струм.						
Тема 1. Електричне поле в вакуумі.	16	4	2	2	2	6
Тема 2. Електричне поле в діелектриках.	9	2	1	2		4
Тема 3. Провідники в електричному полі.	5	2	1			2
Тема 4. Електричний струм.	13	2	2	2	2	5
Разом за змістовним модулем 1	**43**	**10**	**6**	**6**	**4**	**17**
Змістовий модуль 2. Магнетизм.						
Тема 5. Магнітне поле в вакуумі.	16	4	2	2	2	6
Тема 6. Магнітне поле в речовині.	7	2		2		3
Тема 7. Явище електромагнітної індукції.	9	2	1	2		4
Тема 8. Електромагнітне поле.	5	2	1			2
Разом за змістовим модулем 2	**37**	**10**	**4**	**6**	**2**	**15**
Тестування	**10**					**10**
Разом годин за 1 модуль	**90**	**20**	**10**	**12**	**6**	**42**
Модуль 2						
Змістовний модуль 3. Електромагнітні коливання та хвилі. Оптика.						
Тема 9. Електромагнітні коливання та змінний струм	12	4	2			6
Тема 10. Електромагнітні хвилі	4	2				2
Тема 11. Хвильова оптика.	18	4	2	2	2	8
Тема 12. Квантова оптика.	12	2	2	2		6
Разом за змістовим модулем 3	**46**	**12**	**6**	**4**	**2**	**22**
Змістовний модуль 4. Елементи квантової механіки.						
Тема 13. Квантова механіка.	12	4	2			6
Тема 14. Квантова теорія будови атомів та молекул.	10	2		2	2	4
Тема 15. Спонтанне та вимушене випромінювання.	10	2		2	2	4
Разом за змістовим модулем 4	**32**	**8**	**2**	**4**	**4**	**14**
Тестування	**12**					**12**
Разом годин за 2 модуль	**90**	**20**	**8**	**8**	**6**	**48**
Усього годин	**180**	**40**	**18**	**20**	**12**	**90**

5 ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Модуль 1	
1	Електричне поле у вакуумі.	2
2	Електричне поле в діелектриках та провідниках.	2
3	Постійний електричний струм.	2
4	Магнітне поле постійного струму. Принцип суперпозиції.	2
5	Явище електромагнітної індукції. Індуктивність. Електромагнітні коливання.	2
	Загальна кількість, год.	**10**
	Модуль 2	
1	Хвильова оптика	2
2	Рівноважне теплове випромінювання	2
3	Квантові властивості випромінювання	2
4	Хвилі де Бройля. Співвідношення невизначеності. Рівняння Шредінгера	2
	Загальна кількість, год.	**8**

6 ТЕМИ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Модуль 1	
1	Дослідження електричного поля.	2
2	Визначення електричних властивостей сегнетоелектриків.	2
3	Вимірювання опорів методом мостової схеми.	2
4	Вивчення магнітного поля короткого соленоїда та системи двох соленоїдів.	2
5	Дослідження явища самоіндукції.	2
6	Дослідження повного послідовного кола змінного струму.	2
	Загальна кількість, год.	**12**
	Модуль 2	
1	Дослідження дифракції світла в досліді Фраунгофера.	2
2	Визначення параметрів дифракційної решітки за допомогою інтерференційної картини в досліді Юнга.	2
3	Дослідження зовнішнього фотоефекту на вакуумному фотоелементі.	2
64	Дослідження температурної залежності електропровідності твердих тіл	2
	Загальна кількість, год.	**8**

7 САМОСТІЙНА РОБОТА

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Модуль 1		
1	Вивчення теоретичного матеріалу з використанням конспекту та навчальної літератури	10
2	Підготовка до лабораторних занять	12
3	Підготовка до практичних занять	10
4	Підготовка до тестування	10
	Загальна кількість, год.	**42**
Модуль 2		
1	Вивчення теоретичного матеріалу з використанням конспекту та навчальної літератури	20
2	Підготовка до лабораторних занять	8
3	Підготовка до практичних занять	8
4	Підготовка до тестування	12
	Загальна кількість, год.	**48**

8 МЕТОДИ НАВЧАННЯ ТА ЗАСОБИ ОЦІНЮВАННЯ

Вивчення дисципліни «фізика» здійснюється зі застосуванням різних методів:

Словесні методи навчання містять лекції, які розкриють сутність наукових понять, явищ та процесів, логічно пов'язаних загальною темою; пояснення, за допомогою яких розкривається сутність закону або процесу з використанням попереднього досвіду студентів; розповіді з метою спонукання студентів до створення в уяві певного образу; евристичних та репродуктивних бесід, які передбачають приведення попередніх знань до усвідомлення нових явищ та понять.

Наочні методи навчання, які передбачають демонстрацію (показ предметів і процесів у динаміці), ілюстрацію (схеми, графіки) та спостереження (сприймання процесів без втручання у ці процеси).

Практичні методи навчання сприяють формуванню вмінь і навичок, логічному завершенню ланки пізнавального процесу стосовно конкретної теми або розділу. Вони містять: лабораторні роботи для набуття нових знань або перевірки наукових гіпотез на рівні досліджень; практичні заняття, спрямовані на використання набутих знань у розв'язанні практичних завдань; також виконання письмових або графічних вправ з метою цілеспрямованого повторення студентами окремих дій задля формування умінь та навичок.

Оцінювання знань студентів з дисципліни здійснюється на основі результатів поточного контролю, підсумкового тесту та комбінованого іспиту.

9 МЕТОДИ КОНТРОЛЮ ТА РЕЙТИНГОВА ОЦІНКА ЗА ДИСЦИПЛІНОЮ

9.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Для оцінювання роботи студента протягом семестру підсумкова рейтингова оцінка $O_{сем}$ розраховується як сума оцінок за різні види занять та контрольні заходи. Розподіл балів по різним видам занять / контрольним заходам наведено у таблицях.

Модуль 1

Вид заняття / контрольний захід	Оцінка $O_{сем}$
Лб №1	2 . . . 4
Лб №2	2 . . . 4
Лб №3	5 . . . 10
Пз №1	4 . . . 7
Пз №2	4 . . . 7
Пз №3	4 . . . 7
Тест	11 . . . 14
Контрольна точка 1	**32 . . . 53**
Лб №4	2 . . . 4
Лб №5	2 . . . 4
Лб №6	5 . . . 10
Пз №4	4 . . . 7
Пз №5	4 . . . 7
Тест	11 . . . 15
Контрольна точка 2	**28 . . . 47**
Всього за семестр	**60 . . . 100**

Модуль 2

Вид заняття / контрольний захід	Оцінка $O_{сем}$
Лб №1	3 . . . 5
Лб №2	3 . . . 5
Пз №1	4 . . . 7
Пз №2	4 . . . 7
Тест	10 . . . 19
Контрольна точка 1	**24 . . . 43**

Лб №3	3 . . . 5
Лб №4	13 . . . 18
Пз №3	4 . . . 7
Пз №4	4 . . . 7
Тест	12 . . . 20
Контрольна точка 2	**36 . . . 57**
Всього за семестр	**60 . . . 100**

Як форма підсумкового контролю для дисципліни «Фізика» у модулі 1 використовується залік. Підсумкова оцінка визначається як кількість балів, отриманих здобувачем освіти за виконання контрольних заходів протягом семестру.

Як форма підсумкового контролю для дисципліни «Фізика» у модулі 2 письмовий (комбінований) іспит або комп'ютерне тестування. При цьому виді контролю підсумкова оцінка P_n обчислюється за формулою: $P_n = 0{,}6 \cdot O_{сем} + 0{,}4 \cdot O_{icn}$, де $O_{сем}$ – оцінка за семестр у 100-бальні системі, O_{icn} – оцінка за іспит у 100-бальній системі.

9.2 Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки.

1. Основні поняття, закони і моделі механіки, електрики, магнетизму, коливань, хвиль, квантової фізики, статистичної фізики, термодинаміки, фізики атомного ядра.
2. Межі застосування фізичних понять та законів.
3. Принципи побудови фізичних моделей та їх використання.

Необхідний обсяг умінь для одержання позитивної оцінки.

1. Розрахунок параметрів фізичних об'єктів, застосовуючи основні поняття, закони і моделі механіки, електрики, магнетизму, коливань, хвиль, квантової фізики та термодинаміки для розв'язання практичних задач.
2. Проведення найпростіших фізичних експериментальних досліджень.
3. Обробка результатів експериментальних досліджень, використовуючи методи оцінки результатів експериментів и розрахунку їх похибок.

Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру.

Задовільно, D, E (60 – 74 бали). Мати мінімум знань і умінь. Відпрацювати всі лабораторні роботи і виконати всі ІРЗ. Вміти застосовувати закони фізики для розв'язання найпростіших задач.

Добре, C (75 – 89 балів). Знати основні закони фізики а вміти їх застосовувати для розв'язання задач. Відпрацювати всі лабораторні роботи, оформити та захистити звіти. Виконати ІРЗ.

Відмінно, A, B (90 – 100 балів). Відпрацювати усі лабораторні роботи, оформити і захистити звіти з лабораторних робіт, виконати ІРЗ. Знати усі розділи кур-

су фізики, вміти аналізувати фізичні явища та процеси із застосуванням відповідних законів та співвідношень. Вміти розв'язувати задачі підвищеної складності. Знати загальні принципи проведенні фізичного експерименту й обробки його результатів.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента на комбінованому екзамені.

Задовільно, D, E (60 – 74 бали). Показати знання основного теоретичного та практичного матеріалу, надавши вірні відповіді на більшість запитань, одержаних при складанні іспиту або тестування.

Добре, C (75 – 89 балів). Показати повне знання теоретичного та практичного матеріалу, надавши вірні відповіді на переважну кількість запитань.

Відмінно, A, B (90 – 100 балів). Показати систематизовані глибокі знання теоретичного та практичного матеріалу, надавши вичерпні відповіді на всі поставлені запитання. Навести приклади спостереження фізичних законів та явищ на практиці.

Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Оцінка з дисципліни	Оцінка за національною шкалою		Оцінка за шкалою ЕКТС
	екзамен	залік	
96-100	5 (відмінно)	Зараховано	A
90-95	5 (відмінно)		B
75-89	4 (добре)		C
66-74	3 (задовільно)		D
60-65	3 (задовільно)		E
35-59	2 (незадовільно)	Не зараховано	FX
1-34			F

10 МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

10.1. Базова література

1. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 2. Електрика та магнетизм: навч. посібник./ І.М. Кібець та ін. - Харків: «Компанія СМІТ», 2009-424с.;
2. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 3, т.1. Оптика: навч.посібник/І.М. Кібець та ін. – Х.:Компанія СМІТ, 2012. – 232с.

10.2. Допоміжна література

1. Элементарная физика в примерах и задачах: учеб. Пособие для подготовительных отделений/ А.Д. Тевяшев и др. – Харьков: ХНУРЕ, 2005. - 628с.

2. Збірник тестів з курсу фізики/ О.М. Коваленко та ін.- Харків: ХНУРЕ,2006.-124с.
3. Словник фізичних термінів: навч.-довідковий посібник/ Т.Б. Ткаченко.- Харків: ХНУРЕ,2004.-80с.
4. Савельев И.В.Курс физики. Т.1,2,3.-М.:Наука, 1989.

10.3. Методичні вказівки до різних видів занять

1. Методичні вказівки до ПЗ з курсу фізики (частина 1)/Упоряд.: В.О.Стороженко та ін. –Харків:ХНУРЕ, 2013.-152с.
2. Методичні вказівки до ПЗ з фізики (частина2)/Упоряд.: В.О.Стороженко та ін. – Харків:ХНУРЕ, 2013.-140с.
3. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Частина 2. Електрика і магнетизм. / Упоряд.: Р. П. Орел та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2019. – 120с.
4. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Частина 3. Оптика. Атомна фізика та фізика твердого тіла / Упор. Малик С.Б. та ін.- Харків: ХНУРЕ, 2011.
5. Методичні вказівки до комп'ютерних лабораторних робіт з фізики./ О.М. Коваленко та ін.- Харків:ХНУРЕ, 2006-124с.

11 ІНФОРМАЦІЙНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

1. http://physic.nure.ua
2. http://catalogue.nure.ua/knmz/?subdivision=24&level=0&query=undefined

Загальна фізика з прикладами і задачами
Частина 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка
В.О.Стороженко, І.М.Кібець, А.І.Рибалка, Т.Б.Ткаченко

https://catalogue.nure.ua/document=55006

Шифр: 53(07) З-14
Загальна фізика з прикладами і задачами : навч. посіб. Частина 1 : Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка / В. О. Стороженко, І. М. Кібець, А. І. Рибалка, Т. Б. Ткаченко. – Харків : СМІТ, 2006. – 320 с.

Анотація

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з фізики для вищих технічних навчальних закладів. Його перша частина охоплює два великі розділи: «Механіка», «Молекулярна фізика та термодинаміка».

Кожний розділ починається з викладання теоретичного матеріалу з контрольними запитаннями і завданнями.

Беручи до уваги, що багато студентів з острахом відносяться до розв'язання задач, після контрольних запитань подані приклади розв'язання задач з докладними поясненнями.

Велика кількість задач для самостійного розв'язання дозволяє використовувати посібник і як задачник, що буде корисно при проведенні індивідуальних самостійних і контрольних робіт.

Довідковий матеріал з «Додатків» допоможе при розв'язання задач. Перевірити ступінь засвоєння вивченого матеріалу дозволять подані в кінці посібника тести.

Досконале вивчення матеріалу цього посібника допоможе студентам добре засвоїти викладений на лекціях матеріал та підготуватися до екзамену.

ЗМІСТ

I. Фізичні основи класичної механіки
1. Кінематика поступального руху матеріальної точки та кінематики твердого тіла
1.1 Основні поняття та визначення
1.2 Способи завдання руху та основні кінематичні характеристики поступального руху матеріальної точки
1.3 Кінематики обертального руху твердого тіла
2. Динаміка
2.1 Закон динаміки матеріальної точки
2.2 Перетворення Галілея. Принцип відносності Галілея – Ньютона
2.3 Сили в механіці
2.4 Рух центра мас
2.5 Закон збереження імпульсу
2.6 Рух тіла змінної маси. Реактивний рух
2.7 Рух у неінерціальних системах відліку
3. Робота, потужність, енергія. Закон збереження енергії
3.1 Робота, потужність.
3.2 Енергія, кінетична енергія. Теорема про зміну кінетичної енергії
3.3 Силове потенціальне поле. Консервативні та неконсервативні сили
3.4 Потенціальна енергія частинки
3.5 Взаємозв'язок сили та потенціальної енергії
3.6 Повна механічна енергія частинки і системи частинок. Закон збереження механічної енергії системи
3.7 Співудар двох тіл
3.8 Умови рівноваги механічної системи
4. Динаміка обертального руху твердого тіла
4.1 Момент імпульсу частинки і системи частинок відносно точки і осі. Момент сили. Рівняння моментів

4.2 Основне рівняння динаміки обертального руху для системи матеріальних точок
4.3 Закон збереження моменту імпульсу
4.4 Динаміка твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі
4.5 Приклади розрахунку моментів інерції тіл різної форми
4.6 Кінетична енергія і робота при обертальному процесі
4.7 Плоский рух твердого тіла
4.8 Взаємозв'язок законів збереження з принципами симетрії простору і часу
4.9 Гіроскопи
5. Елементі спеціальної (окремої) теорії відносності
5.1 Постулати спеціальної теорії відносності
5.2 Перетворення Лоренца
5.3 Наслідки із перетворень Лоренца
5.4 Просторово-часовий інтервал
5.5 Основи релятивістської динаміки
6. Механічні коливання
6.1 Характеристика коливань
6.2 Гармонічні коливання
6.3 Зв'язок гармонічних коливань з рівномірним рухом за колом
6.4 Гармонічний осцилятор
6.5 Вільні незгасаючі коливання пружного, фізичного та математичного маятників
6.6 Додавання коливань
6.7 Затухаючі коливання
6.8 Вимушені коливання
6.9 Параметричний резонанс
II. Молекулярна фізика та термодинаміка
7. Молекулярна-кінетична теорія ідеального газу
7.1 Статистичний та термодинамічний методи досліджень
7.2 Основні поняття термодинаміки. Температура
7.3 Ідеальний газ. Основне рівняння молекулярної кінетичної теорії ідеального газу
7.4 Рівняння стану ідеального газу
7.5 Молекулярно-кінетичний смисл температури. Енергія молекул
8. Закони розподілу молекул. Явища переносу
8.1 Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями
8.2 Барометрична формула. Розподіл Максвелла-Больцмана
8.3 Явища переносу
9. Закони термодинаміки
9.1 Внутрішня енергія, робота, кількість телоти
9.2 Перший закон термодинаміки
9.3 Теплоємність. Ізопроцеси в ідеальному газі
9.4 Взаємоперетворення роботи та теплоти. Напрямок теплових процесів
9.5 Оборотні та необоротні процеси. Цикл Карно.
9.6 Ентропія. Другий закон термодинаміки
9.7 Взаємозв'язок ентропії та ймовірності стану.

Загальна фізика з прикладами і задачами
Частина 2. Електрика та магнетизм
І.М.Кібець, А.І.Рибалка, В.О.Стороженко

https://catalogue.nure.ua/document=110199
Шифр: 53(07) К46
Загальна фізика з прикладами і задачами : навч. посібник. Ч. 2 : Електрика та магнетизм / І. М. Кібець, А. І. Рибалка, В. О. Стороженко. – Харків : СМІТ, 2009. – 424 с.

Анотація

Навчальний посібник «Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина II. Електрика та магнетизм» є другою частиною традиційного поділу курсу фізики. Він створений на основі програми з фізики Міністерства освіти і науки України для інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів і охоплює розділи, пов‘язані з вивченням електромагнітних явищ і законів. Також розглянуті хвильові процеси (створення і поширення механічних та електромагнітних хвиль).

Основною метою даного посібника є викладання, по можливості у доступній формі, основних законів і понять електричних і магнітних явищ, поясненню їх єдності та відносності проявів. Особливу увагу приділено поясненню фізичного смислу законів.

Структура посібника залишилась такою ж, як і у першій частині [1]. Кожний розділ складається з теоретичного матеріалу, контрольних запитань для самоперевірки та експрес-контролю, прикладів розв’язання задач і задач для самостійного розв’язання.

В кінці видання наведені тести для самоконтролю.

Необхідні довідкові матеріали надані у додатках.

ЗМІСТ

I ЕЛЕКТРОСТАТИКА

1. Електричне поле у вакуумі
   - 1.1. Електричний заряд і його властивості
   - 1.2. Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона.
   - 1.3. Електричне поле. Напруженість електричного поля
   - 1.4. Принцип суперпозиції електричних полів
   - 1.5. Потенціал електричного поля
   - 1.6 Потік вектора напруженості. Теорема Гауса у вакуумі.
   - 1.7 Застосування теореми Гаусса для розрахунку електростатичних полів
   - 1.8. Електричний диполь
   - 1.9 Диполь у зовнішньому електричному полі

2. Електричне поле в діелектриках.
   - 2.1 Типи діелектриків. Поляризація діелектриків.
   - 2.2. Зв’язок поляризованості з поверхневою і об’ємною густиною зв’язаних зарядів.
   - 2.3 Вектор електричної індукції
   - 2.4 Умови для електростатичного поля на межі двох ізотропних діелектричних середовищ (граничні умови)
   - 2.5Спонтанно поляризовані діелектрики.

3. Провідники в електричному полі.
   - 3.1 Електроємність
   - 3.2 Конденсатори. Приклади обчислення ємностей
   - 3.3 Сполучення конденсаторів
   - 3.4 Енергія системи зарядів відокремленого провідника та конденсатора. Енергія електричного поля.

II. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

4.Постійний електричний струм
   - 4.1. Електричний струм та його характеристики
   - 4.2. Закон безперервності струму
   - 4.3 Закон Ома для однорідної та неоднорідної ділянки кола. Електрорушійна сила.
   - 4.4. Закон Ома в диференціальній формі
   - 4.5 Правила Кірхгофа та їх застосування для розгалуженого кола
   - 4.6 Робота й потужність електричного струму
   - 4.7 Теплова дія електричного струму. Закон Джоуля-Ленца

5. Електричний струм у металах, рідинах, газах і вакуумі.
   - 5.1 Природа носіїв струму в металах
   - 5.2 Основні положення класичної електронної теорії провідності металів
   - 5.3 Закон Ома

5.4 Закон Джоуля – Ленца
5.5 Закон Відемана – Франца
5.6 Труднощі класичної теорії електропровідності
5.7 Електричний струм у рідинах
5.8 Електричний струм у газах
5.9 Електричний струм у вакуумі
III МАГНІТНЕ ПОЛЕ
6 Магнітне поле у вакуумі
6.1 Природа магнітного поля
6.2 Сила Ампера
6.3 Контур зі струмом у магнітному полі
6.4 Сила Лоренца
6.5 Ефект Холла
6.6 Закон Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиції магнітних полів
6.7 Магнітне поле рухомого заряду
6.8 Приклади визначення вектора індукції магнітного поля
6.9 Магнітний потік. Теорема Остроградського-Гаусса для вектора магнітної індукції у вакуумі
6.10 Циркуляція вектора індукції магнітного поля. Закон повного струму
6.11 Застосування теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції для розрахунку магнітних полів
6.12 Робота при переміщенні провідника з струмом в магнітному полі
7. Магнітне поле в речовині
7.1 Магнітні моменти атомів
7.2 Магнетики і їх намагнічування. Вектор намагнічення
7.3 Теорема про циркуляцію (закон повного струму) для магнітного поля в речовині
7.4 Граничні умови для векторів $\vec{B}$ і $\vec{H}$.
7.5 Класифікація магнетиків.
7.6 Діамагнетизм
7.7 Парамагнетизм
7.8 Феромагнетизм
7.9 Магнітне поле Землі.
8 Електромагнітна індукція
8.1 Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея
8.2. Закон електромагнітної індукції Фарадея і правило Ленца
8.3. Електрорушійна сила електромагнітної індукції
8.4. Явище самоіндукції. Індуктивність
8.5 Явище взаємної індукції
8.6. Закон зміни сили струму в електричному колі при вимиканні та вмиканні джерела ЕРС.
8.7 Енергія магнітного поля замкненого провідного контуру зі струмом. Енергія й густина енергії магнітного поля.
9. Основи теорії Максвелла електромагнітного поля
9.1 Струм зміщення
9.2 Рівняння Максвелла
9.3 Властивості рівнянь Максвелла
IV. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ, МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ
10. Електромагнітні коливання
10.1 Коливальний контур і його рівняння
10.2 Вільні незгасаючі гармонічні коливання в коливальному контурі
10.3 Вільні затухаючі коливання
10.4 Величини, що характеризують згасання
10.5 Вимушені електричні коливання
10.6 Змінний струм
11. Механічні хвилі

11.1 Хвильовий рух. Розповсюдження пружних хвиль в пружному середовищі
11.2 Плоска та сферична хвилі. Рівняння біжучої хвилі
11.3 Хвильове рівняння для плоскої пружної хвилі
11.4 Енергія пружної хвилі.
11.5 Принцип суперпозиції хвиль. Групова швидкість
11.6 Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі
11.7 Акустичні хвилі
12. Електромагнітні хвилі
12.1 Рівняння Максвелла та електромагнітні хвилі
12.2 Плоска електромагнітна хвиля.
12.3 Енергія електромагнітних хвиль. Вектор Умова–Пойнтінга.
12.4 Тиск і імпульс електромагнітних хвиль.
12.5 Випромінювання диполя
12.6 Шкала електромагнітних хвиль.

Загальна фізика з прикладами і задачами
Частина 3 Том 1 Оптика. Том 2 Квантова та атомна фізика.
Фізика твердого тіла. Ядерна фізика
І.М.Кібець, А.І.Рибалка, В.О.Стороженко

https://catalogue.nure.ua/document=173339
Шифр: 53(07) К46
Загальна фізика з прикладами і задачами : навч. посіб. Ч. 3 : Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла. Ядерна фізика. Т. 2 / І. М. Кібець, А. І. Рибалка, В. О. Стороженко. – Харків : СМІТ, 2014. – 304 с.
https://catalogue.nure.ua/document=173357
Шифр: 53(07) К46
Кібець І. М. Загальна фізика з прикладами і задачами : навч. посіб. Ч. 3 : Оптика. Т. 1 / І. М. Кібець, А. І. Рибалка, В. О. Стороженко. – Харків : СМІТ, 2014. – 232 с.

Анотація

Навчальний посібник «Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина ІІІ. Оптика. Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла. Ядерна фізика» (в двох томах) є третьою, заключною, частиною курсу фізики, який входить до освітньо-професійних програм бакалаврських напрямів технічного профілю.

Оскільки обсяг фундаментальної підготовки з фізики на цих напрямах різниться, посібник орієнтовано на повний перелік розділів третьої частини традиційного курсу фізики – від «Геометричної оптики» до «Ядерної фізики», що забезпечує його певну універсальність (на напрямах зі скороченим обсягом фізики окремі розділи можуть не вивчатися).

Мета та структура посібника залишилися тими ж, що і в попередніх двох частинах.

Зокрема, крім викладення теоретичного матеріалу (у стислій модульній формі), книга містить контрольні запитання та завдання для самостійної роботи студентів, а також набір задач (середньої складності) з прикладами їх розв'язання. Завдяки достатньої кількості задач з кожної теми (20-30), посібник може одночасно використовуватися і як задачник. Для полегшення контролю рівня засвоєння матеріалу студентами, викладач може використовувати наведені у кінці кожного розділу книги завдання для експрес-контролю (наприклад, для опитування студентів на практичних або лабораторних заняттях).

ЗМІСТ

І. Оптика
1. Геометрична оптика
1.1. Стисла історія розвитку уяви про природу світла.

1.2. Основні закони геометричної оптики.
1.3. Закони відбивання та заломлення світла як наслідок принципу Ферма.
1.4. Природні явища як наслідок принципу Ферма.
1.5. Явище повного внутрішнього відбивання.
1.6. Волоконна оптика.
1.7. Проходження світла крізь плоскопаралельну пластинку.
1.8. Вимірювання показника заломлення речовини за допомогою призми.
1.9. Оптичні системи.
1.10. Дзеркала.
1.11. Лінзи.
1.12. Аберації (похибки) оптичних систем.

2. Інтерференція світла

2.1. Світло як електромагнітні хвилі. Принцип суперпозиції світлових хвиль.
2.2. Додавання коливань і хвиль. Явище інтерференції світла.
2.3. Часова і просторова когерентність. Час і довжина когерентності.
2.3.1. Часова когерентність
2.3.2. Просторова когерентність.
2.4. Одержання когерентних пучків світла поділом хвильового фронту.
2.5. Одержання когерентних пучків світла методом поділу амплітуди
2.5.1. Смуги однакового нахилу
2.5.2. Смуги рівної товщини
2.6. Багатопроменева інтерференція
2.7. Застосування інтерференції в науці і техніці.
2.8. Інтерферометри

3. Дифракція світла
3.1. Принцип Гюйгенса- Френеля.
3.2. Метод зон Френеля.
3.3. Метод графічного додавання амплітуд.
3.4. Дифракція Френеля на простих перешкодах.
3.5. Дифракція Фраунгофера. Дифракція на щілині.
3.6. Дифракційна решітка.
3.7. Дифракція на просторових структурах.
3.8. Дифракція рентгенівського випромінювання на просторовій решітці.
3.9. Голографія та її застосування.

4. Поляризація світла. Розповсюдження світла в речовині.
4.1. Природне та поляризоване світло
4.2. Методи поляризації світла.
4.3. Поляризатори і аналізатори
4.4. Штучна оптична анізотропія.
4.5. Обертання площини поляризації.
4.6. Дисперсія світла.
4.7. Класична електронна теорія дисперсії світла.
4.9. Розсіяння світла.
4.10. Ефект Вавілова-Черенкова.

5. Квантова оптика.
5.1. Природа та основні характеристики теплового випромінювання.

5.2. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа.
5.3. Закони випромінювання абсолютно чорного тіла.
5.4. Формула Релея-Джинса. «Ультрафіолетова катастрофа».
5.5. Квантова гіпотеза. Формула Планка.
5.6. Корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей світла. Фотон та його характеристики.
5.7. Фотоелектричний ефект. Закони фотоефекту.
5.8. Квантова теорія фотоефекту.
5.9. Гальмівне рентгенівське випромінювання та його спектр.
5.10. Ефект Комптона.

ІІ. Квантова та атомна фізика

6. Елементи квантової механіки
6.1. Хвильові властивості мікрочастинок.
6.2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга та його наслідки.
6.3. Хвильова функція. ЇЇ фізичний зміст та властивості.
6.4. Загальне рівняння Шредінгера.
6.5. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.
6.6. Деякі випадки руху мікрочастинок.
6.7. Проходження частинки крізь потенціальний бар’єр. Тунельний ефект.
6.8. Лінійний гармонічний осцилятор в квантовій механіці.

7. Будова атома
7.1. Перші моделі будови атома. Дослід Резерфорда.
7.2. Спектр атома водню.
7.3. Модель атома Бора.
7.4. Дослід Франка і Герца.

8. Квантова теорія воднеподібних та багатоелектронних атомів.
8.1. Квантовомеханічна теорія воднеподібного атома.
8.2. Механічний і магнітний моменти електрона. Спін електрона.
8.3. Тонка структура спектрів. Спін –орбітальна взаємодія.
8.4. Повний момент імпульсу електрона.
8.5. Теорія багатоелектронних атомів.
8.6. Ефект Зеємана. Атом в магнітному полі.
8.7. Принцип Паулі. Періодична система елементів Д.І. Менделєєва.

9. Випромінювання та спектри.
9.1. Атомні спектри.
9.2. Рентгенівські спектри. Закон Мозлі.
9.3. Види хімічних зв’язків в молекулах. Обмінна взаємодія.
9.4. Енергія молекули. Молекулярні спектри.
9.5. Комбінаційне розсіяння світла.

10. Випромінювання і поглинання електромагнітних хвиль речовиною.
10.1. Спонтанне і вимушене випромінювання.
10.2. Заселеність енергетичних рівнів. Інверсна заселеність.
10.3. Квантове підсилення та генерація світла.
10.4. Квантові генератори (лазери) та їх застосування.

ІІІ Фізика твердого тіла

11. Квантові явища в твердих тілах.
    - 11.1. Фазовий простір. Квантові статистики.
    - 11.2. Виродження систем квантових частинок.
    - 11.3. Число станів в фазовому просторі.
    - 11.4. Квантова теорія вільних електронів в металі.
    - 11.5. Розподіл електронів провідності за енергіями в металі.
    - 11.6. Елементи квантової теорії електропровідності в металі.
    - 11.7. Квантові явища при низьких температурах.

12. Теплові властивості твердих тіл.
    - 12.1. Класифікація кристалічних твердих тіл.
    - 12.2. Класична теорія теплоємності твердих тіл (кристалів)
    - 12.3. Теорія теплоємності Ейнштейна.
    - 12.4. Квантова теорія теплоємності Дебая.
    - 12.5. Електронна теплоємність.
    - 12.6. Фонони.

13. Зонна теорія твердого тіла
    - 13.1. Створення енергетичних зон в кристалах.
    - 13.2. Зонна структура металів, діелектриків, напівпровідників.
    - 13.3. Фізичні властивості напівпровідників.
    - 13.4. Контактна різниця потенціалів.
    - 13.5. Термоелектричні явища.
    - 13.6. Фотопровідність. Внутрішній фотоефект.

.

IV Основи ядерної фізики та фізики елементарних частинок.

14. Атомне ядро
    - 14.1. Склад та характеристики атомного ядра.
    - 14.2. Енергія звязку ядра.
    - 14.3. Ядерні сили та моделі ядра.
    - 14.4. Радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду.
    - 14.5. Ядерні реакції

15. Елементарні частинки.
    - 15.1. Види взаємодії між елементарними частинками.
    - 15.2. Класифікація елементарних частинок.
    - 15.3. Закони збереження.
    - 15.4. Античастинки.
    - 15.5. Кваркова модель адронів.

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ ФІЗИКИ
ЧАСТИНА 1

Харків 2012

Методичні вказівки до практичних занять з курсу фізики. Ч.1, для студентів усіх напрямів бакалаврата денної форми навчання / Упоряд.: Стороженко В.О., Орел Р.П., Коваленко О.М., Малик С.Б. – Харків: ХНУРЕ, 2012. – 148 с.

Упорядники: В.О. Стороженко,
Р.П. Орел,
О.М. Коваленко,
С.Б. Малик.

Рецензент С.М. Мєшков, канд. техн. наук, доцент кафедри фізики.

ЗМІСТ

Вступ 4
1 Кінематика 5
2 Динаміка поступального руху 17
3 Робота, енергія, потужність. Закони збереження в механіці 29
4 Динаміка обертального руху 42
5 Механічні коливання 54
6 Основи спеціальної теорії відносності 70
7 Молекулярно-кінетична теорія. Термодинаміка 81
8 Електричне поле у вакуумі 98
9 Діелектрики в електричному полі 113
10 Провідники в електричному полі. Електроємність 126
11 Постійний електричний струм 137
Рекомендована література 148

ВСТУП

Під час вивчення дисципліни фізики вміння розв’язувати задачі – один з основних критеріїв оцінки глибини вивчення та засвоєння матеріалу, що свідчить про здатність студента аналізувати фізичні процеси і явища, вміти знаходити зв'язок між цими явищами, розуміти межі застосовності фізичних законів.

Дані методичні вказівки містять типові задачі з механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електростатики й електродинаміки.

До кожного заняття дані вказівки до організації самостійної роботи студентів, наведені стислі теоретичні відомості з розглянутої теми у вигляді основних законів і формул.

Відповідно до мети заняття запропонований набір теоретичних питань загального характеру. Їхня адаптація до конкретного напрямку бакалаврата наведена у відповідному пакеті контрольних завдань. Дані питання можуть бути використані для поточної перевірки знань лекційного матеріалу з теми у вигляді експрес-контрольних.

Пропонований у кожній темі набір задач містить у собі п'ять-шість задач, до яких додані пояснення у вигляді стислого аналізу та розв’язування, а також тридцять задач для самостійного розв’язання.

1 КІНЕМАТИКА

1.1 Мета заняття

Засвоїти основні методи розв'язування прямої та оберненої задач кінематики, використовуючи закони кінематики поступального та обертального руху.

1.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Перш ніж розв'язувати задачі з кінематики, потрібно засвоїти основні поняття та означення фізичних величин, які використовуються в цьому розділі. Зверніть особливу увагу на векторні та псевдовекторні величини (швидкість, прискорення, кутова швидкість, кутове прискорення), а також на формули зв'язку між векторними величинами [1, розд. 1; 2, розд. 1; 5, §1]. Повторіть означення вектора, модуля вектора, проекції вектора на вісь та дії над векторами.

Задачі кінематики поділяють на прямі та зворотні. У першому випадку знаходять швидкість, прискорення тіл та інші величини за відомими кінематичними рівняннями руху. Розв'язуючи зворотну задачу за відомими залежностями від часу швидкості чи прискорення та початковими умовами, знаходять кінематичні рівняння руху.

1.3 Основні закони та формули

1. Кінематичне рівняння руху матеріальної точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки.

2. Середня й миттєва швидкості матеріальної точки:

$$<\vec{\upsilon}>=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},\ \ \vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\upsilon_x\vec{i}+\upsilon_y\vec{j}+\upsilon_z\vec{k},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення точки за проміжок часу Δt.

3. Модуль миттєвої швидкості:

$$\upsilon=\left|\vec{\upsilon}\right|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt},\ \upsilon=\frac{ds}{dt},\ \upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2},$$

де Δs – шлях, що пройшла точка за проміжок часу Δt.

4. Середня шляхова швидкість:

$$<\upsilon>=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

5. Середнє і миттєве прискорення матеріальної точки:

$$<\vec{a}>=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t},\ \ \vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j}+\frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

6. Модуль вектора миттєвого прискорення:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\ .$$

7. Тангенціальна і нормальна складові прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},\ a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

8. Повне прискорення при криволінійному русі:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

9. Шлях і швидкість для рівноприскореного/рівноуповільненого руху:

$$\Delta s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2},\ \upsilon = \upsilon_0 \pm at\ ,$$

де υ_0 – початкова швидкість.

10. Довжина шляху, що пройшла матеріальна точка за проміжок часу від t_1 до t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,dt\ .$$

11. Кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

де $d\vec{\varphi}$ – елементарний кут повороту.

12. Кутова швидкість рівномірного обертального руху

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

де $\Delta\varphi$– кут повороту довільного радіуса від початкового положення; Δt – проміжок часу, за який відбувся даний поворот; T – період обертання; n – частота обертання.

13. Кутове прискорення:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

14. Кут повороту і кутова швидкість для рівноприскореного / рівноуповільненого обертального руху:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t\ ,$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

15. Зв'язок між лінійними (довжина шляху ds, що пройшла точка по дузі окружності радіусом R, лінійна швидкість υ, тангенціальна складова прискорення a_τ, нормальна складова прискорення a_n) і кутовими ($d\varphi$ – кут повороту, ω – кутова швидкість, ε – кутове прискорення) величинами:

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$, $ds = |d\vec{r}| = R \cdot d\varphi$,

$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, $\upsilon = R\omega$,

$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]$, $a_\tau = \varepsilon R$,

$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]$, $a_n = \omega^2 R$.

1.4 Контрольні запитання

1. Що таке система відліку?
2. Що таке траєкторія, переміщення, довжина шляху?
3. Який вигляд має кінематичний закон руху для координатного способу визначення руху матеріальної точки?
4. Який вигляд має кінематичний закон руху для векторного способу визначення руху матеріальної точки?
5. Який вигляд має кінематичний закон руху для природного способу визначення руху матеріальної точки?
6. Який рух називається поступальним і обертальним?
7. Яку формулу можна використовувати для знаходження шляху, що пройшла точка при нерівномірному русі?
8. Що таке середня швидкість, миттєва швидкість?
9. Як знайти вектор швидкості для різних способів визначення руху?
10. Що таке середнє прискорення, миттєве прискорення?
11. Як знайти вектор прискорення для різних способів визначення руху?
12. Що характеризують тангенціальна і нормальна складові прискорення?
13. Що таке кутове переміщення, кутова швидкість і кутове прискорення?
14. Як пов'язані лінійна та кутова швидкості?
15. Як пов'язана нормальна складова лінійного прискорення з кутовими параметрами?
16. Як пов'язана тангенціальна складова лінійного прискорення з кутовими параметрами?

1.5 Приклади розв'язування задач

Задача 1. Рівняння руху точки по прямій має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 4$ м, $B = 2$ м/с , $C = 0{,}2$ м/с^3.

Знайти положення точки в моменти часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с; середню швидкість за час, що минув між цими моментами; миттєві швидкості у вказані моменти часу, середнє прискорення за вказаний проміжок часу, миттєві прискорення в ці моменти часу.

Дані: $x = A + Bt + Ct^3$, $A = 4$ м, $B = 2$ м/с , $C = 0{,}2$ м/с^3, $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с.

Знайти: x_1, x_2, $<\upsilon>$, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$, $<a>$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Аналіз і розв'язання

Запропонована задача є прикладом прямої задачі кінематики. Кінематичне рівняння руху подано в координатному вигляді $x = A + Bt + Ct^3$. Якщо ми маємо це рівняння, то можемо знайти різні фізичні величини, які характеризують рух матеріальної точки.

Положення точки, що рухається прямолінійно, у деякий момент часу визначається відстанню x точки від початку відліку. Щоб знайти цю відстань, необхідно у рівняння руху підставити замість часу t задане значення часу

$$x_1 = \left(4 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^3\right) \text{м} = 9{,}6 \text{ м};$$

$$x_2 = \left(4 + 2 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 5^3\right) \text{м} = 39 \text{ м}.$$

Середня шляхова швидкість за означенням дорівнює $< \upsilon >= \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, де Δx – зміна відстані x за проміжок часу Δt.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \left(39 - 9{,}6\right) м = 29{,}4 \text{ м};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left(5 - 2\right) \text{с} = 3 \text{ с};$$

$$< \upsilon >= \frac{29{,}4}{3} \text{ м/с} = 9{,}8 \text{ м/с}.$$

Загальний вираз вектора миттєвої швидкості знайдемо, коли продиференціюємо за часом рівняння руху

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \left(B + 3Ct^2\right)\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення сталих B та C, а також значення часу, матимемо:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 2^2\right) \text{м/с} = 4{,}4\vec{i} \text{ м/с};$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{i}\left(2 + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2\right) \text{м/с} = 17\vec{i} \text{ м/с}.$$

Модуль середнього прискорення за означенням дорівнює

$$< a >= \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t},$$

де $\dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ – зміна швидкості υ за час Δt.

$$\Delta \upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \left|17 - 4{,}4\right| \text{м/с} = 12{,}6 \text{ м/с},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left|5 - 2\right| \text{с} = 3 \text{ с},$$

$$< a >= \frac{12{,}6}{3} \text{ м/с}^2 = 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Загальний вираз для вектора миттєвого прискорення матимемо, якщо продиференціюємо за часом вираз швидкості.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 6Ct\vec{i}.$$

Підставивши сюди значення C та задані значення часу, матимемо

$\vec{a}_1 = 6 \cdot 0,2 \cdot 2\vec{i}$ м/с^2 $= 2,4\vec{i}$ м/с^2;

$\vec{a}_2 = 6 \cdot 0,2 \cdot 5\vec{i}$ м/с^2 $= 6\vec{i}$ м/с^2.

Відповідь: $x_1 = 9,6$ м, $x_2 = 39$ м, $<\upsilon> = 9,8$ м/с, $\vec{\upsilon}_1 = 4,4\vec{i}$ м/с, $\vec{\upsilon}_2 = 17\vec{i}$ м/с, $<a> = 4,2$ м/с^2, $\vec{a}_1 = 2,4\vec{i}$ м/с^2, $\vec{a}_2 = 6\vec{i}$ м/с^2.

Задача 2. Автомобіль рухається по заокругленню шосе, що має радіус кривини $R = 50$ м. Рівняння руху автомобіля – $S = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0,5$ м/с^2. Знайти швидкість автомобіля, його тангенціальне, нормальне і повне прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Дані: $S(t) = A + Bt + Ct^2$, $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0,5$ м/с^2, $R = 50$ м, $t = 5$ с.

Знайти: $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$.

Аналіз і розв'язання

В даній задачі відома залежність шляху s від часу, тобто відомо кінематичне рівняння руху $s(t)$. Використовується природний спосіб визначення руху.

Насамперед знаходимо загальний вираз для швидкості автомобіля. Відомо, що

$$\vec{\upsilon} = \vec{\tau}\upsilon = \vec{\tau}\frac{ds}{dt},$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, спрямований по дотичній до траєкторії руху.

Взявши похідну за часом від заданого рівняння шляху s, матимемо

$\upsilon = B + 2Ct$.

Підставивши сюди значення сталих B і C, а також задане значення часу, знайдемо модуль швидкості

$\upsilon = |10 - 2 \cdot 0,5 \cdot 5|$ м/с $= 5$ м/с.

Вектор швидкості, спрямований по дотичній до траєкторії, в даний момент часу

$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = 5\vec{\tau}$ м/с.

Тепер знаходимо загальний вираз для тангенціального прискорення. З теорії відомо, що

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}.$$

Взявши похідну за часом від загального виразу швидкості і підставивши значення сталої C та часу, матимемо:

$\vec{a}_\tau = 2C\vec{\tau} = -\vec{\tau}$ м/с^2.

Отриманий вираз для тангенціального прискорення не містить часу, це означає, що тангенціальне прискорення стале за величиною; вектор $\vec{a}_\tau$ – протилежний напрямку вектора швидкості, модуль цього вектора дорівнює $a_\tau = 1$ м/с^2.

Модуль нормального прискорення знайдемо, підставивши в загальне рівняння його відомі значення швидкості та радіуси кривини траєкторії

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{5^2}{50} \text{ ì /c}^2 = 0{,}5 \text{ ì /c}^2. \quad u^2 = 2gh$$

Повне прискорення буде геометричною сумою взаємно перпендикулярних тангенціального і нормального прискорень

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0{,}25} \text{ м/с}^2 = 1{,}12 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора повного прискорення можна визначити, якщо знайти кут, утворений повним прискоренням з напрямком радіуса або з напрямком нормального прискорення

$$\cos(\vec{a}, \vec{a}_n) = \frac{a_n}{a} = \frac{0{,}5}{1{,}12} = 0{,}446,$$

$$(\vec{a}, \vec{a}_n) = 63^o 30'.$$

Відповідь: $\vec{\upsilon} = 5\vec{\tau}$ м/с, $\vec{a}_\tau = -\vec{\tau}$ м/с^2, $a_n = 0{,}5$ м/с^2,

$a = 1{,}12$ м/с^2, $(\vec{a}, \vec{a}_n) = 63^o 30'$.

Задача 3. Матеріальна частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ м/с^2. Визначити модуль швидкості частинки та її координати в момент часу $t = 2$ с, якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ її швидкість була $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с, а початкові координати точки дорівнювали $x_0 = 1$м; $y_0 = 0$; $z_0 = 2$ м.

Дані: $\vec{a} = \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ м/с^2, $t = 2$ с, $\vec{\upsilon}_0 = \left(3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$ м/с,

$x_0 = 1$м, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ м.

Знайти: υ, x, y, z.

Аналіз і розв'язання

Запропонована задача – приклад оберненої задачі кінематики. З означення вектора прискорення $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ знаходимо $d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt$.

Інтегруючи цей вираз, одержимо

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_0^t \vec{a}dt = \int_0^t \left(2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 3\vec{k}\right)dt = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t\vec{k}.$$

Враховуючи початкові умови $\vec{\upsilon}_0 = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, знайдемо

$\vec{\upsilon} = \left(3 + t^2\right)\vec{i} + \left(2t^2 + 1\right)\vec{j} + \left(3t - 1\right)\vec{k}$.

Модуль вектора $\vec{\upsilon}$ дорівнює

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(3 + t^2\right)^2 + \left(2t^2 + 1\right)^2 + \left(3t^2 - 1\right)^2} = 12{,}5 \text{ м/с}.$$

З означення проекцій вектора $\vec{\upsilon}$ на осі координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

знаходимо

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \upsilon_x dt;$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \upsilon_y dt;$$

$$\int_{z_0}^{z} dz = \int_0^t \upsilon_z dt,$$

$$x - x_0 = \int_0^t \left(3 + t^2\right) dt = 3t + \frac{t^3}{3};$$

$$y - y_0 = \int_0^t \left(2t^2 + 1\right) dt = \frac{2}{3}t^3 + t;$$

$$z - z_0 = \int_0^t \left(3t - 1\right) dt = \frac{3}{2}t^2 - t.$$

Підставивши числові дані, одержимо $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Відповідь: $\upsilon = 12{,}5$ м/с, $x = 9{,}7$ м, $y = 7{,}3$ м, $z = 6$ м.

Задача 4. Маховик, що обертається з постійною частотою $n_0 = 10\,\text{с}^{-1}$, при гальмуванні почав обертатися рівносповільнено. Коли гальмування припинилося, обертання маховика знову стало рівномірним, але вже з частотою $n = 6\,\text{с}^{-1}$. Визначити кутове прискорення ε маховика і тривалість Δt гальмування, якщо за час рівно сповільненого руху маховик зробив $N = 50$ обертів.

Дані: $n_0 = 10\,\text{с}^{-1}$, $n = 6\,\text{с}^{-1}$, $N = 50$.

Знайти: ε, Δt.

Аналіз і розв'язання

Якщо обертання відбувається із сталим кутовим прискоренням, то кутове прискорення ε маховика пов'язане з початковою ω_0 та кінцевою ω кутовими швидкостями співвідношенням

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \cdot \Delta\varphi;$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi};$$

але тоді

$$\Delta\varphi = 2\pi N,\ \omega = 2\pi n;$$

то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi} = \frac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N} = -4{,}02 \text{ рад/с}^2.$$

Від'ємне кутове прискорення одержали тому, що маховик обертався сповільнено.

Для визначення тривалості гальмування скористаємося формулою, яка зв'язує кут повороту φ з середньою кутовою швидкістю $<\omega>$ обертання і часом t:

$$\Delta\varphi = <\omega> \cdot \Delta t,\ \Delta\varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot \Delta t = \pi\left(n_0 + n\right) \cdot \Delta t,$$

звідки

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\pi\left(n_0 + n\right)} = \frac{2N}{n_0 + n} = 6{,}25 \text{ с}.$$

Відповідь: $\varepsilon = -4{,}02$ рад/с^2, $\Delta t = 6{,}25$ с.

1.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 80$ км/год, а другу – зі швидкістю $\upsilon_2 = 40$ км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

Відповідь: $<\upsilon> = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 53{,}3$ км/год.

Задача 2. Залежність шляху, який пройшло тіло, від часу визначається рівнянням $S = at^4 - bt^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла. Побудувати графік залежності швидкості від часу за перші п'ять секунд руху, якщо $a = 0{,}25$ м/с^4, $b = 9$ м/с^2.

Відповідь: $\upsilon_{min} = -29{,}3$ м/с.

Задача 3. Пароплав іде по річці від пункту A до пункту B зі швидкістю υ_1=10 км/год, а назад – зі швидкістю $\upsilon_2 = 16$ км/год. Знайти середню швидкість пароплава υ і швидкість течії ріки υ_p.

Відповідь: $\upsilon = 12{,}3$ км/год, $\upsilon_p = 3$ км/год.

Задача 4. Підкинутий вертикально вгору камінь перебував на одній і тій самій висоті в моменти часу t_1=2,1 с і t_2=3,7 с. Нехтуючи опором повітря, визначити швидкість υ_0, з якою був підкинутий камінь.

Відповідь: $\upsilon_0 = g\dfrac{t_1 - t_2}{2} = 28{,}4$ м/с.

Задача 5. Камінь, що підкинули з поверхні землі вертикально вгору, упав на землю через 3 с. Яка була початкова швидкість каменя? На яку висоту піднявся камінь? Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $\upsilon_0 = 14{,}7$ м/с, $h = 11$ м.

Задача 6. Тіло кинуте з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 28$ м/с під кутом $\alpha = 42°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначити для моменту часу $t = 1{,}2$ с після початку руху тангенціальну a_τ і нормальну a_n складові прискорення.

Відповідь: $a_\tau = g\sin\beta = 3{,}12$ м/с^2, $a_n = g\cos\beta = 9{,}30$ м/с^2,

де $\beta = arctg\dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}$.

Задача 7. Рух матеріальної точки задано рівнянням: $x = At + Bt^2$, де $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Визначити момент часу, в який швидкість точки $\upsilon = 0$. Знайти координату та прискорення в цей момент. Побудувати графіки залежностей координати, шляху, швидкості та прискорення від часу для цього руху.

Відповідь: $t = 40$ с, $x = 80$ м, $a = -0{,}1$ м/с^2.

Задача 8. Залежність шляху *s*, який пройшло тіло, від часу *t* визначається рівнянням $S = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3. Знайти: 1) залежність швидкості υ і прискорення a від часу t; 2) відстань, пройдену тілом, швидкість і прискорення через 2 с після початку руху. Побудувати графіки залежностей шляху, швидкості і прискорення від часу для $0 \le t \le 3$ с через 0,5 с.

Відповідь: 1) $\upsilon = \left(2 - 6t + 12t^2\right)$ м/с, $a = \left(-6 + 24t\right)$ м/с^2;

2) $s = 24$ м, $\upsilon = 38$ м/с, $a = 42$ м/с^2.

Задача 9. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t визначається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2$, де $A = 6$ м, $B = 3$ м/с, $C = 2$ м/с^2. Знайти середню швидкість і середнє прискорення тіла в проміжку часу від 1 с до 4 с. Побудувати графіки залежностей шляху, швидкості та прискорення від часу для $0 \le t \le 5$ с через 1 с.

Відповідь: $<\upsilon> = 7$ м/с, $<a> = 4$ м/с^2.

Задача 10. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t подано рівнянням $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 0{,}14$ м/с^2, $D = 0{,}01$ м/с^3. Через який час від початку руху прискорення тіла дорівнюватиме 1 м/с^2? Чому дорівнює середнє прискорення тіла за цей проміжок часу?

Відповідь: $t = 12$ с, $<a> = 0{,}64$ м/с^2.

Задача 11. Швидкість каменя, що підкинули вертикально угору, через проміжок часу $t = 12$ с зменшилася в $n = 3{,}5$ рази. Визначити початкову швидкість υ_0 каменя і висоту h його підйому.

Відповідь: $\upsilon_0 = \dfrac{n}{n-1} gt = 30{,}2$ м/с, $h = \dfrac{n^2}{(n-1)^2} \dfrac{gt^2}{2} = 46{,}5$ м.

Задача 12. Радіус-вектор частинки визначається виразом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$. Обчислити: шлях s, який пройшла частинка за перші 10 с руху, модуль переміщення $|\Delta\vec{r}|$ за той самий час. Пояснити одержані результати.

Відповідь: $s = 500$ м, $|\Delta\vec{r}| = 500$ м.

Задача 13. Залежність радіус-вектора частинки від часу описується законом $\vec{r} = (3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \vec{k})$ м. Знайти: швидкість $\vec{\upsilon}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки, модуль швидкості υ в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $\vec{\upsilon} = (6t\vec{i} + 2\vec{j})$ м/с, $\vec{a} = 6\vec{i}$ м/с^2, $\upsilon = 6{,}3$ м/с.

Задача 14. Частинка рухається із швидкістю $\vec{\upsilon} = (1\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k})$ м/с. Знайти: переміщення $\Delta\vec{r}$ частинки за перші 2 с її руху; модуль швидкості υ у момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k})$ м, $\upsilon = 13$ м/с.

Задача 15. Камінь кинутий у горизонтальному напрямку. Через 0,5 с після початку руху значення швидкості каменя стало в 1,5 рази більше його початкової швидкості. Нехтуючи опором повітря, знайти початкову швидкість каменя.

Відповідь: $\upsilon_0 = 4{,}4$ м/с.

Задача 16. Диск радіусом $R = 0{,}6$ м обертається навколо нерухомої осі так, що залежність його кутового прискорення від часу задається рівнянням $\varepsilon = At$, де $A = 3$ рад/с^3. Визначити кут $\Delta\varphi$ повороту диска за час $t = 2{,}2$ с після початку руху, лінійну швидкість точки υ на ободі диска та її нормальне прискорення a_n для цього самого моменту часу.

Відповідь: $\Delta\varphi = \dfrac{At^2}{6} = 5{,}32$ рад,

$\upsilon = \dfrac{At^2}{2} R = 4{,}36$ м/с, $a_n = \dfrac{A^2t^4}{4} R = 31{,}6$ м/с^2.

Задача 17. Диск радіусом $R = 0{,}6$ м, обертаючись рівноприскорено, за час $t = 2\,c$ набув кутової швидкості $\omega = 3{,}3$ рад/с. Визначити для цього моменту часу тангенціальну a_τ і нормальну a_n складові прискорення.

Відповідь: $a_\tau = \dfrac{\omega R}{t} = 0{,}99$ м/с^2, $a_n = \omega^2 R = 6{,}53$ м/с^2.

Задача 18. Три літака виконують розворот, рухаючись на відстані 60 м один від одного. Середній літак летить із швидкістю 360 км/год, рухаючись по дузі кола радіусом 600 м. Визначити прискорення кожного літака.

Відповідь: $a_1 = 18{,}3 \text{м/с}^2$, $a_2 = 16{,}7 \text{м/с}^2$, $a_3 = 15{,}0 \text{ м/с}^2$.

Задача 19. Тіло проходить однакові ділянки шляху з постійними у межах ділянки швидкостями $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$. Визначити середню швидкість тіла на всьому шляху.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\upsilon_i}}$.

Задача 20. Точка рухається по колу радіусом $R = 2$ см. Залежність шляху від часу задано рівнянням $x = Ct^3$, де $C = 0{,}1 \text{ см/с}^2$. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення в момент, коли лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 0{,}3$ м/с.

Відповідь: $a_n = 4{,}5 \text{ м/с}^2$, $a_\tau = 0{,}06 \text{ м/с}^2$.

Задача 21. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$. Через $t = 0{,}5$ с від початку руху повне прискорення колеса дорівнює $a = 13{,}6$ і /с^2. Знайти радіус колеса.

Відповідь: $R = 6{,}1$ м.

Задача 22. Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням: $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 1 \text{ рад/с}$, $C = 1 \text{ рад/с}^2$, $D = 1 \text{ рад/с}^3$. Знайти радіус колеса, якщо відомо, що на кінець другої секунди руху нормальне прискорення точок, які лежать на ободі колеса, дорівнювало $a_n = 3{,}46 \cdot 10^2 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: $R = 1{,}2$ м.

Задача 23. Знайти, у скільки разів тангенціальне прискорення точки, що лежить на ободі колеса, яке обертається, більше її нормального прискорення для того моменту, коли вектор повного прискорення цієї точки утворює кут $30°$ з вектором її лінійної швидкості.

Відповідь: 1,7.

Задача 24. Вентилятор обертається з частотою 90 обертів за хвилину. Після вимкнення вентилятор, обертаючись рівносповільнено, зробив до зупинки 75 обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимкнення вентилятора до його повної зупинки?

Відповідь: $t = 10$ с.

Задача 25. Колесо, обертаючись рівносповільнено, під час гальмування за одну хвилину зменшило свою швидкість з 300 об/хв до 180 об/хв. Знайти кутове прискорення колеса і кількість обертів, зроблених ним за цей час.

Відповідь: $\varepsilon = -0{,}21 \text{ рад/с}^2$, $N = 240$ об.

Задача 26. Спостерігач, який стоїть на платформі, побачив, що перший вагон електропоїзда, який наближається до станції, пройшов повз нього за 4 с, а другий – за 5 с. Після цього передній край поїзда зупинився на відстані 75 м від спостерігача. Вважати рух поїзда рівносповільненим, визначити його прискорення.

Відповідь: $a = -0{,}25 \text{м/с}^2$.

Задача 27. Два тіла кинуті вертикально вгору з однієї й тієї самої точки з однаковою початковою швидкістю υ_0 з інтервалом часу $\Delta t = 1{,}8$ с. Нехтуючи опором повітря, визначити початкову швидкість, якщо обидва тіла через проміжок часу $t = 5{,}5$ с після кидка першого тіла виявилися на одній висоті h. Визначити також цю висоту.

Відповідь: $\upsilon_0 = \left(t - \dfrac{\Delta t}{2} \right) g = 45{,}1$ м/с, $h = \dfrac{gt\left(t - \Delta t\right)}{2} = 99{,}8$ м.

Задача 28. Тіло кинуто з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 15$ м/с під кутом $\alpha = 45°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначити відстань l від місця кидка до точки, у якій тіло виявиться через першу половину часу свого руху.

Відповідь: $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin\alpha}{2g} \sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = 20{,}2$ м.

Задача 29. Диск обертається навколо нерухомої осі так, що залежність лінійної швидкості точок, що лежать на ободі колеса, від часу задається рівнянням $\upsilon = A + Bt$, де $A = 0{,}6$ м/с; $B = 0{,}9$ м/с^2. Визначити радіус R колеса, якщо кут α між векторами повного прискорення й лінійної швидкості через проміжок часу $t = 3$ с від початку руху дорівнює $80°$.

Відповідь: $R = \dfrac{\left(A + Bt\right)^2}{Btg\alpha} = 2{,}13$ м.

Задача 30. Колесо радіусом $R = 42$ см обертається так, що залежність кута повороту колеса від часу задається рівнянням $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $B = -1{,}6$ рад/с; $C = 0{,}8$ рад/с^2. Визначити: момент часу t_1, коли повне прискорення $\vec{a}$ буде спрямовано під кутом $\alpha = 75°$ до швидкості $\vec{\upsilon}$; момент часу t_2, при якому нормальна складова $\vec{a}_n$ прискорення точки на ободі збігається за величиною з тангенціальною складовою $\vec{a}_\tau$.

Відповідь: $t_1 = \dfrac{\sqrt{2Ctg\alpha} - B}{2C} = 2{,}52$ с, $t_2 = \dfrac{\sqrt{2C} - B}{2C} = 1{,}79$ с.

2 ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

2.1 Мета заняття

Засвоїти методи класичної механіки і навчитися розв'язувати задачі динаміки матеріальної точки, динаміки поступального руху.

2.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для досягнення мети заняття необхідно вивчити теорію даного розділу механіки, викладену в підручниках [1, розд. 2; 2, розд. 2; 5, §2] та у конспекті.

Основу динаміки матеріальної точки складають три закони Ньютона, які справедливі тільки під час виконання таких умов: рух тіла розглядається відносно інерціальної системи відліку, тіло має бути матеріальною точкою сталої маси, швидкість тіла має бути значно меншою за швидкість світла в вакуумі.

Під час розв'язання задач за темою використовується другий закон Ньютона, який має вигляд:

$\vec{F} = m\vec{a}$, де $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ – рівнодійна усіх сил, прикладених до даного тіла.

В неінерціальній системі відліку, яка рухається поступально з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно інерціальної системи, другий закон Ньютона має вигляд

$$\vec{F} + \vec{F}_{ін} = m\vec{a},$$

де $\vec{F}_{ін} = m\vec{a}_0$ – сила інерції, $\vec{a}_0$ – прискорення тіла в неінерціальній системі відліку.

Для розв'язання задач з використанням другого закону Ньютона запропоновано метод, який включає послідовність дій:

1. Знайти, чи використовується цей закон у даній задачі, і накреслити рисунок-схему взаємодіючих тіл.

2. Знайти і позначити на схемі всі сили, що діють на тіла системи. Для кожного тіла:

– записати головне рівняння динаміки у векторній формі;

– вибрати відповідну інерціальну систему відліку;

– спроектувати сили на осі координат і записати другий закон Ньютона у вигляді системи скалярних рівнянь: $\sum F_x = ma_x$; $\sum F_y = ma_y$; $\sum F_z = ma_z$, де a_x, a_y, a_z – проекції вектора прискорення на відповідні осі.

3. Розв'язати систему одержаних рівнянь відносно невідомих величин.

Визначення прискорення тіл у задачах даного типу називають головною задачею динаміки поступального руху.

2.3 Основні закони та формули

1. Імпульс матеріальної точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

де m – маса матеріальної точки; $\vec{\upsilon}$ – її швидкість.

2. Другий закон Ньютона (основний закон динаміки матеріальної точки):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

3. Це саме рівняння в проекціях на дотичну і нормаль до траєкторії точки:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}, \quad F_n = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

4. Прискорення, що здобувається матеріальною точкою під дією сил,

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m},$$

де m – маса матеріальної точки; $\vec{F}_i$ – сила, що діє на тіло (точку) з боку i-го тіла.

5. Третій закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, що діє на першу матеріальну точку з боку другої; $\vec{F}_{21}$ – сила, що діє на другу матеріальну точку з боку першої.

6. Сила тертя ковзання

$$F_{тер} = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила нормальної реакції опори.

7. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const,$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i-ої матеріальної точки (тіла); $\vec{\upsilon}_i$ – швидкість i-ої точки (тіла).

8. Радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m},$$

де m_i і $\vec{r}_i$ – відповідно маса й радіус-вектор i-ої матеріальної точки; n – число матеріальних точок у системі; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – маса системи.

9. Координати центра мас системи матеріальних точок:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

де m_i – маса i-ої матеріальної точки; x_i, y_i, z_i – координати i-ої точки.

10. Закон руху центра мас

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i,$$

де $\vec{\upsilon}_C$ – швидкість руху центра мас.

2.4 Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть поняття інертності.
2. Дайте визначення маси.
3. Дайте визначення сили.
4. Що таке інерціальна система відліку?
5. Запишіть перший закон Ньютона.
6. Запишіть другий закон Ньютона.
7. Запишіть третій закон Ньютона.
8. Що таке механічний імпульс тіла?
9. Запишіть закон збереження імпульсу.
10. Що таке центр мас механічної системи?
11. Що таке гравітаційна сила та сила тяжіння?
12. Дайте визначення ваги тіла.
13. Дайте визначення сили тертя.
14. Запишіть закон Гука.

2.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. На похилій площині розташований вантаж масою $m_1=1\,\text{кг}$, зв'язаний ниткою, перекинутою через блок, з іншим вантажем масою $m_2=3\,\text{кг}$ (рис. 2.1). Коефіцієнт тертя між першим вантажем та площиною $\mu=0{,}2$, кут нахилу площини до горизонту $\alpha=30^\circ$. Знайти прискорення вантажів і силу натягу нитки. Тертям у блоці знехтувати.

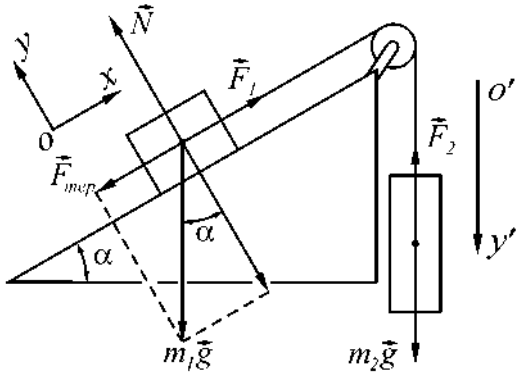


Рисунок 2.1

Дані: $m_1=1\,\text{кг}$, $m_2=3\,\text{кг}$, $\alpha=30^\circ$, $\mu=0{,}1$.

Знайти: a, F.

Аналіз і розв'язання

У задачі розглядаються два тіла, зв'язані ниткою, які рухаються поступально та рівноприскорено. Таким чином, необхідно розв'язати головну задачу динаміки; для цього використовується другий закон Ньютона. Зважаючи на те, що нитка нерозтяжна (невагома і блок невагомий), прискорення цих тіл та сили натягу ниток рівні за модулем:

$$\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \left|\overrightarrow{a_2}\right| = a,\ \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = F\,.$$

На вантаж маси m_1 діє сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила нормальної реакції опори $\vec{N}$, сила натягу нитки $\vec{F}$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$. Уявимо собі, що вантаж m_1 рухається вверх по похилій площині. Якщо це припущення невірне, тоді прискорення матиме від'ємне значення, тобто рух вантажів відбувається у зворотному напрямку.

Для першого тіла другий закон Ньютона у векторній формі має вигляд:

$$m_1\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m_1\vec{a}\,.$$

На вантаж m_2 діє тільки сила тяжіння $m_2\vec{g}$ та сила натягу нитки:

$$m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a}\,.$$

Для кожного тіла виберемо свою інерціальну систему відліку. Для першого вантажу пов'яжемо її з похилою площиною, коли вісь *Ox* спрямована вверх по схилу, а вісь *Oy* перпендикулярно *Ox* вверх. Тоді другий закон Ньютона для першого тіла у проекціях на осі *Ox* та *Oy* відповідно має вигляд:

$$-m_1 g\,sin\,\alpha - F_{тер} + F = m_1 a\,, \tag{2.1}$$

$$-m_1 g\,cos\,\alpha + N = 0\,. \tag{2.2}$$

Для другого тіла інерціальну систему відліку пов'язуємо з рухом цього тіла вниз, тобто вісь $O'y'$ спрямована вниз.

Тоді з рівняння (2.2) одержимо проекцію на вісь $O'y'$:

$$-F + m_2 g = m_2 a\,. \tag{2.3}$$

Сила тертя дорівнює

$$F_{тер} = \mu N\,. \tag{2.4}$$

Якщо враховувати рівняння (2.2) та (2.4), то рівняння (2.1) та (2.3) перетворяться на систему:

$$\begin{cases} -m_1 g\,sin\,\alpha - \mu m_1 g\,cos\,\alpha + F = m_1 a \\ F - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо прискорення та силу натягу нитки

$$a = g\frac{m_2 - m_1(sin\,\alpha + \mu\,cos\,\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}60\ \text{м/с}^2\,,$$

$$F = \frac{m_1 m_2 g(1 + sin\alpha + \mu cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 12{,}3 \text{ Н}.$$

Відповідь: $a = 7{,}60$ м/с^2, $F = 12{,}3$ Н.

Задача 2. Бак в тендері паровоза має довжину $l = 4$ м (рис. 2.2). Яка різниця Δl рівнів води біля переднього і заднього кінців бака при русі поїзда з прискоренням $a = 0{,}5$ м/с^2.

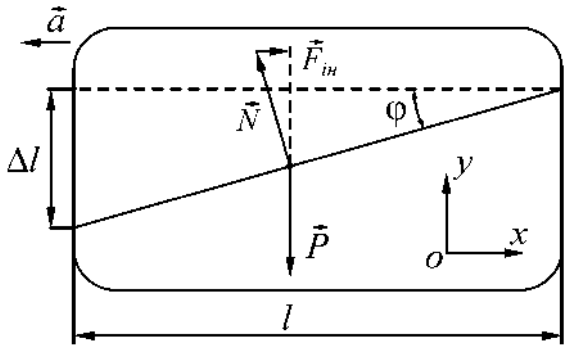


Рисунок 2.2

Дані: $l = 4$ м, $a = 0{,}5$ м/с^2.

Знайти: Δl.

Аналіз і розв'язання

У даному випадку зручно вибрати неінерціальну систему відліку (НСВ), яка рухається рівноприскорено разом з паровозом. У відповідності з принципом Даламбера для виконання законів Ньютона в НСВ до води слід додатково прикласти силу інерції $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}$. В даному випадку на воду діяла з боку бака сила реакції $\vec{N}$, перпендикулярна поверхні води. Оскільки в НСВ вода і бак нерухомі, то в ній стан води може бути описаний законами статики: рівнодійна всіх сил дорівнює нулю

$$\vec{P} + \vec{F}_{ін} + \vec{N} = 0.$$

Вибираємо осі: Ox – горизонтальну і Oy – вертикальну. Записуємо рівняння в проекціях на вісь Ox:

$$ma - N\,sin\varphi = 0,$$

на вісь Oy:

$$N\,cos\varphi - mg = 0.$$

З отриманих рівнянь маємо:

$$tg\varphi = \frac{a}{g} = \frac{\Delta l}{l};\ \Delta l = l\frac{a}{g};\ \Delta l = 0{,}204 \text{ м}.$$

Відповідь: $\Delta l = 0{,}204$ м.

Задача 3. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху S від часу t задається рівнянням $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C = 5$ м/с^2 і $D = 1$ м/с^3. Знайти силу, діючу в кінці першої секунди руху.

Дані: $m = 0{,}5$ кг, $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, $C = 5$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3.

Знайти: F.

Аналіз і розв'язання

Згідно з другим законом Ньютона,

$$F = ma\,.$$

Відомо, що

$$a = d\upsilon / dt\,.$$

У нашому випадку

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2\,.$$

Таким чином,

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 3C - 6Dt\,.$$

Тоді

$$F = ma = m(2C - 6Dt) = 2\ \text{Н}\,.$$

Відповідь: $F = 2$ Н.

Задача 4. Парашутист масою $m = 100$ кг виконує затяжний стрибок з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 0$ (рис. 2.3). Знайти закон зміни його швидкості від часу до розкриття парашута та закон руху парашутиста. Взяти до уваги, що сила опору повітря пропорційна швидкості руху парашутиста: $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$, де $k = 20$ кг/с.

Дані: $m = 100$ кг, $\upsilon_0 = 0$, $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$, $k = 20$ кг/с.

Знайти: $\upsilon(t)$, $y(t)$.

Аналіз та розв'язання

У даній задачі слід знайти один з кінематичних параметрів руху тіла – його швидкість як функцію часу. Це основна задача динаміки, яка означає, що можна застосувати другий закон Ньютона. Початок координат інерціальної системи відліку розташовано у точці O (рис. 2.3), з якої починається рух парашутиста. Вісь Oy спрямовано вертикально вниз.

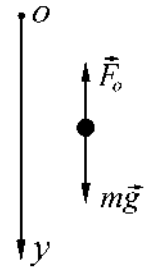


Рисунок 2.3

На парашутиста діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{F}_0 = -k\vec{\upsilon}$. Тоді другий закон у цьому випадку має вигляд

$$m\vec{g} + \vec{F}_0 = m\vec{a}\,.$$

Його можливо подати у вигляді диференціального рівняння для невідомої функції $\upsilon(t)$

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon\,.$$

Розділивши змінні, знайдемо:

$$-\frac{d\upsilon}{\frac{mg}{k}-\upsilon}=-\frac{k}{m}dt,$$

$$\frac{d\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)}{\frac{mg}{k}-\upsilon}=-\frac{k}{m}dt.$$

Після інтегрування одержуємо:

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+C. \qquad (2.5)$$

Довільну сталу C визначаємо з початкових умов ($\upsilon=\upsilon_0=0$ при $t=0$):

$$C=\ln\frac{mg}{k}.$$

Підставляючи значення сталої C в рівняння (2.5), знаходимо закон зміни швидкості парашутиста

$$\ln\left(\frac{mg}{k}-\upsilon\right)=-\frac{k}{m}t+\ln\frac{mg}{k},$$

$$\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

З цього рівняння виходить, що при $t\to\infty$ швидкість прагне до свого максимального значення $\upsilon=\frac{mg}{k}$, яке дорівнює 50 м/с.

Якщо закон зміни швидкості відомий, то розв'язуючи зворотну задачу кінематики, можна знайти закон руху парашутиста:

$$dy=\upsilon(t)\,dt;$$

$$y(t)=\int_0^t\upsilon(t)dt;$$

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Відповідь: $\upsilon(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$,

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

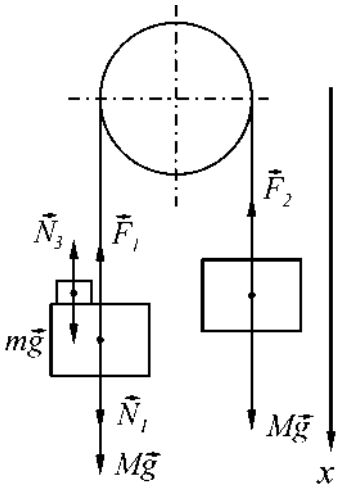


Рисунок 2.4

$M=1{,}4$ кг (рис. 2.4). На один з вантажів покладений

$m = 0{,}2$ кг. Вважаючи, що вантажі спочатку перебували на одному рівні та нехтуючи тертям, визначити різницю висот Δh, на яких перебуватимуть вантажі через проміжок часу $t = 1$ с.

Дані: $M = 1{,}4$ кг, $m = 0{,}2$ кг, $t = 1$ с.

Знайти: Δh.

Аналіз і розв'язання

На кожен з вантажів діють: сила тяжіння $M\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}$ (внаслідок невагомості нитки сили натягу однакові), на другий вантаж діє також сила тиску з боку перевантаження $\vec{N}_1$. На додатковий тягарець діє сила тяжіння mg і сила тиску $\vec{N}_3$ з боку вантажу ($\left|\vec{N}_3\right| = \left|\vec{N}_1\right|$ згідно з третім законом Ньютона). Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення обох тіл (і додаткового тягарця) однакові.

Другий закон Ньютона для кожного з тіл у векторній формі:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_1;$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_2;$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_3.$$

Ці рівняння в проекції на обрану вісь (рис. 2.4) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - F \\ -Ma = Mg - F \\ ma = mg - N \end{cases},$$

(урахували, що $F_1 = F_2 = F$ та $N_1 = N_3 = N$), звідки знайдемо прискорення

$$a = \frac{m}{2M + m} g. \qquad (2.6)$$

За час t кожний з вантажів пройде відстань $h = \frac{at^2}{2}$, тому, з огляду на вираз (2.6), шукана різниця висот

$$\Delta h = 2h = \frac{m}{2M + m} gt^2 = 65{,}4 \text{ см}.$$

Відповідь: $\Delta h = 65{,}4$ см.

2.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Під дією сталої сили $F = 5$ Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t описується рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$. Визначити масу m тіла, якщо $C = 2$ м/с^2.

Відповідь: $m = 2{,}5$ кг.

Задача 2. По опуклому мосту радіусом $R = 72$ м рухається автомобіль. Визначте швидкість υ автомобіля, якщо у верхній точці траєкторії сила його тиску на міст у $n = 1,6$ разу менше, ніж під час руху по горизонтальній ділянці шляху.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{gR(n-1)} = 20,6$ м/с.

Задача 3. Через блок, укріплений на вершині двох похилих площин, що становлять із обрієм кути $\alpha = 28°$ та $\beta = 40°$, перекинута нитка, до якої прикріплені вантажі з однаковими масами (рис. 2.5). Вважаючи нитку і блок невагомими та нехтуючи тертям, визначте прискорення a вантажів.

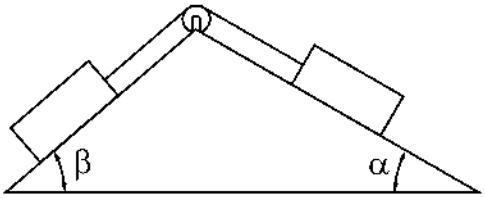


Рисунок 2.5

Відповідь: $a = g\left(\dfrac{\sin\beta - \sin\alpha}{2}\right) = 0,849$ м/с^2.

Задача 4. Якої маси баласт необхідно скинути з аеростата, який рівномірно спускається, щоб він почав рівномірно підійматися з тією самою швидкістю? Маса аеростата з баластом 1600 кг, підйомна сила аеростата $F = 12000$ Н. Вважати силу опору повітря однією і тією самою при підйому і спуску.

Відповідь: $m = 800$ кг.

Задача 5. На гладкому столі лежить брусок масою $m = 4$ кг. До бруска прив'язані два шнури, прикріплені до протилежних країв стола. До кінців шнурів підвішені гирі, маси яких $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення a, з яким рухається брусок, і силу натягу T кожного з шнурів. Масою блоків і тертям знехтувати.

Відповідь: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m} = 1,40$ м/с^2, $T_1 = m_1(g + a) = 11,2$ Н,

$T_2 = m_2(g - a) = 16,8$ Н.

Задача 6. Похила площа, яка утворює кут $\alpha = 25°$ з площиною горизонту, має довжину $l = 2$ *м*. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зслизнуло з цієї площини за час $t = 2$ *с*. Визначити коефіцієнт тертя μ тіла з площиною.

Відповідь: $\mu = tg\alpha - \dfrac{2l}{gt^2\cos\alpha} = 0,35$.

Задача 7. Матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухається під дією деякої сили F згідно з рівнянням $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C = 1$ м/с^2, $D = -0,2$ м/с^3. Знайти значення цієї сили в момент часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с. В який момент часу сила дорівнює нулю?

Відповідь: $F_1 = -0,8$ Н, $F_2 = -8$ Н, $F = 0$ при $t = 1,67$ с.

Задача 8. Поїзд маси $m = 500$ т після припинення тяги паровоза зупиняється під дією сили тертя $F_{тер} = 0,1$ МН через час $t = 1$ хв. З якою швидкістю υ їхав поїзд до моменту припинення тяги паровоза?

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{t \cdot F_{тер}}{m} \approx 43$ км/год.

Задача 9. Сталевий дріт витримує силу натягу 4400 Н. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати вантаж масою 400 кг, підвішений на цьому дроті, щоб він при цьому не розірвався? Масою дроту знехтувати.

Відповідь: $a = 1{,}2$ м/с^2.

Задача 10. Маса ліфта з пасажирами дорівнює 800 кг. Знайти, з яким прискоренням і в якому напрямі рухається ліфт, якщо відомо, що натяг тросу, який підтримує ліфт, дорівнює: 1) 12 кН; 2) 6 кН.

Відповідь: 1) $a_1 = 5{,}2$ м/с^2, догори; 2) $a_2 = 2{,}3$ м/с^2, донизу.

Задача 11. Під дією постійної сили $F = 10$ Н тіло рухається прямолінійно так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу дається рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$. Знайти масу тіла, якщо стала $C = 1$ м/с^2.

Відповідь: $m = 5$ кг.

Задача 12. Тіло масою m рівноприскорено піднімають на тросі вгору протягом $t = 3$ с на висоту $h = 10$ м. Визначте коефіцієнт пружності k троса, якщо його подовження $\Delta x = 0{,}3$ м.

Відповідь $k = \dfrac{m}{\Delta x}\left(g + \dfrac{2h}{t^2}\right) = 4$ кН/м.

Задача 13. Кулька масою m = 250 г, що летить зі швидкістю $\upsilon = 3{,}4$ м/с під кутом $\alpha = 25°$ до обрію, пружно вдаряється об гладку стіну. Визначте імпульс p, отриманий стіною внаслідок удару.

Відповідь: $p = 1{,}54$ Н · с.

Задача 14. Тіло масою $m = 1{,}2$ кг кинуто з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 12$ м/с під кутом $\alpha = 36°$ до обрію. Нехтуючи опором повітря, визначте зміну імпульсу Δp тіла за час його руху.

Відповідь: $\Delta p = -16{,}9$ Н · с.

Задача 15. Тіло перебуває в рівновазі на похилій площині довжиною $l = 16$ м з кутом $\alpha = 28°$ до обрію. Визначте час, за який тіло зісковзне із площини, якщо кут нахилу збільшити до $\beta = 40°$.

Відповідь: $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g\left(\sin\beta - \cos\beta tg\alpha\right)}} = 3{,}26$ с.

Задача 16. Тіло масою $m = 5$ кг кинуто під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с^2. Нехтуючи опором повітря, знайти імпульс сили $\vec{F}$, діючої на тіло за час його польоту; зміну Δp імпульсу за час польоту.

Відповідь: $F\Delta t = 100$ Н · с; $\Delta p = 100$ Н · с.

Задача 17. З якою силою F потрібно діяти на тіло маси $m = 5$ кг, щоб воно падало вертикально внизу із прискоренням $a = 15$ м/с^2?

Відповідь: $F = m(a - g) \approx 26$ Н.

Задача 18. Брусок масою $m_2 = 5$ кг може вільно ковзати по горизонтальній поверхні без тертя. На ньому знаходиться другий брусок масою $m_1 = 1$ кг. Коефіцієнт тертя зітнутих поверхонь брусків $\mu = 0{,}3$. Визначити мінімальне значення сили $F_{\min}$, прикладеної до нижнього бруска, при якій почнеться зсовування верхнього бруска.

Відповідь: $F_{\min} = \mu(m_1 + m_2)g = 17{,}7$ Н.

Задача 19. Паровоз на горизонтальній ділянці шляху, що має довжину $s = 600$ м, розвиває силу тяги $F = 147$ кН. Швидкість поїзда маси $m = 1000$ т зростає при цьому від $\upsilon_0 = 36$ км/год до $\upsilon = 54$ км/год. Знайти силу опору F_{on} руху поїзда, вважаючи її постійною.

Відповідь: $F_{on} = F - ma = F - m(\upsilon^2 - \upsilon_0^2)/2s \approx 4{,}3$ кН.

Задача 20. Дріт витримує вантаж маси $m_{\max} = 450$ кг. З яким максимальним прискоренням можна піднімати вантаж маси $m = 400$ кг, підвішений на цьому дроті, щоб він не обірвався?

Відповідь: $a \le g\left(\frac{m_{\max}}{m} - 1\right) \approx 1{,}2$ м/с^2.

Задача 21. Дві гирі масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою і перекинуті через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі та натяг нитки. Тертям у блоці знехтувати.

Відповідь: $a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 3{,}27$ м/с^2; $T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 13{,}0$ Н.

Задача 22. Літак летить у горизонтальному напрямі з прискоренням $a = 20$ м/с^2. Яке перевантаження пасажира літака (перевантаженням називається відношення сили F, діючої на пасажира, до сили тяжіння P)?

Відповідь: $F / P = 2{,}27$.

Задача 23. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Яке прискорення *a* в горизонтальному напрямку слід надати дошці, щоб вантаж зісковзнув з неї? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою $\mu = 0{,}2$.

Відповідь: $a > \mu g = 1{,}96$ м/с^2.

Задача 24. Початкова швидкість υ_0 кулі дорівнює 800 м/с. Під час руху в повітрі за час $t = 0{,}8$ с її швидкість зменшилася до $\upsilon = 200$ м/с. Маса кулі дорівнює 10 г. Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості, визначити коефіцієнт опору k. Дією сили тяжіння знехтувати.

Відповідь: $k = \frac{m}{t} \cdot \frac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0 \upsilon} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ кг/м.

Задача 25. Знайти прискорення a тіла, що зісковзує з похилої площини, що утворює із обрієм кут $\alpha = 30°$. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0{,}3$.

Відповідь: $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 2{,}45$ м/с^2.

Задача 26. На тіло маси m, яке лежало на гладенькій горизонтальній площині, в момент $t = 0$ почала діяти сила, яка залежить від часу $F = kt$, де k – стала. Напрямок цієї сили весь час складає кут α з горизонтом. Знайти швидкість тіла в момент відриву від площини; шлях, пройдений тілом до цього моменту.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$, $S = \dfrac{m^2g^3 cos\,\alpha}{6k^2 sin^3\alpha}$.

Задача 27. Куля, пробивши дошку довжиною h, змінила свою швидкість від υ_0 до υ. Знайти час руху кулі у дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості.

Відповідь: $t = \dfrac{h(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon_0\upsilon\ln(\upsilon_0/\upsilon)}$.

Задача 28. Куля на нитці підвішена до стелі вагона. Вагон гальмується, і його швидкість за час $t = 3$ с рівномірно зменшується від $\upsilon_1 = 18$ км/год до $\upsilon_2 = 6$ км/год. На який кут α відхилиться при цьому нитка з кулею?

Відповідь: $\alpha = 6°30'$.

Задача 29. На горизонтальній поверхні знаходиться брусок масою $m_1 = 2$ кг. Коефіцієнт тертя μ_1 бруска з поверхнею дорівнює $0{,}2$. На бруску знаходиться другий брусок масою $m_2 = 8$ кг. Коефіцієнт тертя μ_2 верхнього бруска з нижнім дорівнює $0{,}3$. До верхнього бруска прикладена сила F. Визначити значення сили F_1, при якому почнеться спільне ковзання брусків по поверхні; значення сили F_2, при якому верхній брусок почне ковзати відносно нижнього.

Відповідь: $F_1 = \mu_1(m_1 + m_2)g = 19{,}6$ Н; $F_2 = (\mu_2 - \mu_1)\dfrac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)g = 39{,}2$ Н.

Задача 30. Тіло сповзає спочатку з похилої площини, яка складає кут $\alpha = 8°$ з горизонтом, а потім по горизонтальній поверхні. Знайти, чому дорівнює коефіцієнт тертя, якщо тіло проходить по горизонталі таку саму відстань, як і по похилій площині.

Відповідь: $\mu = 0{,}07$.

3 РОБОТА, ЕНЕРГІЯ, ПОТУЖНІСТЬ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

3.1 Мета заняття

Визначення енергетичних характеристик: роботи консервативних і неконсервативних сил, механічної енергії, потужності. Ознайомитись з законами збереження імпульсу та енергії, навчитись застосовувати ці закони до розв'язування задач.

3.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Користуючись конспектом лекцій та підручником [1, розд. 3; 2, розд. 3; 5, §2, 3], вивчити закони збереження. Проаналізувавши розв'язання завдань, наведених як приклади, перейти до самостійної роботи над рекомендованими завданнями.

3.3 Основні закони та формули

1. Елементарна робота сталої сили $\vec{F}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha dS = F_s dS,$$

де $d\vec{r}$ – вектор елементарного переміщення; α – кут між векторами $\vec{F}$ та $d\vec{r}$; $dS = |d\vec{r}|$ – елементарний шлях; F_s – проекція вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

2. Робота змінної сили на шляху S:

$$A = \int_S \vec{F}d\vec{r} = \int_S F_s dS = \int_S F\cos\alpha dS.$$

3. Робота змінної сили на шляху від точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}.$$

4. Середня потужність за проміжок часу Δt:

$$< N >= \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

5. Потужність (миттєва потужність):

$$N = \frac{dA}{dt};\ N = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha,$$

де $\vec{\upsilon}$ – вектор швидкості, з якою рухається точка прикладення сили $\vec{F}$; α – кут між векторами $\vec{F}$ та $\vec{\upsilon}$.

6. Кінетична енергія тіла, що рухається:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

де m – маса тіла; υ – його швидкість.

7. Зв'язок між силою, що діє на тіло в даній точці поля, і потенційною енергією частинки:

$$\vec{F} = -\text{grad}U \text{, або } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей.

8. Потенційна енергія тіла, піднятого над поверхнею Землі на висоту *h*,

$$U = mgh,$$

де *g* – прискорення вільного падіння.

9. Сила пружності:

$$F = -kx,$$

де *x* – абсолютна деформація; *k* – коефіцієнт жорсткості.

10. Потенційна енергія пружнодеформованого тіла:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

де *k* – коефіцієнт пружності (у випадку пружини – коефіцієнт жорсткості).

11. Закон збереження механічної енергії (для консервативної системи):

$$T + U = E = const,$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mgh = const \\ \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = const \end{cases}$$

де T і U – відповідно кінетична та потенційна енергії тіла.

12. Швидкість двох тіл масами m_1 та m_2 після прямого абсолютно пружного центрального удару:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \qquad \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Передбачається, що при прямому центральному ударі вектори швидкостей куль до $(\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2)$ й після $(\vec{\upsilon}_1', \vec{\upsilon}_2')$ удару лежать на прямій, що з'єднує їхні центри. Проекції векторів швидкості на цю пряму дорівнюють модулям швидкостей.

13. Швидкість руху тіл після абсолютно непружного центрального удару:

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

14. Зміна кінетичної енергії тіл при абсолютно непружному центральному ударі (різниця кінетичної енергії тіл до та після удару):

$$\Delta T = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_1\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

15. Закон збереження імпульсу для замкнутої системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = const\,,$$

де n – число матеріальних точок (або тіл), що входять у систему; m_i – маса i-ої матеріальної точки (тіла); υ_i – швидкість i-ої точки (тіла).

3.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке робота сили?
2. Що таке кінетична енергія? Наведіть приклади.
3. Що таке потенційна енергія? Наведіть приклади.
4. Як пов'язана робота сили тяжіння з потенційною енергією?
5. Як потенційна енергія пов'язана з силою?
6. Доведіть, що робота рівнодійної сил, прикладених до тіла, дорівнює приросту кінетичної енергії.
7. Чому дорівнює середня потужність, миттєва потужність?
8. Як миттєва потужність пов'язана із силою та швидкістю руху?
9. Запишіть закон збереження імпульсу.
10. Запишіть закон збереження механічної енергії.
11. Запишіть закон збереження моменту імпульсу.
12. Як пов’язана робота із зміною кінетичної енергії матеріальної точки?
13. Як пов’язана робота із зміною потенціальної енергії матеріальної точки?
14. Яка взаємодія тіл називається абсолютно пружним ударом?
15. Яка взаємодія тіл називається непружним ударом?
16. Які закони збереження виконуються та не виконуються при абсолютно пружному та абсолютно непружному ударах?
17. Які закони збереження виконуються та не виконуються при частково пружному ударі?

3.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Матеріальна точка масою $m = 0{,}1$ кг рухається рівномірно і прямолінійно з швидкістю $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с. У момент часу $t_0 = 0$ на неї почала діяти сила $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н. Ця сила діяла протягом $t_1 = 2$ с. Визначити роботу сили $\vec{F}$ та зміну кінетичної енергії за 2 с.

Дані: $m = 0{,}1$ кг, $\vec{\upsilon}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ м/с, $\vec{F} = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ Н, $t_0 = 0$; $t_1 = 2$ с.

Знайти: A, ΔT.

Аналіз і розв'язання

Відомо, що робота сили $\vec{F}$ дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = \Delta T = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2}.$$

Швидкість тіла $\vec{\upsilon}_1$ у момент часу t_1 можна знайти із основного рівняння динаміки

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt};$$

$$d\vec{\upsilon} = \frac{1}{m}\vec{F}dt;$$

$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0 = \frac{1}{m}\int_0^{t_1}\vec{F}dt;$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{F}t_1}{m} + \vec{\upsilon}_0.$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{6\vec{i} + 4\vec{j}}{0{,}1} + 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = 65\vec{i} + 44\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Тоді робота сили $\vec{F}$ і зміна кінетичної енергії дорівнюють

$$A = \Delta T = \frac{m}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2) = \frac{0{,}1}{2}(65^2 + 44^2 + 3^2 - 5^2 - 4^2 - 3^2) = 306 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A = \Delta T = 306$ Дж.

Задача 2. Куля, рухаючись із швидкістю $\upsilon_0 = 900$ м/с, пробиває стінку товщиною 50 см і вилітає з неї зі швидкістю $\upsilon = 350$ м/с. Знайти час руху кулі у стінці, вважаючи опір стінки пропорційним кубу швидкості руху кулі.

Дані: $\upsilon_0 = 900$ м/с, $\upsilon = 350$ м/с, $d = 0{,}5$ м, $F = -k\upsilon^3$.

Знайти: t.

Аналіз і розв'язання

Під час руху кулі у стінці на неї діє тільки сила опору. Використовуючи основний закон динаміки поступального руху, можемо записати рівняння

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^3.$$

Розділивши змінні у цьому диференціальному рівнянні, одержуємо

$$\frac{md\upsilon}{\upsilon^3} = -kdt.$$

Інтегруючи одержане рівняння, знаходимо

$$m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^3}=-k\int_0^t dt\,;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\upsilon_0^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\right)=-kt\,;$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\upsilon_0^2-\upsilon^2}{\upsilon_0^2\upsilon^2}\right)=kt\,. \qquad (3.1)$$

Робота сили опору при переміщенні кулі на $d\vec{r}$ дорівнює

$$dA=\vec{F}d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\vec{\upsilon}dt=m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}\,.$$

Враховуючи напрямок векторів, одержуємо рівняння

$$-k\upsilon^3dr=m\upsilon d\upsilon\,. \qquad (3.2)$$

Розділивши змінні у рівнянні (3.2) та інтегруючи, знайдемо

$$-k\int_0^d dr=m\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2};\ -kd=m\left(-\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon_0}\right); \qquad (3.3)$$

$$m\frac{\upsilon_0-\upsilon}{\upsilon_0\upsilon}=kd\,.$$

Якщо розділити рівняння (3.1) на рівняння (3.3), знайдемо

$$t=\frac{(\upsilon_0+\upsilon)d}{2\upsilon_0\cdot\upsilon}=1{,}0\cdot10^{-3}\ \text{с}\,.$$

Відповідь: $t=10^{-3}$ с.

Задача 3. Тіло масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти середню потужність, яку розвиває сила тяжіння за весь час руху тіла; миттєву потужність цієї сили як функцію часу; потужність у верхній точці траєкторії; роботу сили тяжіння за t секунд руху. Опором повітря знехтувати.

Дані: α, υ_0, m.

Знайти: $<N>$, $N(t)$, N_b, $A(t)$.

Аналіз і розв'язання

Знайдемо миттєве значення потужності сили тяжіння, використовуючи формулу

$$N(t)=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}\,.$$

Рух тіла – рівноприскорений, тому $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{g}t$. Враховуючи напрям векторів (рис. 3.1), знайдемо

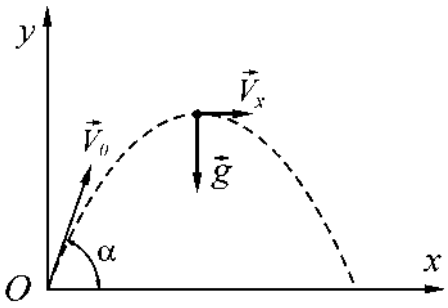


Рисунок 3.1

$$N(t) = m\vec{g} \cdot \vec{\upsilon} = m\vec{g}(\vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t) =$$

$$= mg\upsilon_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + mg^2 t = .$$

$$= mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$$

У вершині траєкторії кут між векторами $\vec{g}$ та $\vec{\upsilon}$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тому

$$N_b = m\vec{g} \cdot \vec{\upsilon} = 0.$$

Середня потужність сили тяжіння за весь час руху дорівнює

$$< N >= \frac{A}{t},$$

де A – робота сили тяжіння; t – час руху.

Початкова та кінцева точки траєкторії знаходяться на однаковій висоті, тому $A = 0$, $< N >= 0$.

Із формули $P = \frac{dA}{dt}$ знаходимо силу тяжіння за час t:

$$A(t) = \int_0^t P dt = \int_0^t mg(gt - \upsilon_0 \sin\ \alpha)dt = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin\ \alpha\right).$$

Відповідь: $< N >= 0$, $N_b = 0$, $N(t) = mg(gt - \upsilon_0 \sin\alpha)$,

$$A(t) = mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t \sin\ \alpha\right).$$

Задача 4. Куля масою m_1, яка рухалась горизонтально з швидкістю υ_1, зіткнулась з нерухомою кулею масою m_2. Кулі абсолютно пружні, зіткнення пряме. Яку долю w своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дані: m_1, υ_1, m_2, $\upsilon_2 = 0$.

Знайти: w.

Аналіз і розв'язання

Доля енергії, переданої першою кулею другій:

$$w = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2},$$

де T_1 – кінетична енергія першої кулі до удару; T_2' – кінетична енергія другої кулі після удару; υ_1 – швидкість першої кулі до удару; u_2 – швидкість другої кулі після удару.

Для визначення w слід знайти u_2. Скористаємось тим, що при абсолютно пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії. Враховуючи, що друга куля до зіткнення була нерухомою, запишемо ці закони:

$$m_1\upsilon_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$
$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

де u_1 – швидкість першої кулі після удару.

Розв'язавши рівняння, одержимо

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.4)$$

Підставивши значення u_2 у рівняння (3.4), одержимо

$$w = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{2m_1\upsilon_1}{\upsilon_1\left(m_1 + m_2\right)}\right)^2 = \frac{4m_1m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}.$$

Відповідь: $w = \dfrac{4m_1m_2}{\left(m_1 + m_2\right)^2}$.

Задача 5. Ящик масою $m_1 = 20\,\text{кг}$ зісковзує по ідеально гладкому лотку довжиною $l = 2\,\text{м}$ у нерухомий візок з піском і застряє в ньому. Візок з піском масою $m_2 = 20\,\text{кг}$ може вільно (без тертя) переміщатися по рейках у горизонтальному напрямку. Визначити швидкість u візка з ящиком, якщо лоток нахилений під кутом $\alpha = 30°$ до рейок.

Дані: $m_1 = 20\,\text{кг}$, $l = 2\,\text{м}$, $m_2 = 20\,\text{кг}$, $\alpha = 30°$.

Знайти: u.

Аналіз і розв'язання

Візок і ящик можна розглядати як систему двох взаємодіючих тіл. Але ця система незамкнена, тому що на неї діють зовнішні сили: тяжіння m_1g і m_2g та реакції опори N_2 (рис. 3.2). Тому застосувати закон збереження імпульсу до системи "ящик-візок" не можна. Оскільки проекції зазначених сил на напрямок осі x, що збігається з напрямком рейок, дорівнюють нулю, то проекцію імпульсу системи на цей напрямок можна вважати сталою, тобто

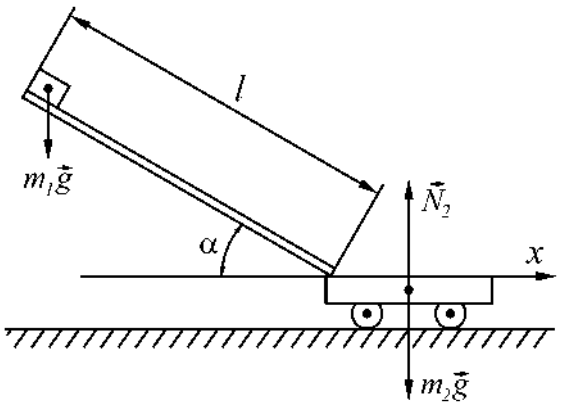


Рисунок 3.2

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \qquad (3.5)$$

де p_{1x} і p_{2x} – проекції імпульсу ящика та візка з піском у момент падіння ящика на візок; p'_{1x} і p'_{2x} – ті самі величини після падіння ящика.

Розглядаючи тіла системи як матеріальні точки, виразимо в рівнянні (3.5) імпульси тіл через їхні маси і швидкості, з огляду на те, що $p_{2x} = 0$

взаємодії з ящиком не рухався), а також що після взаємодії обидва тіла системи рухаються з однією й тією самою швидкістю u:

$$m_1\upsilon_{1x} = (m_1 + m_2)u,$$

або

$$m_1\upsilon_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2)u,$$

де υ_1 – модуль швидкості ящика перед падінням на візок; $\upsilon_{1x} = \upsilon_1 \cos\alpha$ – проекція цієї швидкості на вісь x.

Звідси

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (3.6)$$

Модуль швидкості υ_1 визначимо із закону збереження енергії:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2,$$

де $h = l\sin\alpha$, звідки $\upsilon_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}$.

Підставивши вираз у формулу (3.6), одержимо:

$$u = \frac{m_1\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Після обчислення знайдемо:

$$u = \frac{20\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot \sin 30}}{20 + 80}\cos 30° \text{ м/с} = 0{,}767 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $u = 0{,}767$ м/с.

Задача 6. Куля, що летить горизонтально, потрапляє в тіло, що висить на легкому твердому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше маси тіла. Відстань від точки підвісу стрижня до центра 1 м. Знайти швидкість кулі, якщо відомо, що стрижень із тілом відхилився від удару кулі на кут 10°.

Дані: $m_2 = 1000m_1$, $l = 1$ м; $\alpha = 10° \approx 0{,}17$ рад.

Знайти: υ.

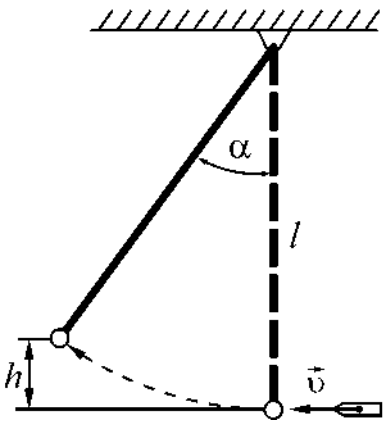


Рисунок 3.3

Аналіз і розв'язання

Запишемо закон збереження імпульсу для непружного удару в проекції на вісь X (рис. 3.3):

$$m_2\upsilon = (m_1 + m_2)u,$$

звідки

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1}u. \qquad (3.7)$$

Тут υ – швидкість кулі до зіткнення; u – швидкість кулі і тіла після їхнього зіткнення. У виразі (3.7) крім υ невідома ще швидкість u, яку можна знайти за законом збереження енергії.

Нехай внаслідок зіткнення з тілом центр маси тіла піднявся на висоту h, тоді, за законом збереження енергії,

$$\left(m_1 + m_2\right)u^2 / 2 = \left(m_1 + m_2\right)gh,$$

звідки

$$u^2 = 2gh. \tag{3.8}$$

З рис. 3.3 маємо $h = l - l\cos\alpha = l\left(1 - \cos\alpha\right)$. Підставимо вираз для h у рівняння (3.8):

$$u^2 = 2gl\left(1 - \cos\alpha\right),$$

звідки

$$u = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)}.$$

Тоді рівняння (3.7) можна привести до виду

$$\upsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)}. \tag{3.9}$$

Використовуючи тригонометричне рівняння $\sin\left(\alpha / 2\right) = \sqrt{\left(1 - \cos\alpha\right) / 2}$, перетворимо вираз (3.9):

$$\upsilon = 2\frac{m_1 + m_2}{m_1}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl} \approx 570 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon \approx 570$ м/с.

3.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Куля масою $m_1 = 6$ кг налетіла на іншу кулю $m_2 = 4$ кг, яка перебувала у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив 5 кг$\cdot$м/с. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну імпульсу першої кулі.

Відповідь: $\Delta p = 2$ кг$\cdot$м/с.

Задача 2. У човні масою $m_1 = 240$ кг стоїть людина масою $m_2 = 60$ кг. Човен пливе зі швидкістю $\upsilon_1 = 2$ м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі з швидкістю $\upsilon = 4$ м/с (відносно човна). Знайти швидкість u човна після стрибка людини, розглянувши два випадки: людина стрибає вперед за рухом човна; в напрямі, протилежному напряму руху човна.

Відповідь: $u_1 = 1$ м/с, $u_2 = 3$ м/с.

Задача 3. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15$ т. Гармата стріляє вгору під кутом $\varphi = 60°$ до горизонту в напрямку руху. З якою швидкістю υ_1 рухатиметься платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20$ кг і він вилетів зі швидкістю $\upsilon_2 = 600$ м/с.

Відповідь: $\upsilon_1 = 0,4$ м/с.

Задача 4. Куля масою $m = 10$ г, яка летіла зі швидкістю $\upsilon = 600$ м/с, влучила в балістичний маятник масою $M = 5$ кг і застряла в ньому. На яку висоту h після удару піднявся маятник?

Відповідь: $h = 7,34$ см.

Задача 5. Куля масою $m_1 = 6$ кг налетіла на другу кулю $m_2 = 4$ кг, яка знаходилась у стані спокою. Імпульс p_1 першої кулі до удару становив 5 кг$\cdot$м/с. Удар куль прямий, непружній. Визначити зміну ΔU внутрішньої енергії куль.

Відповідь: $\Delta U = 0,83$ Дж.

Задача 6. Ковзаняр, розігнавшись до швидкості $\upsilon = 21$ км/год, в'їжджає на гірку з ухилом $\alpha = 20°$ на висоту $h = 1,6$ м. Визначте коефіцієнт тертя μ ковзанів об лід.

Відповідь: $\mu = 0,03$.

Задача 7. Санчата, що рухаються по льоду зі швидкості $\upsilon = 11$ км/год, в'їжджають на гірку з ухилом $\alpha = 10°$ на висоту $h = 2,5$ м. Визначте коефіцієнт тертя μ санчат об лід.

Відповідь: $\mu = 0,02$.

Задача 8. Потужність N двигунів літака при відриві від Землі дорівнює 820 кВт. Маса літака – $m = 5,2$ т. Розганяючись рівноприскорено, літак досягає швидкості $\upsilon = 32$ м/с. Вважаючи, що коефіцієнт опору $\mu = 0,04$ не залежить від швидкості, визначте довжину пробігу S літака перед зльотом.

Відповідь: $S = 113$ м.

Задача 9. Тіло масою $0,5$ *êã* ковзає з гірки, довжина якої дорівнює $l = 2$ *ì*, а висота $h = 1$ *ì*. Після того, як тіло з'їхало до підніжжя гірки, з'ясувалося, що воно виконало роботу $A = 4,4$ *Äæ*. Визначити коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею гірки.

Відповідь: $\mu = 0,05$.

Задача 10. Кулька масою $m_1 = 16$ г, що рухається горизонтально, зіштовхнулася з кулею масою $m_2 = 0,8$ кг, що висить на прямому невагомому стрижні довжиною $l = 1,7$ м. Вважаючи удар пружним, визначте швидкість кульки υ_1, якщо кут відхилення стрижня після удару $\alpha = 20°$.

Відповідь: $\upsilon_1 = 36,2$ м/с.

Задача 11. Куля, що рухається зі швидкістю υ_1, налітає на нерухому кулю, маса якого в $n = 1,5$ рази більше першої. Визначте відношення швидкості υ_1' першої кулі й швидкості υ_2' другої кулі після удару. Удар вважати пружним, центральним і прямим.

Відповідь: $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'} = \frac{n-1}{2} = 0{,}25$.

Задача 12. Падаючи вертикально, кулька маси $m = 200$ г вдарилася об підлогу зі швидкістю $\upsilon = 5$ м/с і підстрибнула на висоту $h = 46$ см. Знайти зміну Δp імпульсу кульки під час удару.

Відповідь: $\Delta p = m\left(\upsilon + \sqrt{2gh}\right) = 1{,}6$ кг · м/с.

Задача 13. Гармата, що стоїть на гладкій горизонтальній площадці, стріляє під кутом $\alpha = 30°$ до обрію. Маса снаряда $m = 20$ кг, його початкова швидкість $\upsilon = 200$ м/с. Яку швидкість u здобуває гармата при пострілі, якщо її маса $M = 500$ кг?

Відповідь: $u = -\left(m\upsilon\cos\alpha\right)/M = -7$ м/с.

Задача 14. Снаряд масою $m = 20$ кг, що летить зі швидкістю $\upsilon = 800$ м/с під кутом $\alpha = 30°$ до вертикалі, потрапляє у платформу з піском і застряє в ній. Знайти швидкість платформи u після влучення снаряда, якщо її маса $M = 16$ т.

Відповідь: $u = m\upsilon\cos\alpha/\left(m+M\right) \approx 1{,}25$ м/с.

Задача 15. Матеріальна точка масою $m = 1$ кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі x, відповідно до рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = 2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Визначте потужність N, що затрачується на рух точки, за час $t = 2$ с.

Відповідь: $N = 0{,}16$ Вт.

Задача 16. Сила $F = 0{,}5$ Н діє на тіло маси $m = 10$ кг протягом часу $t = 2$ с. Знайти кінцеву кінетичну енергію тіла T, якщо початкова кінетична енергія дорівнює нулю.

Відповідь: $T = \left(Ft\right)^2/m = 0{,}05$ Дж.

Задача 17. З вежі висотою $h = 62$ м горизонтально зі швидкістю $\upsilon_0 = 12$ м/с кинули камінь масою $m = 120$ г. Нехтуючи опором повітря, визначте кінетичну T та потенціальну U енергії каменя через час $t = 3\,c$ після кидка.

Відповідь: $T = \frac{m}{2}\left(\upsilon_0{}^2 + g^2t^2\right) = 60{,}6$ Дж; $U = mg\left(h + \frac{gt^2}{2}\right) = 21$ Дж.

Задача 18. Визначити роботу, що виконується на шляху $s = 12$ м силою, яка рівномірно зростає від $F_1 = 10$ Н до $F_2 = 26$ Н.

Відповідь: $A = 216$ Äæ.

Задача 19. Куля масою $m = 10$ г летить зі швидкістю $\upsilon = 800$ м/с, обертаючись навколо горизонтальної осі з частотою $n = 3000$ с$^{-1}$. Прийнявши кулю за циліндрик діаметром $d = 8$ мм, визначити повну кінетичну енергію T кулі.

Відповідь: $T = 3{,}21$ кДж.

Задача 20. Визначити лінійну швидкість υ центра кулі, яка скотилась без просковзування з похилої площини висотою $h = 1$ м.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = 3{,}74$ м/с.

Задача 21. Скільки часу t спускатиметься без просковзування обруч з похилої площини довжиною $l = 2$ м і висотою $h = 10$ см?

Відповідь: $t = 4{,}04$ с.

Задача 22. Тонкий стрижень довжиною $l = 1$ м прикріплений до горизонтальної осі, яка проходить через його кінець. Стрижень відхилили на кут $\varphi = 60°$ від положення рівноваги і відпустили. Визначити лінійну швидкість υ нижнього кінця стрижня в момент проходження положення рівноваги.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{3\,g\,l(1 - \cos\varphi)} = 3{,}84$ ì / ñ.

Задача 23. Яку роботу виконав хлопчик, що стоїть на гладкому льоді, надавши санчатам швидкість $\upsilon = 4$ м/с відносно льоду, якщо маса санчат $m = 4$ кг, а маса хлопчика $M = 20$ кг?

Відповідь: $A = (m + M)m\upsilon^2 / 2M = 38{,}4$ Дж.

Задача 24. Важку кульку, що підвішена на нерозтяжній і невагомій нитці довжиною l, відхиляють від вертикалі на кут α і потім відпускають. Якої максимальної швидкості υ набуде кулька?

Відповідь: $\upsilon = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha / 2)$.

Задача 25. Камінь маси $m = 5$ кг впав з деякої висоти. Знайти кінетичну енергію T каменя в середній точці його шляху, якщо він падав протягом часу $t = 2$ с.

Відповідь: $T = mg^2t^2 / 4 = 480$ Дж.

Задача 26. Визначте роботу A, яку слід виконати, щоб стиснути пружину на $x = 15$ см, якщо відомо, що сила пропорційна деформації та під дією сили $F = 50$ Н пружина стискується на $x_0 = 2{,}25$ см.

Відповідь: $A = \frac{Fx^2}{2x_0} = 25$ Дж.

Задача 27. З якою швидкістю υ вилітає із пружинного пістолета кулька масою $m = 10$ г, якщо пружину було стиснуто на $x = 5$ см? Жорсткість пружини дорівнює $k = 200$ Н/м.

Відповідь: $\upsilon = 7{,}07$ м/с.

Задача 28. Сталева кулька масою $m = 50$ кг падає з висоти $h = 1{,}0$ м на горизонтальну поверхню масивної плити. Знайти сумарний імпульс, який вона передає плиті внаслідок багатократних відштовхувань, якщо при кожному ударі швидкість кульки змінюється у $\eta = 0{,}8$ разів.

Відповідь: $p = \dfrac{m\sqrt{2gh}(1+\eta)}{1-\eta} = 2\,\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 29. Дві однакові платформи рухаються одна за одною по інерції (без тертя) з однаковою швидкістю υ_0. На задній платформі знаходиться людина масою m. У якийсь момент людина стрибнула на передню платформу зі швидкістю u відносно своєї платформи. Маса кожної платформи M. Знайти швидкості, з якими рухатимуться обидві платформи після цього.

Відповідь: $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \dfrac{mM}{(m+M)^2}u$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 - \dfrac{m}{m+M}u$.

Задача 30. Яку кінетичну енергію T набуває тіло масою $m = 1$ кг під час падіння без початкової швидкості через проміжок часу $\Delta t = 5$ с після початку падіння?

Відповідь: $T = mg^2(\Delta t)^2 / 2 = 1{,}2$ кДж.

4 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

4.1 Мета заняття

Засвоїти методику розв'язання задач динаміки твердого тіла: обертання навколо нерухомої осі й складного плоского руху.

4.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Повторіть означення основних фізичних величин, які характеризують рух твердого тіла: моменту сили, моменту імпульсу, моменту інерції [1, розд. 4; 2, розд. 4; 5, §3]. Зверніть увагу на те, що плоский рух твердого тіла описують векторні рівняння: рівняння руху центра мас та основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

4.3 Основні закони та формули

1. Момент інерції матеріальної точки:

$$J = mr^2,$$

де m – маса точки; r – її відстань до осі обертання.

2. Момент інерції системи точок, тіла:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \quad J = \int r^2 dm,$$

де r_i – відстань i-ї матеріальної точки масою m_i до осі обертання.

3. Моменти інерції тіл правильної геометричної форми (тіла вважаються однорідними; m – маса тіла)

Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
Порожній тонкостінний циліндр радіусом R	Вісь симетрії	$J = mR^2$
Суцільний циліндр або диск радіусом R	Вісь симетрії	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Прямий тонкий стрижень довжиною l	Вісь перпендикулярна стрижню та проходить через його середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
	Вісь перпендикулярна стрижню та проходить через його кінець	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Куля радіусом R	Вісь проходить через центр кулі	$J = \frac{2}{5}ml^2$

4. Теорема Штейнера:

$$J = J_C + ma^2,$$

де J_C – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас; J – момент інерції відносно паралельної осі, що відстоїть від першої на відстані a; m – маса тіла.

5. Кінетична енергія обертання тіла:

$$T_{об} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – його кутова швидкість.

6. Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2,$$

де m – маса тіла; υ_C – швидкість центра мас тіла; J_C – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас; ω – кутова швидкість тіла.

7. Момент сили відносно нерухомої точки:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right],$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із цієї точки в точку додатка сили $\vec{F}$.

8. Модуль вектора моменту сили:

$$M = Fl,$$

де l – плече сили.

9. Момент сили відносно нерухомої осі:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z.$$

10. Робота при обертанні тіла:

$$dA = M_z d\varphi,$$

де $d\varphi$ – кут повороту тіла; M_z – момент сили відносно нерухомої осі z.

11. Момент імпульсу матеріальної точки A відносно нерухомої точки O:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right],$$

де $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – імпульс матеріальної точки.

12. Модуль вектора моменту імпульсу

$$L = pr\sin\alpha = m\upsilon\sin\alpha = pl,$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ та $\vec{p}$; l – плече вектора $\vec{p}$ відносно точки *O*.

13. Момент імпульсу твердого тіла відносно осі обертання

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z \omega,$$

де r_i – відстань від осі z до окремої частинки тіла; $m_i\upsilon_i$ – імпульс цієї частинки; J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – кутова швидкість тіла.

14. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухливої осі (рівняння моментів):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

де ε – кутове прискорення; J_z – момент інерції тіла відносно осі z.

15. Закон збереження моменту імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{L} = const, \quad J_z \omega = const,$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі z; ω – кутова швидкість тіла.

4.4. Контрольні запитання та завдання

1. Чому дорівнює момент інерції матеріальної точки, системи матеріальних точок?
2. Чому дорівнює момент інерції твердого тіла?
3. Чому дорівнює момент сили відносно нерухомої точки та осі?
4. Чому дорівнює момент імпульсу частинки відносно нерухомої точки та осі?
5. Чому дорівнює момент імпульсу твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі?
6. Запишіть і проаналізуйте рівняння моментів.
7. Сформулюйте та доведіть теорему Штейнера.
8. Запишіть вираз для кінетичної енергії обертального руху твердого тіла.
9. Запишіть вираз для кінетичної енергії твердого тіла у випадку плоского руху.
10. Чому дорівнює робота зовнішніх сил під час обертання твердого тіла відносно нерухомої осі?

4.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Два тягарці масами $m_1 = 2$ кг та $m_2 = 1$ кг з'єднані невагомою та нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок масою $m = 1$ кг. Знайти прискорення, з яким рухаються тягарці; сили натягу F_1 та F_2 ниток, до яких прикріплено тягарці. Блок вважати однорідним диском, тертям знехтувати.

Дані: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m = 1$ кг.

Знайти: a, F_1, F_2.

Аналіз і розв'язання

Тягарці рухаються поступально, блок обертається, запишемо основне рівняння динаміки поступального руху тягарців та обертального руху блока:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F}_1 = m_1\vec{a} \\ m_2\vec{g} + \vec{F}_2 = m_2\vec{a} \\ \vec{M}_1' + \vec{M}_2' = J\vec{\varepsilon} \end{cases} \quad (4.1)$$

де $J = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент інерції блока, $\vec{M}_1' = \left[\vec{r}, \vec{F}_1'\right]$; $\vec{M}_2' = \left[\vec{r}, \vec{F}_2'\right]$ – моменти сил натягу, які діють на блок. Сили, що діють на тягарці та блок, позначено на рис. 4.1.

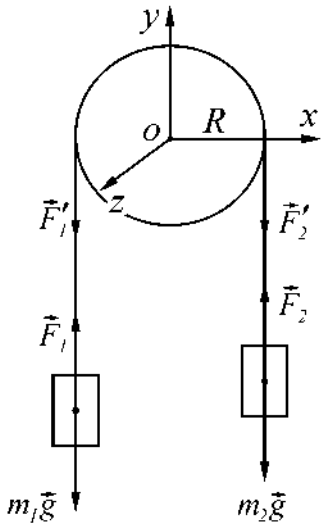


Рисунок 4.1

Спроектувавши вектори рівнянь (4.1) на координатні осі Oz та Oy, запишемо ($F_1' = F_1$; $F_2' = F_2$):

$$\begin{cases} F_1 - m_1 g = -m_1 a \\ F_2 - m_2 g = m_2 a \\ (F_1 - F_2)R = J\varepsilon \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, враховуємо, що кутове прискорення блока ε в залежності від прискорення тягарців (у даному випадку тангенціального прискорення) описується формулою $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, знаходимо шукані параметри:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} = 2{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$F_1 = \frac{m_1(2m_2 + \dfrac{m}{2})}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g = 14 \text{ Н}.$$

$$F_2 = \frac{m_2(2m_1 + \dfrac{m}{2})}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} g = 12{,}6 \text{ Н}.$$

Відповідь: $a = 2{,}8$ м/с^2, $F_1 = 14$ Н, $F_2 = 12{,}6$ Н.

Задача 2. З похилої площини, що становить кут $\alpha = 37°$ з обрієм, скачується без ковзання суцільний диск. Нехтуючи тертям, визначте швидкість υ диска через $t = 4$ с після початку руху.

Дані: $\alpha = 37°$, $t = 4$ с.

Знайти: υ.

Аналіз і розв'язання

Відповідно до закону збереження механічної енергії, при скочуванні диска його потенційна енергія переходить у кінетичну енергію поступального та обертального руху

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (4.2)$$

де m – маса диска; J – момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр мас; υ – швидкість центра мас диска; ω – кутова швидкість відносно осі, що проходить через центр мас.

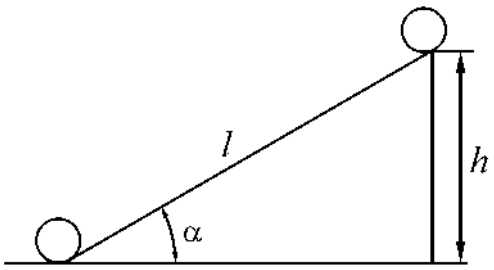


Рисунок 4.2

З огляду на то, що $h = l\sin\alpha$ (рис. 4.2), $\upsilon = \omega R$, а момент інерції суцільного диска $J = \frac{mR^2}{2}$ (R – радіус диска), вираз (4.2) запишеться у вигляді

$$mgl\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{4} = \frac{3}{2}m\upsilon^2. \qquad (4.3)$$

Оскільки $l = \frac{at^2}{2}$ та $a = \frac{\upsilon}{t}$ ($\upsilon_0 = 0$), з виразу (4.3) знайдемо шукану швидкість

$$\upsilon = \frac{2}{3}gt\sin\alpha = 15{,}7 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $\upsilon = 15{,}7$ м/с.

Задача 3. Маховик у вигляді однорідного суцільного диска радіусом $R = 35$ см і масою $m = 2{,}1$ кг обертається із частотою $n = 360$ хв$^{-1}$. Після прикладення до диска постійної дотичної сили гальмування він зупиняється за час $t = 2$ хв. Визначте роботу сили гальмування; силу гальмування F.

Дані: $R = 0{,}35$ м, $m = 2{,}1$ кг, $n = 6$ с$^{-1}$, $t = 120$ с.

Знайти: A, F.

Аналіз і розв'язання

Внаслідок гальмування диск зупиняється, тому робота сили гальмування

$$A = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (4.4)$$

де $J = \frac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска відносно осі обертання; $\omega = 2\pi n$ – кутова швидкість. Підставивши ці вирази у формулу (4.4), знайдемо роботу сили гальмування

$$A = \pi^2 n^2 mr^2 = 91{,}3 \text{ Дж}.$$

Момент сили гальмування

$$M = FR, \qquad (4.5)$$

де R – радіус диска (у нашім випадку плече сили). З іншого боку, відповідно до основного закону динаміки обертового руху,

$$M = J\varepsilon, \tag{4.6}$$

де кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}.$$

Прирівнявши вирази (4.5) і (4.6), знайдемо шукану силу

$$F = \frac{\pi m n R}{t} = 0{,}115 \text{ Н}.$$

Відповідь: $A = 91{,}3$ Дж; $F = 0{,}115$ Н.

Задача 4. Людина сидить у центрі лави Жуковського, що обертається по інерції навколо нерухомої вертикальної осі із частотою $n_1 = 30$ хв$^{-1}$. У витягнутих у сторони руках вона тримає по гантелі масою $m = 5$ кг кожна. Відстань від кожної гантелі до осі обертання $l_1 = 60$ см. Сумарний момент інерції людини та лави відносно осі обертання $J_0 = 2$ кг·м^2. Визначте: 1) частоту n_2 обертання лави з людиною; 2) яку роботу A виконає людина, коли вона притисне гантелі до себе так, що відстань від кожної гантелі до осі дорівнюватиме $l_2 = 20$ см?

Дані: $n_1 = 0{,}5$ с$^{-1}$, $m = 5$ кг, $l_1 = 0{,}6$м, $J_0 = 2$ кг·м^2, $l_2 = 0{,}2$ м.

Знайти: n_2, A.

Аналіз і розв'язання

За умовою завдання момент зовнішніх сил відносно вертикальної осі дорівнює нулю, тому момент імпульсу цієї системи зберігається, тобто

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \tag{4.7}$$

де $J_1 = J_0 + 2ml_1^2$ та $J_2 = J_0 + 2ml_2^2$ – відповідно момент інерції всієї системи до та після зближення; m – маса кожної гирі. Кутова швидкість $\omega = 2\pi n$. Підставляючи ці вирази у рівняння (4.7), одержимо шукану частоту обертання:

$$n_2 = \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2} n_1 = 1{,}17\text{с}^{-1}.$$

Робота, виконана людиною, дорівнює зміні кінетичної енергії системи:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}.$$

Виразивши з рівняння (4.7) $\omega_2 = \dfrac{J_1\omega_1}{J_2}$, одержимо:

$$A = \frac{J_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{J_1}{J_2} - 1\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2J_2}\left(J_1 - J_2\right) = \frac{2J_1\pi^2 n_1^2}{J_2}\left(J_1 - J_2\right) = 36{,}8 \text{ Дж}.$$

Відповідь: 1) $n_2 == 1{,}17\text{с}^{-1}$, 2) $A = 36{,}8$ Дж.

Задача 5. Камінь масою m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти залежність від часу моменту сили $\vec{M}(t)$, що діє на тіло, моменту імпульсу $\vec{L}(t)$. Опором повітря знехтувати. Обидва моменти знайти відносно точки кидання.

Дані: $\vec{\upsilon}_0$, α.

Знайти: $\vec{M}(t)$, $\vec{L}(t)$.

Аналіз і розв'язання

На камінь діє сила тяжіння. Момент цієї сили за означенням дорівнює $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}]$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор сили тяжіння. Початок системи координат поєднаємо з точкою кидання, напрям координатних осей вказано на рис. 4.3. Траєкторія руху каменя лежить у площині xOy, радіус-вектор його змінюється за законом $\vec{r}(t) = \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2}$.

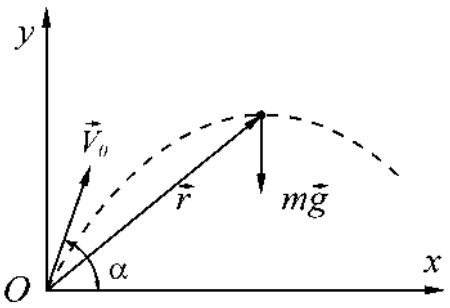


Рисунок 4.3

Тоді відносно точки O момент сили тяжіння дорівнює

$$\vec{M}(t) = \left[\left(\vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right), m\vec{g}\right] = \left[\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}\right] + \left[\frac{\vec{g}t^2}{2}, m\vec{g}\right] = \left[\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}\right].$$

Вектор $\vec{M}(t)$ спрямований перпендикулярно площині xOy, проекція цього вектора на вісь z дорівнює

$$M_z(t) = \upsilon_0 t \cdot mg \cdot \sin(90^0 + \alpha) = -\upsilon_0 t \cdot mg \cdot \cos(\alpha).$$

Використовуючи рівняння моментів $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$, знайдемо

$$d\vec{L} = \vec{M}dt;\ \int_0^L d\vec{L} = \int_0^t \vec{M}dt,$$

$$\vec{L}(t) = \int_0^t [\vec{\upsilon}_0 t, m\vec{g}]dt = [\vec{\upsilon}_0, m\vec{g}]\int_0^t tdt = [\vec{\upsilon}_0, m\vec{g}]\frac{t^2}{2}.$$

Вектор $\vec{L}$ напрямлений протилежно осі z, проекція його на цю вісь:

$$L_Z(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2 \cos\alpha.$$

Залежність $\vec{M}(t)$ та $\vec{L}(t)$ можна записати у вигляді

$$\vec{M}(t) = -\upsilon_0 \cdot mg \cdot t\cos\alpha \cdot \vec{k},$$

$$\vec{L}(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2 \cos\alpha \cdot \vec{k},$$

де $\vec{k}$ – одиничний вектор вздовж осі z.

Відповідь: $\vec{M}(t) = -\upsilon_0 \cdot mg \cdot t\cos\alpha \cdot \vec{k}$, $\vec{L}(t) = -\frac{1}{2}\upsilon_0 \cdot mg \cdot t^2\cos\alpha \cdot \vec{k}$.

Задача 6. Стрижень довжиною $l = 1{,}5$ м і масою $M = 10$ кг може обертатися навколо нерухомої осі, яка проходить через його верхній кінець. У середину стрижня потрапляє куля масою $m = 10$ г, яка летить в горизонтальному напрямі зі швидкістю $\upsilon_0 = 500$ м/с і застряє у ньому. На який кут φ відхилиться стрижень після удару?

Дані: $l = 1{,}5$ м, $M = 10$ кг, $m = 10$ г, $\upsilon_0 = 500$ м/с.

Знайти: φ.

Аналіз і розв'язання

Куля, співударяючись зі стрижнем, за дуже малий проміжок часу приводить його у рух із кутовою швидкістю ω і надає йому кінетичну енергію $T = J\omega^2 / 2$, де J – момент інерції стрижня відносно осі обертання. Потім стрижень повертається на кут φ, при цьому його центр мас піднімається на висоту $h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$ (рис. 4.4). В цьому положенні стрижень має потенціальну енергію

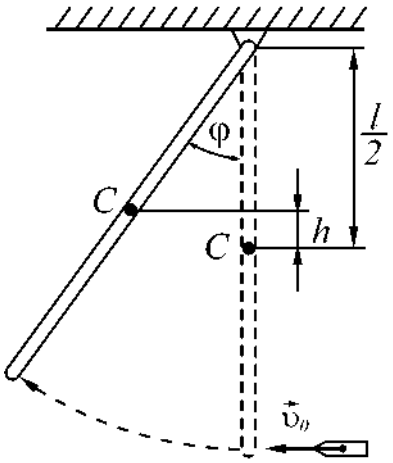


Рисунок 4.4

$$U = Mg\frac{l}{2}(1 - cos\,\varphi).$$

За законом збереження енергії

$$\frac{J\omega^2}{2} = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

маємо

$$\cos\varphi = 1 - \frac{J\omega^2}{Mgl}. \qquad (4.8)$$

Щоб знайти кут φ, слід у це рівняння підставити значення J та ω. Момент інерції стрижня J відносно осі обертання, що проходить через його кінець, дорівнює $J = Ml^2 / 3$. Кутову швидкість ω знайдемо за законом збереження моменту імпульсу

$$m\upsilon_0\tau = J\omega + mr^2\omega.$$

Враховуючи, що $\upsilon_0 = \omega r$, а $\tau = \frac{l}{2}$, одержимо

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 l}{2\dfrac{ml^2}{3} + \dfrac{ml^2}{2}}.$$

Підставляючи в рівняння (4.8) значення J, знайдемо $\cos\varphi = 0{,}987$, $\varphi = 9°20'$.

Відповідь: $\varphi = 9°20'$.

4.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти момент інерції та момент імпульсу земної кулі відносно осі обертання.

Відповідь: $J = 10^{38}$ кг$\cdot$м^2, $L = 7\cdot 10^{33}$ кг$\cdot$м^2/с.

Задача 2. Знайти момент інерції тонкої пласкої пластини із сторонами $a = 10$ см та $b = 20$ см відносно осі, що проходить через центр мас пластини паралельно бічній. Маса пластини рівномірно розподілена по її площі з поверхневою густиною $\sigma = 1{,}2$ кг/м^2.

Відповідь: $J = 2\cdot 10^{-5}$ кг$\cdot$м^2.

Задача 3. Маховик, що має момент інерції $J = 63{,}6$ кг$\cdot$м^2, обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 3{,}14$ рад/с. Знайти гальмівний момент, дія якого призводить до зупинки маховика через 20 с.

Відповідь: $M = 10$ Н$\cdot$м

Задача 4. Маховик, що має радіус $R = 0{,}2$ м і масу $m = 10$ кг, з'єднано з мотором за допомогою пасу. Сила натягу пасу є сталою і дорівнює $F = 14{,}7$ Н. Яку кількість обертів за секунду робитиме маховик через $t = 10$ с після початку руху? Маховик вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.

Відповідь: $n = 23{,}4$ с$^{-1}$.

Задача 5. Махове колесо, що має момент інерції 245 кг$\cdot$м^2, обертається з частотою $n_1 = 20$ с$^{-1}$. Через хвилину після того, як на колесо припинено дію обертального моменту, воно зупинилося. Знайти момент сил тертя.

Відповідь: $M_{тер} = 513$ Н$\cdot$м.

Задача 6. На барабан масою $m_1 = 6$ кг намотано шнур, до кінця якого прикріплено вантаж масою $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним циліндром. Тертям знехтувати.

Відповідь: $a = 3{,}9$ м/с^2.

Задача 7. На барабан радіусом $R = 0{,}5$ м намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж $m = 10$ кг. Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що вантаж опускається з прискоренням $a = 2{,}04$ м/с^2.

Відповідь: $J = 9{,}5$ кг$\cdot$м^2.

Задача 8. Визначте момент інерції J кулі масою $m = 400$ г і радіусом $R = 7$ см відносно осі, що є дотичною до її поверхні.

Відповідь: $J = \frac{7}{5} mR^2 = 2,74 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 9. Диск масою 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю 4 м/с. Знайти кінетичну енергію диска.

Відповідь: $T = 24$ Дж.

Задача 10. Обруч і диск мають однакові маси та котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю υ. Кінетична енергія обруча дорівнює $T_1 = 40$ Дж. Знайти кінетичну енергію T_2 диска.

Відповідь: $T_2 = 30$ Дж.

Задача 11. Обруч масою $m = 2$ кг котиться без ковзання по горизонтальній поверхні з лінійною швидкістю $\upsilon = 5$ м/с. Знайти його кінетичну енергію.

Відповідь: $T = 50$ Дж.

Задача 12. Велосипедист, маса якого разом з велосипедом є $m_1 = 80$ кг, їде рівномірно по дорозі зі швидкістю 18 км/год. Маса кожного колеса велосипеда $m_2 = m_3 = 5$ кг. Колеса обертаються з кутовою частотою $\omega = 1,6$ с$^{-1}$. Визначити кінетичну енергію системи. Колеса вважати тонкими кільцями з радіусом $R = 0,5$ м.

Відповідь: $T = 10^3$ Дж.

Задача 13. Кінетична енергія обертального руху $T_{об}$ кулі, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 20 Дж. Визначте кінетичну енергію T_n поступального руху кулі та її повну кінетичну енергію T.

Відповідь: $T_n = 2,5T_{об} = 50$ Дж, $T = 3,5T_{об} = 70$ Дж.

Задача 14. На похилій площині з кутом нахилу до горизонту α стоїть циліндр радіусом R. Якою може бути найвища висота циліндра, при якій він не перекинеться, якщо циліндр виготовлений з однорідної речовини?

Відповідь: $h = 2Rctg\,\alpha$.

Задача 15. Біліардна куля масою $m = 250$ г, що котиться без ковзання, вдаряється о борт і відскакує від нього. Швидкість кулі до удару $\upsilon = 0,8$ м/с, після удару $\upsilon' = 0,3$ м/с. Визначити кількість теплоти Q, що виділилась під час удару.

Відповідь: $Q = \frac{7}{10} m\left(\upsilon^2 - \left(\upsilon'\right)^2\right) = 96,3$ мДж.

Задача 16. Вентилятор, момент інерції J якого дорівнює 8 кг·м^2, обертається з частотою $n = 300$ мин$^{-1}$. Після вимкнення він почав обертатися рівносповільнено та, зробивши $N = 30$ обертів, зупинився. Визначте час t, за який вентилятор зупинився та момент M сил гальмування.

Відповідь: $t = \dfrac{2N}{n} = 12$ с, $M = \dfrac{J\pi n^2}{N} = 20{,}9$ Н·м.

Задача 17. Кінетична енергія маховика, який обертається навколо горизонтальної осі, дорівнює 1 кДж. Під дією постійного гальмуючого моменту маховик почав обертатись рівносповільнено і, зробивши 80 обертів, зупинився. Визначити момент M сили тертя.

Відповідь: $M = 1{,}99$ Н · м.

Задача 18. Людина стоїть в центрі лави Жуковського та тримає в руках стрижень масою $m = 9$ кг за середину в горизонтальному положенні. Після повороту стрижня у вертикальне положення лава змінює частоту обертання з $n_1 = 40$ хв$^{-1}$ до $n_2 = 50$ хв$^{-1}$. Визначте довжину l стрижня, якщо сумарний момент інерції людину та лави $J = 10$ кг·м^2.

Відповідь: $l = 2\sqrt{\dfrac{3(n_2 - n_1)J}{m}} = 1{,}49$ м.

Задача 19. Однорідний диск радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω та обережно поклали на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск обертатиметься на поверхні, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ?

Відповідь: $t = \dfrac{3\omega R}{4\mu g}$.

Задача 20. Кругла платформа у вигляді однорідного суцільного диска, у центрі якої стоїть людина масою $m_1 = 72$ кг, обертається по інерції із частотою $n_1 = 25$ хв$^{-1}$. При переході людини на край платформи частота її обертання стала рівною $n_2 = 10$ хв$^{-1}$. Визначте масу m_2 платформи.

Відповідь: $m_2 = 2m_1 \dfrac{n_2}{n_1 - n_2} = 96$ кг.

Задача 21. На платформі, що обертається горизонтально, на відстані $R = 50$ см від осі обертання лежить вантаж. При якій частоті n обертання платформи вантаж почне зісковзувати? Коефіцієнт тертя між вантажем і платформою $\mu = 0{,}05$.

Відповідь: $n > \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}} \approx 0{,}16$ об/с.

Задача 22. Тіло маси $m = 200$ г рівномірно обертається в горизонтальній площині по колу радіуса $R = 0{,}5$ м з частотою $n_1 = 3$ об/с. Яку роботу A потрібно виконати, щоб збільшити частоту обертання до $n_2 = 5$ об/с?

Відповідь: $A = 2\pi^2 R^2 m(n_2^{\,2} - n_1^{\,2}) = 15{,}8$ Дж.

Задача 23. Кульку масою m, що підвішена на нитці, відхиляють від положення рівноваги на кут $\alpha = 90°$ і відпускають. Яка максимальна сила натягу F нитки?

Відповідь: $F = 3mg$.

Задача 24. Якір двигуна обертається з частотою $n = 1500\,\text{хв}^{-1}$. Знайти обертальний момент, якщо двигун розвиває потужність $N = 500\,\text{Вт}$.

Відповідь: $M = 3{,}18\,\text{Н}\cdot\text{м}$.

Задача 25. Барабан сушильної машини, що має діаметр $D = 1{,}96\,\text{м}$, обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20\,\text{рад/с}$. У скільки разів сила F, що притискає тканину до стінки, більше сили тяжіння mg, що діє на тканину?

Відповідь: $F / mg = \omega^2 D / 2g = 40$.

Задача 26. Два тягарця різної маси з'єднані ниткою, перекинутою через блок, момент інерції якого $J = 50\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, а радіус – $R = 20\,\text{см}$. Блок обертається з тертям, і момент сил тертя дорівнює $M_{тер} = 98{,}1\,\text{Н}\cdot\text{м}$. Знайти різницю сил натягу ниток $(F_1 - F_2)$ з обох боків блока, якщо відомо, що блок обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2{,}36\,\text{рад/с}^2$.

Відповідь: $F_1 - F_2 = 1{,}08\cdot 10^3\,\text{Н}$.

Задача 27. З похилої площини скочується без ковзання однорідний диск. Лінійне прискорення центра мас диска $\alpha = 3{,}9\,\text{м/с}^2$. Сила тертя дорівнює $F = 1\,\text{Н}$. Знайти кут нахилу похилої площини до горизонту та масу диска.

Відповідь: $\alpha = 36°$, $m = 0{,}5\,\text{кг}$.

Задача 28. Маховик, момент інерції J якого дорівнює $40\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, почав обертатись рівноприскорено із стану спокою під дією моменту сили $M = 20\,\text{Н}\cdot\text{м}$. Обертання продовжувалось $t = 10\,c$. Визначити кінетичну енергію T маховика.

Відповідь: $T = 500\,\text{Дж}$.

Задача 29. Однорідна куля радіусом r починає скочуватись без просковзування з вершини сфери радіусом R. Знайти кутову швидкість кулі ω після відриву від поверхні сфери.

Відповідь: $\omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}$.

Задача 30. На гладенькій горизонтальній поверхні лежить однорідний диск радіусом r_0. На нього обережно опустили інший такий самий диск, що обертається із кутовою швидкістю ω_0. Через який час обидва диски обертатимуться з однаковою кутовою швидкістю, якщо коефіцієнт тертя між дисками дорівнює μ?

Відповідь: $t = \dfrac{3r_0\omega_0}{8\mu g}$.

5 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

5.1 Мета заняття

Опанувати методами розв'язання рівнянь, що описують коливання. Засвоїти фізичний зміст величин, які характеризують механічні коливання.

5.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Вивчаючи теоретичний матеріал [1, розд. 7; 2, розд. 6; 5, §6], зверніть увагу на фізичний зміст таких понять, як період коливань, фаза, добротність, час релаксації, логарифмічний декремент затухання.

5.3 Основні закони та формули

1. Рівняння гармонічних коливань:

$$x = A\cos(\omega_0 + \varphi),$$

де x – відхилення системи, яка здійснює коливання, від стану рівноваги; A – амплітуда коливань; $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – кругова (циклічна) частота; $\nu = \dfrac{1}{T}$ – частота; T – період коливань; φ – початкова фаза.

2. Швидкість і прискорення точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) = A\omega_0^2 \cos\left(\omega_{0t} + \varphi + \pi\right),$$

де A – амплітуда коливань; ω_0 – кругова частота; φ – початкова фаза.

3. Сила, що діє на матеріальну точку масою m,

$$F = -m\omega_0^2 x,$$

де ω_0 – кругова частота; x – відхилення точки від стану рівноваги.

4. Кінетична енергія точки, що здійснює прямолінійні гармонічні коливання:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 - \cos 2\left(\omega_0 + \varphi\right)\right],$$

де m – маса матеріальної точки; υ – її швидкість; A – амплітуда коливань; ω_0 – кругова частота; φ – початкова фаза.

5. Потенційна енергія точки, що здійснює гармонічні коливання під дією сили пружності F:

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right],$$

де m – маса матеріальної точки; ω_0 – кругова частота; x – відхилення точки від стану рівноваги; A – амплітуда коливань; φ – початкова фаза.

6. Механічна енергія коливань:

$$E = E_n + E_к = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

7. Диференціальне рівняння гармонійних коливань пружинного маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

де m – маса тіла; x – відхилення від стану рівноваги; k – жорсткість пружини; ω_0 – циклічна частота.

8. Розв'язок цього рівняння:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

де A – амплітуда коливань; φ – початкова фаза.

9. Період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де m – маса пружинного маятника; k – жорсткість пружини.

10. Період коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l – довжина маятника; g – прискорення вільного падіння.

11. Період коливань фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

де J – момент інерції маятника відносно осі коливань; l – відстань між точкою підвісу і центром мас маятника; $L = \frac{J}{ml}$ – приведена довжина фізичного маятника; g – прискорення вільного падіння.

12. Амплітуда A результуючого коливання, що виходить під час складання двох гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$$

13. Початкова фаза результуючого коливання:

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

де A_1 і A_2 – амплітуди двох складених коливань; φ_1 і φ_2 – початкові фази коливань.

14. Період биття:

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

де $\Delta\omega$ – різниця частот складених коливань, $\Delta\omega << \omega$.

15. Розв'язання траєкторії руху точки, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти (рівняння еліпса):

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi,$$

де A і B – амплітуди коливань, що складаються; φ – різниця між фазами коливань.

16. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язок

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де x – відхилення тіла, що здійснює коливання, від стану рівноваги; $\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання; $\omega_0 = \frac{k}{m}$ – власна частота тієї самої коливальної системи.

17. Розв'язок цього рівняння

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi\right),$$

де $A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота згасаючих коливань.

18. Декремент згасання:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що відповідають моментам часу, які відрізняються на період.

19. Логарифмічний декремент згасання:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що відповідають моментам часу, які відрізняються на період; β – коефіцієнт згасання; T – період згасаючих коливань; τ – час релаксації; N_e – кількість коливань, що здійснюються за час релаксації.

20. Добротність коливальної системи:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta},$$

де λ – логарифмічний декремент згасання; ω_0 – циклічна частота вільних незатухаючих коливань тієї самої коливальної системи; β – коефіцієнт згасання.

21. Диференціальне рівняння вимушених механічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

де x – відхилення тіла, що коливається від стану рівноваги; F_0 – амплітуда змушуючої сили; m – маса тіла.

22. Розв'язок цього рівняння для коливань, що встановилися:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

де $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ – амплітуда; $\varphi = arctg\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ – початкова фаза; ω_0 – власна частота тієї самої коливальної системи; ω – частота зовнішніх коливань змушуючої сили; β – коефіцієнт згасання.

23. Резонансна частота і резонансна амплітуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,,\ A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

де ω_0 – власна частота коливальної системи; β – коефіцієнт згасання; F_0 – амплітуда зовнішньої змушуючої сили; m – маса тіла.

5.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке гармонічні коливання?
2. Запишіть основні характеристики коливань математичного та фізичного маятників.
3. Запишіть диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань і його розв'язок.
4. Чому дорівнює механічна енергія коливального руху для власних коливань?
5. Що таке биття?
6. Що таке фігури Лисажу?
7. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язок.
8. Чому дорівнює частота, як змінюється енергія й амплітуда залежно від опору середовища?
9. Що таке логарифмічний декремент згасання, добротність?
10. Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язок.
11. Від чого і як залежить амплітуда та фаза вимушених коливань?
12. Дайте визначення явищу механічного резонансу.
13. Чому дорівнює резонансна частота та резонансна амплітуда?

5.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Енергія одновимірного гармонічного осцилятора дорівнює $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, де m – маса, k – коефіцієнт пропорційності між силою та зміщенням. Визначити рівняння, яке визначає залежність руху від часу. Встановити, який рух здійснює осцилятор. Знайти амплітуду коливань x_m та амплітуду швидкості $\dot{x}_m$.

Дані: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$;

Знайти: $x(t)$, x_m , $\dot{x}_m$.

Аналіз і розв'язання

Оскільки повна енергія осцилятора не залежить від часу, перша похідна від повної енергії за часом дорівнює нулю

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x}}{2} + 2k\frac{x\dot{x}}{2} = 0.$$

Тоді одержуємо

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Отримане рівняння – це рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5.1}$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота коливань.

Розв'язком рівняння (5.1) буде

$$x(t) = x_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right), \tag{5.2}$$

де x_m – амплітуда коливань; φ – початкова фаза коливань.

Знайдемо швидкість осцилятора, тобто першу похідну від (5.2)

$$\dot{x} = x_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \tag{5.3}$$

Тоді повну енергію можна записати

$$E = \frac{m x_m^2 \omega_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)}{2} + \frac{k x_m^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)}{2};$$

$$2E = k x_m^2; \;\; x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}; \;\; \dot{x}_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Звідси одержимо амплітуду коливань

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Амплітуду швидкості одержимо з рівняння (5.3)

$$\dot{x}_m = x_m\omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Відповідь: $x(t) = x_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right),\ x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}},\ \dot{x}_m = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$

Задача 2. Знайти рівняння руху тіла, яке бере участь водночас у двох однаково напрямлених коливальних рухах з однаковими частотами $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ і $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, тут φ_1 та φ_2 – початкові фази коливань, A_1, A_2 – амплітуди коливань. Проаналізувати випадки, якщо зсув фаз між коливаннями дорівнює: а) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$; б) $\varphi_2 - \varphi_1 = \left(2n+1\right)\pi, \left(n = 0,1,2...\right)$.

Дані: $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$,

а) $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, $\left(n = 0,1,2...\right)$;

б) $\varphi_2 - \varphi_1 = \left(2n+1\right)\pi, \left(n = 0,1,2...\right)$.

Знайти: $x(t)$.

Аналіз і розв'язання

Якщо тіло бере участь у двох коливальних рухах, що відбувається вздовж однієї і тієї самої прямої, його результуючий рух відбуватиметься також вздовж тієї самої прямої. При цьому користуватимемося методом векторних діаграм. Результуюче зміщення у будь-який момент часу дорівнює сумі незалежних зміщень, тобто $x = x_1 + x_2$ (рис. 5.1).

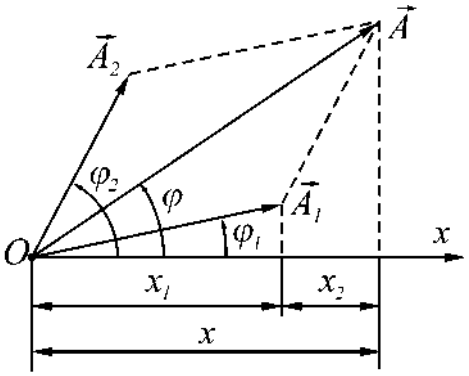


Рисунок 5.1

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ здійснюють обертання з однаковими кутовими швидкостями ω, зсув фаз між ними $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$ з часом не змінюється і вектор $\vec{A}$ також обертатиметься з кутовою швидкістю ω. Тоді результуюче коливання також буде гармонічним і рівняння матиме вигляд:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

де A – амплітуда результуючого коливання, φ – початкова фаза.

Користуючись рис. 5.1, одержуємо:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{5.4}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

З рівняння (5.4) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ $\left(n = 0,1,2...\right)$

$A = A_1 + A_2$. Коли $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, тобто складові коливання відбуваються у протилежних фазах, то амплітуда результуючого коливання $A = |A_2 - A_1|$, отже за означенням амплітуда – величина додатна.

Відповідь: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, де $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$; а) $A = A_1 + A_2$; б) $A = |A_2 - A_1|$.

Задача 3. Знайти траєкторію результуючого руху, якщо тіло водночас бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливальних рухах, частоти яких однакові.

Дані: $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$, $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Знайти: $y(x)$.

Аналіз і розв'язання

Відносно координатних осей Ox і Oy, які розташовані у напрямках коливальних рухів, рівняння коливань матиме вигляд

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1);\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Перепишемо рівняння так:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_1 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_1;$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_2 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_2.$$

Помножимо перше рівняння на $\cos\varphi_2$, а друге – на $\cos\varphi_1$ і знайдемо їх різницю; потім помножимо перше рівняння на $\sin\varphi_2$, а друге – на $\sin\varphi_1$ і також знайдемо різницю. Одержимо:

$$\frac{x}{A_1}\cdot\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega\ \ t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (5.5)$$

$$\frac{x}{A_1}\cdot\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega\ \ t\cdot\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (5.6)$$

Рівняння (5.5) та (5.6) піднесемо у квадрат і почленно додамо їх. Внаслідок цього матимемо:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (5.7)$$

Співвідношення (5.7) є рівнянням траєкторії результуючого руху тіла, що водночас бере участь у двох коливаннях, напрями яких взаємно перпендикулярні. У загальному випадку це рівняння є рівнянням еліпса. Орієнтація еліпса відносно осей координат і його форма визначаються значенням амплітуд A_1 і A_2 та величиною різниці фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складових коливань. Розглянемо окремі випадки.

1) Різниця фаз дорівнює нулю, тобто $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$.

У цьому разі рівняння (5.7) набуває вигляду

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0.$$

Звідси маємо

$$y = \frac{A_2}{A_1}x.$$

Траєкторією результуючого руху є пряма лінія, що проходить через початок координат і нахилена до осі Ox під кутом $\operatorname{arctg}\frac{A_2}{A_1}$. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$. Траєкторією руху тіла також буде пряма лінія, рівняння якої $y = -\frac{A_2}{A_1}x$. Вона утворює з віссю Ox кут $\operatorname{arctg}(-\frac{A_2}{A_1})$.

2) Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Тоді рівняння (5.7) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Отже, траєкторія результуючого руху має вигляд еліпса, півосі якого A_1 і A_2 орієнтовані вздовж координатних осей Ox і Oy.

Відповідь: $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Задача 4. Встановити закон втрати енергії з часом для затухаючих механічних коливань частинки, якщо m – маса частинки, r – коефіцієнт опору.

Дані: m, r.

Знайти: $E(t)$.

Аналіз і розв'язання

Розсіювання енергії коливальною системою при затухаючих коливаннях характеризується дією сил опору або тертя. Для механічних коливань, коли швидкість коливального руху невелика, сила опору пропорційна величині швидкості і спрямована завжди проти руху, тобто

$$F_o = -r\upsilon = -r\frac{dx}{dt},$$

де r – коефіцієнт опору.

Рівняння динаміки має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}. \tag{5.8}$$

Рівняння (5.8) називають диференціальним рівнянням згасаючих коливань. Розглядатимемо такі згасаючі коливання, коли періодичність руху зберігається. Рівняння руху тіла при цьому матиме вигляд:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi).$$

Встановимо характер зміни амплітуди згасаючих коливань з часом. Втрати енергії коливального руху тілом при згасаючих коливаннях визначається роботою сил опору. За час dt втрати енергії

$$dE = F_o dx = -r\upsilon\upsilon dt = -r\upsilon^2 dt.$$

Перепишемо цей вираз так:

$$\frac{dE}{dt} = -r\upsilon^2 = -\frac{2r}{m}\cdot\frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{5.9}$$

Вираз (5.9) можна використовувати для визначення середніх втрат енергії за час одного періоду. Середнє значення кінетичної енергії коливального руху дорівнює половині його повної енергії, тобто $E_k = \frac{1}{2}E$, тоді співвідношення (5.9) можна записати як

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{r}{m}E = -2\beta E, \tag{5.10}$$

де $2\beta = \frac{r}{m}$, коефіцієнт β називають коефіцієнтом затухання. З (5.10) видно, що швидкість зменшення енергії при затухаючих коливаннях пропорційна самій енергії. Перепишемо вираз (5.10) у вигляді

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt.$$

Звідси одержимо закон втрат енергії з часом

$$E = E_0 e^{-2\beta t},$$

де E_0 – значення енергії у момент часу $t = 0$.

Відповідь: $E = E_0 e^{-2\beta t}$.

Задача 5. Порівняти значення амплітуди коливань при резонансі, здійснених тілом під дією сталої сили, величина якої дорівнює амплітудному значенню F_0, із амплітудою вимушених коливань під дією цієї самої сили. Прийняти, що $\beta << \omega_0$.

Дані: F_0, $\beta << \omega_0$.

Знайти: $\frac{A_{рез}}{A}$.

Аналіз і розв'язання

Частоту зміни змушуючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають резонансною частотою $\omega_{\text{рез}}$. Явище, при якому амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають явищем резонансу. Резонансне значення амплітуди

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \tag{5.11}$$

де β – коефіцієнт згасання; m – маса тіла.

Якщо $\beta << \omega_0$, то з (5.11) одержимо, що величина амплітуди коливань при резонансі

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}.$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{5.12}$$

де ω – частота вимушених коливань; F_0 – амплітуда змушуючої сили.

Коли на тіло діє стала сила F_0, то $\omega = 0$ і з (5.12) маємо, що

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0}.$$

Знайдемо відношення

$$\frac{A_{рез}}{A} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Звідси видно, що відносне збільшення амплітуди коливань при резонансі визначається відношенням частоти власних коливань до коефіцієнта згасання. Для систем з малим затуханням амплітуда резонансних коливань може значно перевищувати величину зміщення при дії сталої сили.

Відповідь: $\frac{A_{рез}}{A} = \frac{\omega_0}{2\beta}$.

Задача 6. Тонкий обруч, що підвішений на вбитий у стіну цвях, здійснює гармонічні коливання з періодом $T = 1{,}56$ с у площині паралельній стіні. Визначити радіус обруча.

Дано: $T = 1{,}56$ с.

Знайти: R.

Аналіз і розв'язання

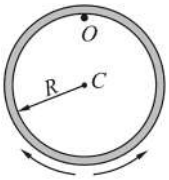


Рисунок 5.2

Тонкий обруч під дією сили тяжіння здійснює коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, що проходить через точку O, яка не співпадає з центром мас C обруча (рис. 5.2).

Це є приклад фізичного маятника. Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \tag{5.13}$$

де J – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O; l – відстань між точкою підвісу O і точкою мас C маятника; m – маса обруча; g – прискорення вільного падіння.

Згідно з теоремою Штейнера, момент інерції J диска відносно осі, яка не проходить через центр його мас,

$$J = J_0 + ma^2,$$

де J_0 – момент інерції обруча відносно осі, що проходить через центр мас обруча; a – відстань між осями. Враховуючи те, що $J_0 = mR^2$ (тонкостінний диск); $a = R$, остання формула запишеться у вигляді

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2. \tag{5.14}$$

Підставивши вираз (5.14) у формулу (5.13), враховуючи, що $l = R$, знайдемо радіус диска:

$$R = \frac{T^2 g}{8\pi^2} = 30,2\,\text{см}.$$

Відповідь: $R = 30,2\,\text{см}$.

Задача 7. Добротність Q коливальної системи дорівнює 314. Визначити, у скільки разів зміниться амплітуда коливань за час, протягом якого система здійснює $N = 110$ повних коливань.

Дано: $Q = 314$, $N = 110$.

Знайти: $\frac{A_0}{A_N}$.

Аналіз і розв'язання

Амплітуда згасаючих коливань зміниться з часом по закону

$$A_N = A_0 e^{-\beta t}, \tag{5.15}$$

де A_0 – початкова амплітуда (в момент інерції $t = 0$); β – коефіцієнт згасання; t – час, за який здійснюється N коливань.

Коефіцієнт згасання знайдемо з виразу логарифмічного декремента згасання: $\lambda = \beta T$, звідки

$$\beta = \frac{\lambda}{T}, \tag{5.16}$$

де T – умовний період згасання коливань. Час, за який здійснюється N коливань,

$$t = NT. \tag{5.17}$$

Враховуючи формули (5.16) і (5.17), вираз (5.15) запишеться у вигляді

$$A_N = A_0 e^{-\lambda N}. \tag{5.18}$$

Добротність коливальної системи

$$Q = \frac{\pi}{\lambda},$$

звідки логарифмічний декремент згасання

$$\lambda = \frac{\pi}{Q}.$$

Підставивши цей вираз у (5.18), отримуємо

$$A_N = A_0 e^{-\frac{\pi N}{Q}},$$

звідки

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{\frac{\pi N}{Q}} = 3.$$

Відповідь: $\frac{A_0}{A_N} = 3$ – амплітуда зменшиться у 3 рази.

5.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Амплітуда гармонічних коливань дорівнює 50 мм, період – 4 с, початкова фаза – $\frac{\pi}{4}$. Написати рівняння цього коливання. Знайти відхилення частинки від рівноваги при $t = 0$ і $t = 1{,}5$ с.

Відповідь: $x = 0{,}05\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$ м, $x_1 = 0{,}0352$ м, $x_2 = 0$.

Задача 2. Написати рівняння гармонічного коливального руху, якщо максимальне прискорення частинки дорівнює $49{,}3$ см/с^2. Період коливання 2 с, а відхилення частинки від рівноваги при $t = 0$ має значення 25 мм.

Відповідь: $x = 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(kt + \frac{\pi}{6}\right)$ м.

Задача 3. Чому дорівнює відношення кінетичної енергії частинки, яка виконує гармонічне коливання, до її потенціальної енергії, при $t_1 \frac{T}{12}$ с, $t_2 = \frac{T}{8}$ с, $t_3 = \frac{T}{6}$ с, де T – період коливань. Початкова фаза дорівнює нулю.

Відповідь: $\frac{E_к}{E_п} = 3$, $\frac{E_к}{E_п} = 1$, $\frac{E_к}{E_п} = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Частинка бере участь у двох коливаннях однакового періоду з однаковими початковими фазами. Амплітуди коливань $A_1 = 3$ см і $A_2 = 4$ см. Знайти амплітуду результуючого коливання, якщо коливання відбуваються в одному напрямі; коливання взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $A = 7$ см, $A = 5$ см.

Задача 5. Визначити потенціальну та кінетичну енергію математичного маятника в залежності від часу та кута відхилення від положення рівноваги для малих амплітуд коливань $(\varphi_m << 1)$. Маса маятника – m, довжина – l.

Відповідь: $E_к = \frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$, $E_п = \frac{mgl\varphi^2}{2}$, $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$.

Задача 6. Визначити потенціальну та кінетичну енергію фізичного маятника в залежності від часу t та кута відхилення φ від положення рівноваги для малих амплітуд коливань $(\varphi_m << 1)$. Маса маятника – m, момент інерції відносно осі обертання $-J_0$, відстань від осі обертання до центра ваги – L.

Відповідь: $E_к = \frac{J_0\dot{\varphi}^2}{2}$, $E_п = \frac{mgL\varphi^2}{2}$, $\ddot{\varphi} + \frac{mLg}{J_0}\varphi = 0$.

Задача 7. Рівняння затухаючих коливань має вигляд $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ м. Знайти швидкості точок, які виконують коливання в момент часу $t = 0$; T; $2T$; $3T$; $4T$.

Відповідь: $\upsilon_1 = 7,85$ м/с; $\upsilon_2 = 2,82$ м/с; $\upsilon_3 = 1,06$ м/с; $\upsilon_4 = 0,39$ м/с; $\upsilon_5 = 0,14$ м/с.

Задача 8. Амплітуда затухаючих коливань математичного маятника за 1 хв зменшилася вдвічі. У скільки разів вона зменшиться за 2 хв?

Відповідь: у 4 рази.

Задача 9. За час 100 с система встигає виконати 100 коливань. За цей час амплітуда зменшується у 2,718 рази. Визначити: коефіцієнт згасання коливань β; логарифмічний декремент згасання λ, добротність системи Q.

Відповідь: $\beta = 10^{-2}$ с$^{-1}$, $\lambda = 10^{-2}$, $Q = 314$.

Задача 10. Добротність коливальної системи $Q = 2$, частота вільних коливань $\omega = 100$ с$^{-1}$. Знайти власну частоту коливань системи ω_0.

Відповідь: $\omega_0 = 103$ с$^{-1}$.

Задача 11. Коливальна система виконує згасаючі коливання із частотою $\nu = 1000\,\text{Гц}$. Знайти частоту власних коливань ν_0, якщо резонансна частота $\nu_{рез} = 998\,\text{Гц}$.

Відповідь: $\nu_0 = 1002\,\text{Гц}$.

Задача 12. Пружину із жорсткістю $k = 10\,\text{Н/м}$ навантажили тягарем масою m. Система знаходиться в рідині, коефіцієнт сили опору якої дорівнює $r = 0{,}1$ кг/с. Визначити частоту ν_0 власних коливань і резонансну частоту $\nu_{рез}$.

Відповідь: $\nu_0 = 5{,}03\,\text{Гц}$, $\nu_{рез} = 4{,}91\,\text{Гц}$.

Задача 13. Визначити фазу коливання матеріальної точки через $2\,\text{с}$ після початку коливань, якщо точка здійснює коливання з періодом $T = 0{,}8\,\text{с}$.

Відповідь: $\varphi = 5\pi$ рад.

Задача 14. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\cos\omega t$ та $y = -\cos 2\omega t$. Записати рівняння траєкторії руху точки.

Відповідь: $y = -0{,}5x^2 + 1$.

Задача 15. Чому дорівнює період коливань математичного маятника, підвішеного у вагоні, що рухається горизонтально з прискоренням a?

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$.

Задача 16. Однорідний диск радіусом R коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через одну з твірних бічної поверхні. Знайти період коливань.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$.

Задача 17. Період T_0 власних коливань пружинного маятника дорівнює $0{,}55\,\text{с}$. У в'язкому середовищі період T цього самого маятника становить $0{,}56\,\text{с}$. Визначити резонансну частоту коливань.

Відповідь: $\nu_{рез} = 1{,}75\,\text{Гц}$.

Задача 18. Знайти число N повних коливань, коли енергія системи зменшилась у $n = 2$ рази. Логарифмічний декремент затухання $\lambda = 0{,}01$.

Відповідь: $N = 35$.

Задача 19. Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти $\nu_0 = 1\,\text{кГц}$ власних коливань системи з коефіцієнтом згасання $\beta = 400\,\text{с}^{-1}$.

Відповідь: $\Delta\nu = \dfrac{\beta^2}{4\pi^2\nu_0} = 4{,}05\,\text{Гц}$.

Задача 20. На якій відстані x від центра слід підвісити тонкий стрижень заданої довжини l, щоб одержати фізичний маятник, що коливається з максимальною частотою. Чому дорівнює ця частота?

Відповідь: $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$; $\omega_{\max} = \sqrt{(g/l)\sqrt{3}}$.

Задача 21. Маса Місяця у 81 раз менше маси Землі, а радіус Землі у 3,7 рази більше радіуса Місяця. Як зміниться період коливань маятника при перенесенні його з Землі на Місяць?

Відповідь: збільшиться приблизно у 2,4 рази.

Задача 22. Годинник з секундним маятником, що має період коливань $T_0 = 1\,\text{с}$, на поверхні Землі іде точно. На скільки відставатиме цей годинник за добу, якщо його підняти на висоту $h = 200\,\text{м}$ над поверхнею Землі?

Відповідь: $\Delta t = 2,7\,\text{с}$.

Задача 23. Знайти потенціальну енергію E_n математичного маятника масою $m = 200\,\text{г}$ в положенні, що відповідає куту відхилення нитки від вертикалі $\alpha = 10^\circ$, якщо частота коливань $\nu = 0,5\,\text{с}^{-1}$. Вважати, що потенціальна енергія маятника в положенні рівноваги дорівнює нулю.

Відповідь: $E_n = \dfrac{mg^2(1-\cos\alpha)}{4\pi^2\nu^2} \approx 2,9\cdot 10^{-3}\,\text{Дж}$.

Задача 24. З яким прискоренням a і в якому напрямку має рухатися кабіна ліфта, щоб секундний маятник, що знаходиться в ній, за час $t = 2\,\text{хв}\ 30\,\text{с}$ здійснив $n = 100$ коливань?

Відповідь: $a = g\left(1 - \dfrac{n^2T_0^2}{t^2}\right) \approx 3,54\,\text{м/с}^2$.

Задача 25. Тягарець масою $m = 250\,\text{г}$, підвішений до пружини, коливається по вертикалі з періодом $T = 1\,\text{с}$. Визначити жорсткість k пружини.

Відповідь: $k = 4,87\ \text{Н/м}$.

Задача 26. До спіральної пружини підвісили тягарець, внаслідок чого пружина розтягнулася на $x = 9\,\text{см}$. Яким буде період T коливань тягарця, якщо його дещо відтягнути вниз, а потім відпустити?

Відповідь: $T = 0,6\text{с}$.

Задача 27. Гиря, підвішена до пружини, коливається по вертикалі з амплітудою $A = 4\,\text{см}$. Визначити повну енергію E коливань гирі, якщо жорсткість k пружини дорівнює $1\,\text{кН/м}$.

Відповідь: $E = 0,8\text{Дж}$.

Задача 28. Тонкий обруч, підвішений на цвях, що вбитий горизонтально в стіну, коливається у площині, паралельній стіні. Радіус R обруча дорівнює $30\,\text{см}$. Обчислити період T коливань обруча.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = 1{,}55\,\text{с}.$

Задача 29. Логарифмічний декремент згасання математичного маятника $\lambda = 0{,}15$. Визначте, у скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника.

Відповідь: $\dfrac{A_1}{A_2} = e^{\lambda} = 1{,}16$.

Задача 30. Амплітуда затухаючих коливань маятника за час $t_1 = 1\,\text{хв}$ зменшилась в $n_1 = 3\,\text{рази}$. За який час t_2, рахуючи від початкового моменту, амплітуда цих коливань зменшиться в $n_2 = 81\,\text{разів}$?

Відповідь: $t_2 = \dfrac{t_1 \ln n_2}{\ln n_1} = 4\,\text{хв}.$

6 ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

6.1 Мета заняття

Навчити користуватися законами спеціальної теорії відносності для кількісного визначення зміни довжини, часу, енергії, імпульсу тіл, що рухаються із швидкостями, близькими до швидкості світла.

6.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Вивчити теоретичний матеріал, використовуючи конспект лекцій та [1, розд. 5; 2, розд. 5; 5, §5]. Звернути увагу на те, що релятивістський закон складання швидкостей випливає з перетворень Лоренца, а також на те, що незбереження маси спокою не означає порушення закону збереження маси взагалі. У теорії відносності справедливий закон збереження релятивістської маси, він взаємопов'язаний з законом збереження енергії. Але з закону взаємозв'язку енергії та маси аж ніяк не випливає можливість перетворення маси на енергію і навпаки. Перетворення енергії системи з однієї форми на іншу супроводжується перетвореннями маси. Наприклад, у явищі народження і знищення пари електрон-позитрон маса не переходить в енергію. Маса спокою частинок (електрона і позитрона) перетворюється на масу фотонів, тобто на масу електромагнітного поля.

6.3 Основні закони та формули

1. Перетворення Лоренца при переході від системи K до системи K'

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \end{cases}$$

де система відліку K' рухається зі швидкістю υ в позитивному напрямку осі x системи відліку K, причому осі x' і x збігаються, а осі y' та y, z і z' паралельні; c – швидкість поширення світла у вакуумі.

2. Релятивістське вповільнення часу

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де τ – проміжок часу між двома подіями, що відбуваються в одній точці, відлічений годинниками, що рухаються разом з тілом; τ' – проміжок часу між тими самими подіями, відлічений нерухомими годинниками.

3. Релятивістське (лоренцево) скорочення довжини

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

де l_0 – довжина стрижня, виміряна в системі відліку, щодо якої стрижень не рухається (власна довжина); l – довжина стрижня, в системі відліку, щодо якої він рухається зі швидкостю υ.

4. Релятивістський закон додавання швидкостей при переході від системи K до системи K'

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c^2}u_x},$$

де система відліку K' рухається зі швидкістю υ в позитивному напрямку осі x системи відліку K, причому осі x' та x збігаються, а осі y' та y, z і z' паралельні.

5. Інтервал між подіями

$$s_{12} = \sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2},$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$ – проміжок часу між подіями 1 і 2; $l_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$ – відстань між точками тривимірного простору, у яких ці події відбулися.

6. Релятивістська маса частинки:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – швидкість частинки.

7. Релятивістський імпульс частинки

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – швидкість частинки.

8. Основний закон релятивістської динаміки

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

де $\vec{p}$ – релятивістський імпульс частинки.

9. Енергія спокою частинки

$$E_0 = m_0 c^2,$$

де m_0 – маса спокою частинки; c – швидкість поширення світла у вакуумі.

10. Повна енергія релятивістської частинки

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – її швидкість.

11. Кінетична енергія релятивістської частинки

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

12. Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \; pc = \sqrt{T\left(T + 2m_0 c^2\right)},$$

де E – повна енергія; T – кінетична енергія; p – релятивістський імпульс.

6.4 Контрольні запитання та завдання

1. Чим відрізняється релятивістська частинка від класичної?
2. Запишіть формулу зв’язку координат і часу “нерухомої” та “рухомої” систем (перетворення Лоренца).
3. Запишіть формулу зв’язку проміжків часу, за які відбувається яка-небудь подія у “нерухомій” і “рухомій” системах.
4. Запишіть формулу релятивістського додавання швидкостей.
5. Запишіть формулу зв’язку довжини тіла в “нерухомій” і “рухомій” системах.
6. Запишіть формулу зв’язку релятивістської маси з масою спокою.
7. Запишіть релятивістську формулу кінетичної енергії тіла.
8. Який вигляд має зв’язок між масою та енергією?
9. Що таке енергія спокою тіла (частинки)?
10. Який вигляд має зв’язок між повною енергією тіла (частинки), енергією спокою та імпульсом?

6.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. На скільки відсотків зміниться повздовжній розмір протона і електрона після проходження ними різниці потенціалів $U = 10^6$ В?

Дані: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 10^6$ В.

Знайти: η_e, η_p .

Аналіз і розв'язання

В обох випадках кінетична енергія частинки дорівнює

$$T = A = eU = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ еВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ еВ}.$$

Оскільки

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = eU,$$

де m_0 – маса спокою частинки (у даному випадку m_e і m_p), $\beta^2 = \upsilon^2 / c^2$, то

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{eU + m_0 c^2}. \qquad (6.1)$$

Поздовжній розмір частинок

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Відносна зміна поздовжніх розмірів частинок з урахуванням (6.1)

$$\eta = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{eU}{eU + m_0 c^2}.$$

Оскільки для електрона $m_e c^2 \approx 0{,}512$ МеВ, а для протона $m_p c^2 = 939$ МеВ, то $\eta_e = 66{,}1\%$, $\eta_p = 0{,}1\%$.

Відповідь: $\eta_e = 66{,}1\%$, $\eta_p = 0{,}1\%$.

Задача 2. Протон і α -частинка проходять однакову прискорюючу різницю потенціалів U, після чого маса протона склала третину маси α -частинки. Визначити різницю потенціалів, а також швидкості протона і α -частинки.

Дані: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{27}$ кг, $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{27}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Знайти: U, υ_p, υ_α.

Аналіз і розв'язання

Оскільки повна енергія частинки пропорційна її масі, то

$$E_p = \frac{1}{3} E_\alpha, \qquad (6.2)$$

де E_p і E_α – повні енергії протона α-частинки.

Але

$$E_p = eU + m_p c^2, \tag{6.3}$$

$$E_\alpha = eU + m_\alpha c^2. \tag{6.4}$$

Підставивши (6.3) та (6.4) в (6.2), отримаємо

$$eU + m_p c^2 = \frac{1}{3}(eU + m_\alpha c^2).$$

Звідси

$$U = \frac{(m_\alpha - 3m_p)c^2}{2e}.$$

Зробивши обчислення за цією формулою, отримаємо $U = 461\,\text{МеВ}$. Швидкість протона знайдемо із співвідношення

$$eU = m_p c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_p c^2}{eU + m_p c^2} = 0{,}6709;$$

$$\beta = \frac{\upsilon_p}{c} = 0{,}7416;\ \upsilon_p = c\beta = 0{,}7416 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{м/с} = 2{,}22 \cdot 10^8\ \text{м/с};$$

$$\upsilon_p = c\beta = 0{,}7416 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{м/с} \approx 2{,}22 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Для α-частинки

$$eU = m_\alpha c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right);$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_\alpha c^2}{eU + m_\alpha c^2} = 0{,}8902;$$

$$1-\beta^2 = 0{,}7925;\ \beta = 0{,}4555;$$

$$\upsilon_\alpha = c\beta = 0{,}4555 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{м/с} \approx 1{,}37 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Відповідь: $U = 461\,\text{МеВ}$, $\upsilon_p \approx 2{,}22 \cdot 10^8$ м/с, $\upsilon_\alpha \approx 1{,}37 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 3. Визначте швидкість нестабільної частинки, якщо її час життя за годинниками спостерігача із Землі збільшився у $n = 1{,}8$ разів.

Дані: $n = \frac{\tau'}{\tau} = 1{,}8$.

Знайти: υ.

Аналіз і розв’язання

Систему відліку K зв'яжемо із часткою, тоді проміжок часу між виникненням і розпадом частинки в цій системі дорівнює її власному часу життя τ. Оскільки система K рухається разом із часткою, те ці події відбуваються в одній точці, що є необхідною умовою застосування формули, що описує релятивістське вповільнення ходу годин.

Для системи K', пов'язаної із Землею, час життя частинки – τ'. Тоді

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

звідки

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = n, \qquad (6.5)$$

(урахували умову завдання). З виразу (6.5) шукана швидкість

$$\upsilon = c\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 0{,}831c.$$

Відповідь: $\upsilon = 0{,}831\,c$**.**

Задача 4. Чи долетить до поверхні Землі нестабільна частинка, що виникла на висоті $h = 4$ км, якщо вона володіє власним часом життя $\tau = 4{,}5$ мкс та летить зі швидкістю $\upsilon = 0{,}95\,c$ в напрямку до Землі?

Дані: $h = 4\cdot 10^3$ м, $\upsilon = 0{,}95\,c$, $\tau = 4\cdot 10^{-6}$ с.

Знайти: s.

Аналіз і розв’язання

Відстань, що пройде частинка в системі відліку, пов'язаній із Землею, визначається як

$$s = \upsilon\tau', \qquad (6.6)$$

де τ' – час життя частинки, вимірюваний за годинниками на Землі.

Проміжок часу τ' пов'язаний із власним часом життя частинки τ співвідношенням

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (6.7)$$

Підставивши (6.7) до (6.6), одержуємо шукану відстань

$$s = \frac{\upsilon\tau}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Обчислюючи, одержуємо: $s = 4{,}11\cdot 10^3$ м $> h$, тобто частинка долетить до Землі.

Відповідь: $s > h$, частинка до Землі долетить.

Задача 5. З космічного корабля, що наближається до Землі зі швидкістю $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$, по ходу руху корабля стартувала ракета зі швидкістю $\upsilon_2 = 0{,}5\,c$. З якою швидкістю u ракета наближається до Землі?

Дані: $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$, $\upsilon_2 = 0{,}5\,c$.

Знайти: u.

Аналіз і розв'язання

Систему відліку K зв'яжемо із Землею, систему відліку K' – з космічним кораблем. Тоді швидкість ракети u в системі K і є шукана швидкість зближення. Відповідно до релятивістського закону додавання швидкостей,

$$u = \frac{u' + \upsilon}{1+\frac{u'\upsilon}{c^2}}, \tag{6.8}$$

де за умовою завдання швидкість руху космічного корабля відносно Землі $\upsilon = \upsilon_1$, швидкість ракети відносно космічного корабля $u' = \upsilon_2$.

Підставивши ці значення у формулу (6.8), знайдемо шукану швидкість:

$$u = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{1+\frac{\upsilon_1\upsilon_2}{c^2}} = 0{,}846c.$$

Відповідь: $u = 0{,}846\,c$.

Задача 6. Визначте релятивістський імпульс частинки, якщо її повна енергія $E = 1{,}5$ ГеВ, а швидкість $\upsilon = 0{,}5\,c$.

Дані: $E = 1{,}5$ ГэВ $= 2{,}4\cdot 10^{-10}$ Дж, $\upsilon = 0{,}5\,c$.

Знайти: p.

Аналіз і розв'язання

Релятивістський імпульс частинки

$$p = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \tag{6.9}$$

де m_0 – маса спокою частинки; υ – її швидкість.

Домножуючи чисельник та знаменник виразу (6.9) на c^2, одержимо шуканий імпульс:

$$p = \frac{m_0 \upsilon c^2}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{E\upsilon}{c^2} = 0{,}4 \cdot 10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{с},$$

(урахували, що повна енергія $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$).

Відповідь: $p = 0{,}4 \cdot 10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{с}$.

6.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Кінетична енергія частинки в $n = 2$ рази менше її енергії спокою. Визначте швидкість руху частинки.

Відповідь: $\upsilon = 0{,}745\, c$.

Задача 2. Метрова лінійка рухається повз спостерігача зі швидкістю, що складає $60\,\%$ швидкості світла. Якою видаватиметься спостерігачу її довжина?

Відповідь: $l = 80$ см.

Задача 3. Визначте кінетичну енергію протона, якщо його релятивістський імпульс $p = 2 \cdot 10^{-18}\ \text{Н}\cdot\text{ñ}$. Маса протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Відповідь: $T = 4{,}82$ ГеВ.

Задача 4. Фотонна ракета рухається відносно Землі зі швидкістю $\upsilon = 0{,}6\, c$. У скільки разів сповільниться перебіг часу в ракеті з точки зору земного спостерігача?

Відповідь: $n = 1{,}25$.

Задача 5. У системі K' перебуває у спокої стрижень, власна довжина l_0 якого дорівнює 1 м. Стрижень розміщений під кутом $\varphi_0 = 45^0$ до осі x'. Визначити довжину l стрижня і кут у системі K, якщо швидкість υ_0 системи K' відносно K дорівнює $0{,}8\, c$.

Відповідь: $l = l_0\sqrt{1-(\upsilon_0/\text{c}^2)\cos^2\varphi} = 0{,}825$ м; $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\varphi_0}{1-\upsilon^2/c^2}\right) = 59^0$.

Задача 6. З якою швидкістю рухався годинник у системі відліку *K*, якщо за $t = 15$ с (в цій системі) він відстав від годинника цієї системи на $\Delta t = 0{,}5$ с?

Відповідь: $\upsilon = 7{,}8 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 7. У лабораторній системі відліку (*K*-система) мезон з моменту народження до моменту розпаду пролетів відстань $l = 75$ м. Швидкість υ мезона дорівнює $0{,}995\, c$. Визначити власний час життя τ_0 мезона.

Відповідь: $\tau_0 = \dfrac{1}{\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 25$ нс.

Задача 8. Дві релятивістські частинки рухаються в лабораторній системі відліку із швидкостями $\upsilon_1 = 0{,}6\,c$ і $\upsilon_2 = 0{,}9\,c$ вздовж однієї прямої. Визначити їх відносну швидкість u_{21}, якщо частинки рухаються у протилежних напрямках; в одному напрямку.

Відповідь: $u''_{21} = 0{,}195\,c$; $u'_{21} = 0{,}974\,c$.

Задача 9. Два надзвукових реактивних літаки йдуть на зустрічних курсах зі швидкостями 1500 і 3000 км/год відносно Землі. Якою буде швидкість першого літака, виміряна пасажиром другого літака?

Відповідь: $\upsilon = 4499{,}999999986$ км/год.

Задача 10. Для спостерігача, нерухомого відносно системи K, водночас у двох точках на відстані $l = 10^5$ км відбулися дві події. Визначте проміжок часу τ' між цими подіями в системі K', що рухається щодо системи K зі швидкістю $\upsilon = 0{,}65\,c$.

Відповідь: $\tau' = \dfrac{\upsilon l}{c^2\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = 0{,}258$ с.

Задача 11. Визначте швидкість, з якою тіло має віддалятися від спостерігача, щоб його лінійні розміри зменшилися на 5 %.

Відповідь: $\upsilon = 0{,}31c$.

Задача 12. Іон, що вилетів з прискорювача, випустив фотон у напрямку свого руху. Визначити швидкість фотона відносно прискорювача, якщо швидкість υ іона відносно прискорювача дорівнює $0{,}8\,c$.

Відповідь: $\upsilon = c$.

Задача 13. Прискорювач надав радіоактивному ядру швидкість $\upsilon_1 = 0{,}4$ с. У момент вильоту з прискорювача ядро викинуло в напрямку свого руху β-частинку із швидкістю $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$ відносно прискорювача. Знайти швидкість u_{21} частинки відносно ядра.

Відповідь: $u_{21} = 0{,}5\,c$.

Задача 14. Частинка рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}5\,c$. У скільки разів релятивістська маса частинки більше маси спокою?

Відповідь: $n = 1{,}15$.

Задача 15. З якою швидкістю υ рухається частинка, якщо її релятивістська маса утричі більше маси спокою?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}943\,c$.

Задача 16. На скільки відсотків релятивістська маса частинки більше маси спокою при швидкості $\upsilon = 30$ Мм/с?

Відповідь: $\Delta\varepsilon = 0{,}5\%$.

Задача 17. Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}8\,c$. Визначити релятивістський імпульс електрона.

Відповідь: $p = 3{,}64 \cdot 10^{-22}$ Н · с.

Задача 18. Визначте кінетичну енергію релятивістського протона, якщо його повна енергія в $n = 1{,}5$ рази більше за його енергію спокою.

Відповідь: $T = (n-1)mc^2 = 0{,}47$ ГеВ.

Задача 19. Повна енергія тіла зросла на $\Delta E = 1$ Дж. На скільки при цьому зміниться маса тіла?

Відповідь: $\Delta m = 1{,}11 \cdot 10^{-17}$ кг.

Задача 20. Визначити, на скільки має збільшитися повна енергія тіла, щоб його релятивістська маса зросла на $\Delta m = 1$ г?

Відповідь: ΔE=90 ТДж.

Задача 21. Кінетична енергія електрона і протона дорівнює 10 МеВ. У скільки разів їх релятивістські маси більше мас спокою?

Відповідь: $n_1 = 20{,}6$; $n_2 = 1{,}01$.

Задача 22. Кінетична енергія частинки виявилася рівною її енергії спокою. Яка швидкість частинки?

Відповідь: $\upsilon = 0{,}866\,c$.

Задача 23. Визначте прискорювальну різницю потенціалів U, що надає електрону швидкість $\upsilon = 0{,}7\,c$.

Відповідь: $U = \dfrac{mc^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) = 2{,}05 \cdot 10^5$ Â.

Задача 24. Кінетична енергія частинки виявилася рівною її енергії спокою. У скільки разів зросте імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться у 4 рази?

Відповідь: $n = 2{,}82$.

Задача 25. Визначте релятивістський імпульс електрона, якщо його швидкість $\upsilon = 0{,}45\,c$, а кінетична енергія $T = 0{,}3$ МеВ.

Відповідь: $p = m\upsilon\left(1 + \dfrac{T}{mc^2}\right) = 1{,}95 \cdot 10^{-23}$ Н · с.

Задача 26. На космічному кораблі-супутнику знаходиться годинник, що синхронізований до польоту з земним. Швидкість υ_0 супутника складає 7,9 км/с. На скільки відстане годинник на супутнику за вимірами земного спостерігача за час $\tau_0 = 0{,}5$ року?

Відповідь: $\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}\tau_0 = 0{,}57\,c$.

Задача 27. Імпульс p релятивістської частинки дорівнює $m_0 c$. Під дією зовнішньої сили імпульс частинки збільшився вдвічі. У скільки разів зростуть при цьому кінетична і повна енергії частинки?

Відповідь: $n_1 = 2,98$; $n_2 = 1,58$.

Задача 28. Визначте збільшення релятивістського імпульсу частинки, якщо її швидкість $\upsilon = 0,75\, c$.

Відповідь: у 1,5 рази.

Задача 29. Визначте релятивістський імпульс p електрона, що рухається зі швидкістю $\upsilon = 0,97\, c$.

Відповідь: $p = 1,09 \cdot 10^{-21}$ Н $\cdot$ с.

Задача 30. Визначте релятивістський імпульс електрона, якщо його швидкість $\upsilon = 0,45\, c$, а кінетична енергія $T = 0,3$ МеВ.

Відповідь: $p = m\upsilon\left(1 + \dfrac{T}{mc^2}\right) = 1,95 \cdot 10^{-23}$ Н $\cdot$ с.

7 МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ. ТЕРМОДИНАМІКА

7.1 Мета заняття

Засвоїти основні закони молекулярно-кінетичної теорії газів, навчитися їх застосовувати під час розв'язання задач, оволодіти елементарним розрахунком термодинамічних процесів.

7.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Піж час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [1, розд. 8, 9, 10; 2, розд. 7, 8, 9; 5, глава 2]. Звернути увагу на основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів, функції розподілу, з'ясувати суть першого й другого законів термодинаміки. Після вивчення теорії відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язки задач, що наведені у прикладах.

7.3 Основні закони і формули

1. Кількість речовини

$$\nu = \frac{N}{N_A} \text{ або } \nu = \frac{m}{M},$$

де N – кількість атомів або молекул речовини; $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; m – маса речовини; M – її молярна маса.

2. Концентрація молекул – кількість молекул в одиниці об'єму

$$n = \frac{N}{V}.$$

3. Молярна маса речовини – чисельно дорівнює масі 1 моля речовини кількості 1 моль

$$M = m_0 N_A,$$

де m_0 – маса одного атома (молекули).

4. Молярна маса суміші газів:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\nu_i},$$

де m_i – маса i-ої – компоненти суміші; $\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$ – кількість молів i-ої компоненти суміші.

5. Закон Авогадро: при однакових тиску і температурі в однакових об'ємах міститься одна й та сама кількість молекул довільних газів. Як наслідок: один моль будь-якого газу за нормальних умов займає об'єм V_0 = 22,4 л/моль = $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

6. Закон Дальтона: тиск невзаємодіючої суміші газів p дорівнює сумі парціальних тисків газів p_i

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i .$$

7. Рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \nu RT, \quad \text{або} \quad pV = \frac{m}{M} RT,$$

де p, V, T – тиск, об'єм, температура ідеального газу; $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

8. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle,$$

де n – концентрація молекул; $\langle E \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

9. Середня кінетична енергія молекули

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де $i = i_{пост} + i_{об} + 2i_{кол}$ – кількість ступенів свободи молекули ($i_{пост}$ – при поступальному русі, $i_{об}$ – при обертальному русі, $i_{кол}$ – при коливальному русі); $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – термодинамічна температура газу.

10. Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

$$p = nkT .$$

11. Швидкості молекул:

– середня квадратична (теплова) швидкість молекул

$$\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}};$$

– середня швидкість молекул

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}};$$

– найбільш імовірна швидкість молекул

$$\upsilon_{iм} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} .$$

12. Розподіл Максвелла за модулями швидкості

$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right),$$

13. Барометрична формула (розподіл тиску у полі сили тяжіння)

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}},$$

де p_0 і p – тиск газу відповідно на нульовій висоті та на висоті h; m_0 – маса частинки; M – молярна маса; g – прискорення вільного падіння; R – універсальна газова стала; k – стала Больцмана.

14. Розподіл Больцмана для частинок в зовнішньому потенціальному полі

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}},$$

де n – концентрація частинок з потенціальною енергією E_n; n_0 – концентрація частинок у точках, де $E_n = 0$.

15. Ймовірність того, що фізична величина x, яка характеризує молекули газу, лежить в інтервалі значень від x до $x + dx$, дорівнює

$$dw(x) = f(x)dx,$$

де $f(x)$ – густина ймовірності, функція розподілу молекул за значеннями даної величини.

16. Середнє значення фізичної величини $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

17. Кількість молекул, для яких фізична величина x, що характеризує молекулу, має значення в інтервалі від x до $x + dx$

$$dN = Ndw(x) = Nf(x)dx.$$

18. Перший закон термодинаміки:

– у диференціальній формі

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

де δQ – кількість теплоти, яку одержала система; dU – зміна внутрішньої енергії системи; δA – робота, яку виконує система над зовнішніми тілами;

– в інтегральній формі

$$Q = \Delta U + A.$$

19. Теплоємність:

– теплоємність тіла

$$C = \frac{\delta Q}{dT};$$

– питома теплоємність тіла

$$c = \frac{\delta Q}{mdT};$$

– молярна теплоємність речовини

$$C_M = M \cdot c = \frac{M}{m}\frac{\delta Q}{dT},$$

де M – молярна маса речовини;

– молярна теплоємність ідеального газу при сталому об’ємі

$$C_V = Mc_V = \frac{M}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{M}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V,$$

$$C_V = \frac{i}{2}R,$$

де c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі; i – кількість ступенів свободи молекули; R – універсальна газова стала;

– молярна теплоємність ідеального газу при сталому тиску

$$C_p = Mc_p = \frac{M}{m}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{M}{m}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right];$$

$$C_p = \frac{i+2}{2}R;$$

– питомі теплоємності при сталому об'ємі c_V і сталому тиску c_p.

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M};\ \ c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}.$$

20. Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R.$$

21. Показник адіабати

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

22. Рівняння Пуассона – рівняння газового стану при адіабатичному процесі

$$pV^\gamma = const;\ \ TV^{\gamma-1} = const;\ \ T^\gamma p^{1-\gamma} = const.$$

23. Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = N\langle E\rangle = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}C_V T = \nu C_V T,$$

де N – кількість молекул газу; $\langle E\rangle$ – середня кінетична енергія молекули; ν – кількість речовини.

24. Робота газу при зміні об'єму газу від початкового об'єму V_1 до кінцевого V_2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

25. Робота газу

– при ізобаричному процесі ($p = const$)

$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right);$$

– при ізотермічному процесі ($T = const$)

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2};$$

– при ізохоричному процесі ($V = const$)

$$A = 0;$$

– при адіабатичному процесі

$$A = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R\left(T_1 - T_2\right);$$

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right].$$

26. Перший закон термодинаміки

– при ізобаричному процесі

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T;$$

– при ізотермічному процесі ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

– при ізохоричному процесі ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T;$$

– при адіабатичному процесі ($Q = 0$)

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right).$$

27. Термічний коефіцієнт корисної дії (ККД) для колового процесу

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де Q_1 – кількість теплоти, одержана газом (робочим тілом) від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, передана газом холодильнику.

28. Термічний коефіцієнт корисної дії (ККД) для циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура охолоджувача.

29. Зміна (приріст) ентропії внаслідок оборотного процесу

30.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + pdV}{T}; \quad \Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

30. Формула Больцмана

$$S = k \ln \Omega,$$

де k – стала Больцмана; Ω – термодинамічна ймовірність, тобто кількість мікроскопічних станів, якими може реалізуватися макроскопічний стан.

7.4 Контрольні запитання та завдання

1. Який газ називається ідеальним?

2. Запишіть та проаналізуйте основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів.

3. Чому дорівнює середня кінетична енергія поступального руху молекул ідеального газу?

4. Чому дорівнює середня кінетична енергія молекул ідеального газу? Як ця величина залежить від числа ступенів свободи?

5. Запишіть та проаналізуйте рівняння Менделєєва – Клапейрона

6. Сформулюйте закон рівнорозподілу енергії за ступенями свободи.

7. Сформулюйте закон Дальтона. Який тиск називається парціальним?

8. Сформулюйте закон Авогадро.

9. Яку величину називають молярною масою? Як розрахувати молярну масу суміші газів?

10. Запишіть функцію розподілу Максвелла молекул газу за модулями їх швидкостей. Який фізичний зміст функції розподілу? Запишіть умову нормування функції розподілу.

11. Як визначити середню, середньоквадратичну та найбільш імовірну швидкості молекул ідеального газу?

12. Як знайти середнє значення фізичної величини, якщо відома функція розподілу?

13. Запишіть барометричну формулу.

14. Запишіть функцію розподілу Больцмана для частинок у зовнішньому потенціальному полі.

15. Що таке теплоємність тіла? Молярна теплоємність? Питома теплоємність?

16. Яка величина називається внутрішньою енергією? Від яких величин залежить внутрішня енергія ідеального газу?

17. Як визначається робота при зміні об’єму тіла?

18. Сформулюйте перший закон термодинаміки.

19. Який процес називається адіабатичним? Запишіть рівняння адіабати.

20. Як визначається коефіцієнт корисної дії теплової машини?

21. Що таке цикл Карно? Від яких величин залежить ККД теплової машини, що здійснює цикл Карно?

22. Сформулюйте другий закон термодинаміки.

23. Наведіть формулу, за якою знаходять зміну ентропії в оборотних процесах.

24. Яка величина називається термодинамічною ймовірністю стану системи?

25. Запишіть формулу Больцмана.

7.5 Приклади розв’язання задач

Задача 1. Газ складається з суміші трьох газів: $\nu_1 = 2$ моль азоту, $\nu_2 = 4$ моль кисню, $\nu_3 = 5$ моль водню. Визначити густину і молярну масу суміші при температурі $T = 320\,\text{К}$ і тиску $p = 1,7 \cdot 10^5\,\text{Па}$.

Дані: $\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 4,\ \nu_3 = 5;\ T = 320\,\text{К},\ p = 1{,}7 \cdot 10^5\,\text{Па}.$

Знайти: $\rho,\ M.$

Аналіз і розв'язання

Згідно з законом Дальтона, тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші

$$p = p_1 + p_2 + p_3 . \tag{7.1}$$

Для кожної компоненти можна записати рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT ; \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT ; \quad p_3 V = \frac{m_3}{M_3} RT .$$

Додамо ці рівняння і одержимо

$$\left(p_1 + p_2 + p_3\right) V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} \right) RT . \tag{7.2}$$

Взявши до уваги (7.1) і те, що $\frac{m}{M} = \nu$ – кількість речовини, з (7.2) одержимо

$$pV = \left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) RT ,$$

звідки

$$V = \left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) \frac{RT}{p} .$$

Тоді густина суміші дорівнює

$$\rho = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{\left(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3\right) p}{\left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3\right) RT} = 1{,}13\ \text{кг/м}^3 .$$

Молярна маса суміші дорівнює

$$M = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = \frac{\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2 + \nu_3 M_3}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3} = 17{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}.$$

Відповідь: $\rho = 1{,}13\,\text{кг/м}^3,\ M = 17{,}6 \cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}.$

Задача 2. Температура окису азоту (NO) $T = 300$ К. Визначити частку молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від υ_1 = 820 м/с до υ_2 = 830 м/с. Газ перебуває під атмосферним тиском.

Дані: $T = 300$ К, υ_1 =820 м/с, υ_2 =830 м/с.

Знайти: $\Delta N / N$.

Аналіз і розв'язання

За нормальних умов (атмосферний тиск та кімнатна температура) окис азоту є ідеальним газом, молекули якого описуються законом розподілу Максвелла. Тоді число молекул, швидкості яких лежать в інтервалі швидкостей від υ до $\upsilon + d\upsilon$, дорівнює

$$dN = NF(\upsilon)d\upsilon, \tag{7.3}$$

де $F(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \upsilon^2 \exp(-m\upsilon^2 / 2kT)$ – функція розподілу Максвелла за модулем швидкості. Вираз (7.3) справедливий, якщо інтервал швидкостей такий малий, що функцію Максвелла в цьому інтервалі можна вважати сталою.

За умовою задачі, слід знайти частку молекул, швидкості яких змінюються від υ_1 до υ_2. Для цього необхідно інтегрувати вираз (7.3) у вказаному інтервалі швидкостей:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon. \tag{7.4}$$

Але розрахунок за формулою (7.4) складний, тому що інтеграл у явному вигляді не можна знайти і потрібно використовувати методи числового інтегрування. Якщо ж інтервал зміни швидкості $\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1$ малий, то функція розподілу Максвелла залишається майже сталою $F(\upsilon_1, T) \approx F(\upsilon_2, T)$. Тоді $\Delta N/N$ можна знайти за наближеною формулою

$$\frac{\Delta N}{N} = F(\upsilon_1, T)\Delta\upsilon. \tag{7.5}$$

Визначимо похибку, якої ми припускаємося, замінивши точне співвідно-шення (7.4) наближеним (7.5). Знайдемо значення функції Максвелла на кінцях інтервалу:

$$F(\upsilon_1, T) = 4{,}03\cdot10^{-4} \text{ с/м}; \; F(\upsilon_2, T) = 3{,}75\cdot10^{-4} \text{ с/м}.$$

Тоді відносна похибка при заміні функції її значення на одному з кінців інтервалу дорівнює:

$$\varepsilon = [1 - F(\upsilon_2, T)/F(\upsilon_1, T)] \cdot 100\% \approx 7\%.$$

Таким чином, з похибкою ε=7% знаходимо із формули (7.5) частку молекул, швидкості яких лежать в інтервалі

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = 10 \text{ м/с},$$

$$\Delta N / N = 4{,}03\cdot10^{-4} \text{ с/м}\cdot 10 \text{ м/с} = 4\cdot10^{-3}.$$

Відповідь: $\Delta N / N = 4\cdot10^{-3}$.

Задача 3. У посудині об’ємом $V = 30$ л знаходиться кисень масою $m = 100$г під тиском $p = 3\cdot10^5$ Па. Знайти найбільш імовірне значення кінетичної енергії молекул кисню.

Дані: $V = 3\cdot10^{-2}$ м^3, $m = 0{,}1$ кг, $p = 3\cdot10^5$ Па, $M = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Знайти: $E_к^{ім}$.

Аналіз і розв’язання

Найбільш імовірне значення кінетичної енергії молекул відповідає максимуму функції розподілу молекул за кінетичними енергіями. Виходячи з фун-

кції розподілу Максвелла за модулями швидкості, одержимо функцію розподілу молекул за кінетичними енергіями:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2};\ \upsilon = \sqrt{2E_к / m};$$

$$dN/N = F(\upsilon)d\upsilon = 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2}\upsilon^2 exp(-m\upsilon^2/2kT)d\upsilon;$$

$$dE_к = m\upsilon d\upsilon;\ d\upsilon = dE_к / \sqrt{2mE_k};$$

$$\frac{dN}{N} = F(E_к)dE_к = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{2E_к}{m}\exp\left(-\frac{E_к}{kT}\right)\frac{dE_к}{\sqrt{2mE_к}},$$

$$F(E_к) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}E_к^{1/2}\exp(-E_к / kT). \qquad (7.6)$$

Найбільш імовірна кінетична енергія відповідає максимуму функції (7.6). Визначивши похідну функції, прирівняємо її до нуля:

$$F'(E_к) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}[(-1/kT)E_к^{1/2} + E_к^{-1/2}/2]\exp(-E_к / kT);$$

$$2\pi(\pi kT)^{-3/2}\exp(-E_к / kT)\left[\frac{1}{2E_к^{1/2}} - \frac{E_к^{1/2}}{kT}\right] = 0.$$

Звідси знаходимо $E_к^{ім} = kT/2$.

Температуру знаходимо із рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M}RT;\quad T = \frac{pVM}{mR}.$$

Тоді найбільш імовірна кінетична енергія

$$E_к^{ім} = \frac{pVMk}{2mR} = 2{,}4\cdot10^{-21}\ \text{Дж}.$$

Зазначимо, що найбільш імовірна кінетична енергія у п’ять разів менша від середньої кінетичної енергії поступального руху двоатомних молекул кисню $< E >= \frac{5}{2}kT$.

Відповідь: $E_к^{ім} = 2{,}4\cdot10^{-21}$ Дж.

Задача 4. Знайти середню потенціальну енергію молекул повітря в полі тяжіння Землі. На якій висоті від поверхні Землі потенціальна енергія молекули дорівнює їх середній потенціальній енергії? Температуру повітря вважати сталою і рівною 0 °С.

Дані: $T = 273$ К, $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Знайти: h.

Аналіз і розв’язання

Повітря в полі тяжіння Землі (якщо повітря знаходиться при сталій температурі) можна описати розподілом Больцмана

$$f(E_n) = A\exp(-E_n/kT), \qquad (7.7)$$

де $E_n = mgh$ – потенціальна енергія молекули; A – стала величина.

Якщо відома функція розподілу Больцмана (7.7), то можемо знайти середнє значення потенціальної енергії $< E_n >$:

$$< E_n >= \frac{\int_0^\infty f(E_n)E_n dE_n}{\int_0^\infty f(E_n)dE_n} = \frac{A\int_0^\infty E_n \exp(-E_n / kT)dE_n}{A\int_0^\infty \exp(-E_n / kT)dE_n}. \qquad (7.8)$$

Зробимо заміну змінної при інтегруванні: $x = -E_n/kT$, тоді $dE_n = -kTdx$,

$$\int_0^\infty \exp(-E_n / kT)dE_n = -kT\int_0^\infty e^x dx = kT,$$

$$\int_0^\infty E_n \exp(-E_n / kT)dE_n = k^2T^2\int_0^\infty xe^x dx = k^2T^2.$$

Використовуючи (7.6), одержимо:

$$\langle E_n \rangle = kT = 1{,}38\cdot10^{-23}\cdot273 = 3{,}8\cdot10^{-21} \text{ Дж}.$$

Визначимо висоту, на якій середня потенціальна енергія дорівнює потенціальній енергії молекули

$$\langle E_n \rangle = kT,\ E_n = mgh;$$

$$kT = mgh;$$

$$h = \frac{kT}{mg} = \frac{RT}{Mg} = 8\cdot10^3 \text{ м}.$$

Відповідь: $h = 8\cdot10^3$ м.

Задача 5. Два грами азоту при температурі $T_1 = 280$ К ізобарно розширюються, при цьому його температура підвищується до $T_2 = 560$ К. Далі газ адіабатно розширюється до об'єму в n=5 разів більше, ніж початковий $V_3 = nV_1$. Розрахуйте кількість теплоти, одержану газом, роботу, яку він виконав, і зміну його внутрішньої енергії.

Дані: $T_1 = 280$ К, $T_2 = 560$ К, n=5.

Знайти: Q, A, ΔU.

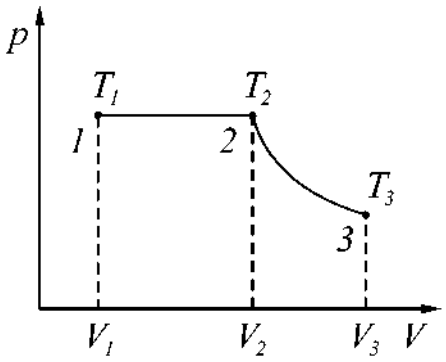


Рисунок 7.1

Аналіз і розв'язання

Розглянутий процес зображений на рис. 7.1, де 2-1 – ізобара, а 2-3 – адіабата. Кількість теплоти Q, одержана газом, дорівнює кількості теплоти Q_{12}, одержаної газом в ізобарному процесі, ажде при адіабатному процесі $Q_{23} = 0$.

Зважаючи на те, що газ двохатомний, кількість ступенів свободи $i = 5$,

$$C_p = \frac{i+2}{2}R = \frac{7}{2}R,$$

маємо

$$Q = Q_{12} = \frac{m}{M}C_p\left(T_2 - T_1\right) = \frac{m}{M}\frac{i+2}{2}R\left(T_2 - T_1\right) = 580 \text{ Дж}.$$

Робота, яку виконав газ при розширенні

$$A = A_{12} + A_{23}.$$

Робота розширення газу при ізобарному процесі з урахуванням рівняння Менделєєва-Клапейрона дорівнює

$$A_{12} = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right).$$

При адіабатному процесі

$$A_{23} = \frac{m}{M}C_V\left(T_2 - T_3\right),$$

де $C_V = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R$.

Температуру T_3 можна розрахувати з рівняння адіабатного процесу

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}, \; T_3 = T_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1},$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$, $V_3 = nV_1$.

Об’єм газу наприкінці ізобарного розширення V_2 знайдемо з рівняння ізобарного процесу

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1}.$$

Тоді

$$T_3 = T_2\left(\frac{V_1}{V_3}\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = T_2\left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1},$$

звідки

$$A_{23} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_2\left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Повна робота дорівнює

$$A = \frac{m}{M}R\left(T_2 - T_1\right) + \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT_2\left[1 - \left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1}\right] = 420 \text{ Дж}.$$

Зміну внутрішньої енергії знайдемо, враховуючи, що вона – функція стану і не залежить від термодинамічних процесів.

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \left(T_3 - T_1\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R\left[T_2\left(\frac{T_2}{nT_1}\right)^{\gamma-1} - T_1\right] = 160 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $Q = 580$ Дж, $A = 420$ Дж, $\Delta U = 160$ Дж.

Задача 6. Ідеальний двоатомний газ виконує цикл Карно, графік якого зображено на рис. 7.2. Об'єм газу в станах 2 і 3 відповідно $V_1 = 12$ л та $V_2 = 16$ л. Знайти термічний ККД циклу.

Дані: $V_1 = 12$ л, $V_2 = 16$ л.

Знайти: η.

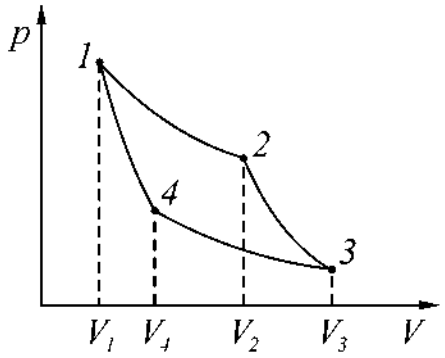


Рисунок 7.2

Аналіз і розв'язання

Цикл Карно складається з двох ізотерм: 1-2, 3-4 та двох адіабат 2-3, 4-1 (рис. 7.2). Термічний ККД будь-якого оборотного циклу визначається формулою:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \tag{7.9}$$

де Q_1 – кількість теплоти, отриманої газом протягом циклу від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, що віддана газом протягом циклу холодильника.

Різниця Q_1–Q_2 дорівнює роботі, що виконана газом протягом циклу. Ця робота на діаграмі p, V дорівнює площі, що обмежена замкнутим циклом (рис. 7.2).

Газ одержує кількість теплоти Q_1 на ділянці 1-2 при ізотермічному розширенні та віддає кількість теплоти Q_2 на ділянці 3-4 при ізотермічному стискуванні. На ділянках циклу 2-3 та 4-1 обміну тепла з зовнішнім середовищем не відбувається.

При ізотермічному процесі внутрішня енергія залишається незмінною, $\Delta U = 0$, тому у відповідності з першим законом термодинаміки

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{7.10}$$

На ділянці 3-4 при ізотермічному стискуванні газ віддає кількість теплоти

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}. \tag{7.11}$$

Використовуючи формули (7.9–7.11), для ККД одержимо:

$$\eta = \frac{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}.$$

Співвідношення між параметрами стану в точках 1-4 діаграми циклу знайдемо, виходячи з рівнянь адіабати:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1};$$

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}.$$

Перемножуючи ці рівняння, одержимо

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1},$$

звідки

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}.$$

Для ККД одержимо формулу

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 0{,}109.$$

Відповідь: $\eta = 0{,}109$.

Задача 7. Водень масою *m* був ізобарно нагрітий так, що його об'єм збільшився в *n* разів, а потім ізохорно охолоджений так, що його тиск зменшився у *n* разів. Знайти зміну ентропії.

Дані: $m = 2$кг, $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$, $n = 5$.

Знайти: ΔS.

Аналіз і розв'язання

Графік процесу складається з ізобари 1-2 та ізохори 2-3 (рис. 7.3). Оскільки ентропія – величина адитивна, повна зміна ентропії

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'',$$

де $\Delta S'$, $\Delta S''$ – зміна ентропії відповідно на дільницях 1-2, 2-3. Зміна ентропії в оборотних термодинамічних процесах визначається загальною формулою

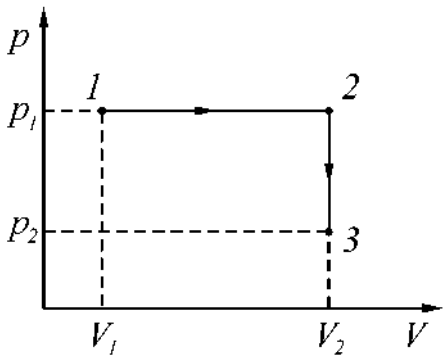


Рисунок 7.3

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{dT}.$$

При ізобарному процесі $dQ = \frac{m}{M} C_p dT$. Таким чином,

$$\Delta S' = \frac{m}{M} C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

При ізохорному процесі

$$dQ = \frac{m}{M} C_V dT$$

і відповідна зміна ентропії

$$\Delta S'' = \frac{m}{M} C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Виразимо тепер відношення T_2/T_1 та T_3/T_2 через дані задачі. Проаналізуємо процес переходу системі зі стану 1 у стан 3. Перехід 1-2 відбувається при p_1=const, тому

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = n.$$

Перехід 2-3 відбувається при V_2=const. Таким чином, $p_1/T_2=p_3/T_3$ або $p_1/p_3=T_2/T_3=n$.

Зміна ентропії при переході зі стану 1 у стан 3

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_p \cdot \ln n - \frac{m}{M} C_V \cdot \ln n = \frac{m}{M} R \cdot \ln n = 9{,}13 \cdot 10^3.$$

Відповідь: $\Delta S = 9{,}13 \cdot 10^3$.

7.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Маса $m = 12$ г газу знаходиться в об'ємі $V = 4$ л при температурі $t_1 = 7°\text{C}$. Після нагрівання при сталому тиску густина газу дорівнює $\rho = 0{,}6$ кг/м^3. До якої температури T_2 нагріли газ?

Відповідь: T_2=1400 К.

Задача 2. Середня кінетична енергія молекули одноатомного ідеального газу дорівнює $< E >= 6{,}00 \cdot 10^{-21}$. Тиск газу $p = 2{,}00 \cdot 10^5$ Па. Знайти кількість молекул газу в одиниці об'єму за цих умов.

Відповідь: $n = 5{,}00 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 3. Знайти густину суміші газів, що складається з водню та кисню. Масові частки їх відповідно 1/9 та 8/9. Тиск суміші $p = 100$ кПа, температура T=300 К.

Відповідь: $\rho = 0{,}402$ кг/м^3.

Задача 4. У зачиненій посудині об'ємом $V = 20$ л знаходяться водень масою $m_1 = 6$ г та гелій масою $m_2 = 12$ г. Визначте тиск та молярну масу суміші в посудині при температурі 300 К.

Відповідь: $p = 0{,}75$ МПа, $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 5. При якій температурі повітря середні швидкості молекул азоту (N_2) і кисню (O_2) відрізняються на 20 м/с?

Відповідь: $T = 563$ К.

S поперечного перерізу трубки дорівнює 0,1 см^2. При температурі T_1=273 К крапелька знаходилася

на відстані l_1=30 см від поверхні кулі, при температурі T_2=278 К – на відстані l_2=50 см. Знайти об'єм кулі.

Відповідь: $V = 106$ см^3.

Задача 7. У посудині об'ємом 10 л міститься ідеальний газ при температурі 10°С. Знайти масу випущеного газу, якщо тиск у посудині зменшився при сталій температурі на $\Delta p = 0{,}5$ атмосфери, а густина газу за нормальних умов $\rho = 1{,}25$ кг/м^3.

Відповідь: $\Delta m = 6$ г.

Задача 8. Визначити частку молекул, енергія яких знаходиться в інтервалі від $E_1 = 0$ до $E_2 = 0{,}01kT$.

Відповідь: $\Delta N / N = 7{,}53 \cdot 10^{-4}$.

Задача 9. Барометр у кабіні вертольоту показує тиск $p = 90$ кПа. На якій висоті летить вертоліт, якщо на поверхні Землі барометр показував $p_0 = 100$ кПа? Вважати температуру $T = 290$ К незмінною.

Відповідь: $h = 885$ м.

Задача 10. На скільки зменшиться атмосферний тиск $p = 100$ кПа, якщо спостерігач піднімається над поверхнею Землі на висоту $h = 100$ м? Температуру повітря вважати сталою $T = 290$ К.

Відповідь: $\Delta p = 1{,}18$ кПа.

Задача 11. Знайти силу, що діє на частинку, яка знаходиться в однорідному полі сили тяжіння, якщо відношення n_1 / n_2 концентрацій частинок на двох рівнях, відстань між якими $\Delta z = 1$ м, дорівнює e. Температуру $T = 300$ К вважати сталою.

Відповідь: $F = 4{,}14 \cdot 10^{-21}$ Н.

Задача 12. Обчислити питомі теплоємності c_V і c_p газів: 1) гелію; 2) водню; 3) двооксиду вуглецю.

Відповідь: 1) 3,12 кДж/кг·К; 5,19 кДж/кг·К; 2) 10,4 кДж/кг·К; 14,6 кДж/кг·К; 3) 567 Дж/кг·К; 756 Дж/кг·К.

Задача 13. Різниця питомих теплоємностей $c_p - c_V$ деякого двоатомного газу дорівнює 260 Дж/кг·К. Знайти молярну масу *M* газу та його питомі теплоємності c_V і c_p.

Відповідь: $M = 0{,}032$ кг/моль; $C_V = 650$ Дж/кг·К; $C_p = 910$ Дж/кг·К.

Задача 14. Визначити питому теплоємність c_V суміші газів, що містить $V_1 = 5$ л водню і $V_2 = 3$ л гелію. Гази знаходяться в однакових умовах.

Відповідь: $c_V = 4{,}53$ кДж/кг·К.

Задача 15. Знайти показник адіабати γ для суміші газів, що містить гелій масою $m_1 = 10$ г і водень масою $m_2 = 4$ г.

Відповідь: $\gamma = 1{,}51$.

Задача 16. Деяка кількість азоту, що знаходиться при температурі 27°С і тиску в 1 атм, стискується адіабатично до об'єму в 5 разів меншого, ніж початковий. Чому дорівнюватимуть після стиснення тиск і температура азоту? Порівняти тиск з тим, який створюється при ізотермічному стисненні.

Відповідь: 9,5 атм; 298°С; при адіабатичному стисненні тиск у 1.9 рази більше, ніж при ізотермічному.

Задача 17. При ізохорному нагріванні кисню об'ємом $V = 50$ л тиск газу змінився на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Знайти кількість теплоти Q, наданої газу.

Відповідь: $Q = 62{,}5$ Дж.

Задача 18. 10 л азоту, що були під тиском $p_1 = 1$ атм, стискуються до тиску $p_2 = 100$ атм. Визначити роботу A стискування для двох випадків: 1) стискування здійснюється ізотермічно; 2) стискування здійснюється адіабатично.

Відповідь: 1) $A = -4{,}6$ кДж; 2) $A = -6{,}8$ кДж.

Задача 19. Азот нагрівався при сталому тиску, причому йому була надана кількість теплоти $Q = 21$ кДж. Визначити роботу A, що здійснив при цьому газ, і зміну ΔU його внутрішньої енергії.

Відповідь: $A = 6$ кДж; $\Delta U = 15$ кДж.

Задача 20. Газ, що займав об'єм $V = 12$ л під тиском $p = 100$ кПа був ізобарно нагрітий від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Визначити роботу A розширення газу.

Відповідь: $A = 400$ Дж.

Задача 21. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0{,}02$ кг при температурі $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатно, збільшивши свій об'єм у п'ять разів, а потім був стиснений ізотермічно, причому об'єм газу зменшився у п'ять разів. Знайти температуру T_2 наприкінці адіабатного розширення і повну роботу A, що здійснена газом. Зобразити процес графічно.

Відповідь: $T_2 = 157$ К; $A = -21$ кДж.

Задача 22. Здійснюючи замкнутий процес, газ отримав від нагрівача кількість теплоти $Q_1 = 4$ кДж. Визначити роботу газу A при перебігу циклу, якщо його термічний ККД η=0,1.

Відповідь: $A = 400$ Дж.

Задача 23. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура нагрівача T_1 дорівнює 470 К, температура охолоджувача дорівнює $T_2 = 280$ К. При ізотермічному розширенні газ здійснює роботу $A = 100$ Дж. Визначити термічний ККД η циклу, а також кількість теплоти Q_2, яку газ віддає охолоджувачу при ізотермічному стискуванні.

Відповідь: $\eta = 0{,}404$; $Q_2 = 59{,}6$ Дж.

Задача 24. Внаслідок кругового процесу газ здійснив роботу $A = 1$ Дж і передав охолоджувачу кількість теплоти $Q_2 = 4{,}2$ Дж. Визначити термічний ККД η циклу.

Відповідь: $\eta = 0{,}193$.

Задача 25. Знайти зміну ΔS ентропії при ізобаричному розширенні азоту масою $m = 4$ г від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

Відповідь: $\Delta S = 2{,}43$ Дж/К.

Задача 26. Знаючи функцію розподілу Максвелла за швидкостями $F(\upsilon)$, знайти формулу для найбільш ймовірної швидкості $\upsilon_{ім}$.

Відповідь: $\upsilon_{ім} = \sqrt{2kT/\pi m}$.

Задача 27. Знаючи функцію розподілу Максвелла $F(\upsilon)$, одержати формулу для середньої швидкості $<\upsilon>$.

Відповідь: $<\upsilon>=\sqrt{8kT/\pi m}$.

Задача 28. Знаючи функцію розподілу Максвелла $F(\upsilon)$, одержати формулу для середньоквадратичної швидкості.

Відповідь: $<\upsilon_{кв}>=\sqrt{3kT/m}$.

Задача 29. У закритій колбі, стінки якої оточені нетеплопровідним матеріалом, знаходитися повітря при підвищеному порівняно з атмосферним тиском p_1 і температурою T_1. Відкривши кран, дають тискові повітря усередині колби швидко вирівнятися з атмосферним тиском *H*, після чого кран закривають. Після того, як температура повітря усередині колби набула значення T_1, тиск усередині колби став рівним p_2. Визначити за цими даними відношення γ теплоємностей повітря при сталому тиску і сталому об'ємі.

Відповідь: $\gamma = \lg\left(\frac{H}{p_1}\right) \Big/ \lg\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$.

Задача 30. Мотор передає 1 Дж механічної енергії холодильнику Карно, що поглинає тепло з морозильної камери при температурі 0°С і передає його оточуючому повітрю при 27°С. Наскільки зміниться ентропія морозильної камери? Усієї системи?

Відповідь: $-3{,}7 \cdot 10^{-2}$ Дж/К; 0.

8 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

8.1 Мета заняття

Навчитися розраховувати напруженість електричного поля, створеного системою точкових електричних зарядів і об'ємними зарядженими тілами, набути практичних навичок розрахунку потенціалу та різниці потенціалів електростатичних полів, які створені зарядами, зарядженими провідниками.

8.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи

Під час підготовки до заняття ознайомитися з контрольними запитаннями і завданнями. Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом і [3, розд. 1; 4, розд. 1; 5, §13…16]. Особливу увагу слід звернути на поняття точкового заряду, пробного заряду, на межу застосування закону Кулона, за яким визначається сила взаємодії двох точкових зарядів.

8.3 Основні закони та формули

1. Закон збереження заряду у замкнутій системі:

$$\sum_i q_i = const\,.$$

2. Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} \qquad \text{(у вакуумі)},$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon\cdot r^2} \qquad \text{(у середовищі)},$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів q_1 і q_2; r – відстань між зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; ε – діелектрична проникність середовища.

3. Напруженість електростатичного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

де F – сила, що діє на точковий позитивний заряд q_0, поміщений у дану точку поля.

4. Напруженість електростатичного поля точкового заряду на відстані *r* від заряду:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}.$$

5. Потік вектора напруженості електростатичного поля:

$$d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S} = E_n dS \quad \text{(крізь елементарну площину } dS\text{)},$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS \quad \text{(крізь замкнуту поверхню } S\text{)},$$

де $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ – вектор, модуль якого дорівнює dS, а напрямок збігається з зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ до поверхні; E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$.

6. Принцип суперпозиції електростатичних полів:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i ,$$

де $\vec{E}_i$ – напруженість поля, створюваного зарядом q.

7. Густина зарядів (лінійна, поверхнева, об'ємна):

$$\tau = \frac{dq}{dl},\ \sigma = \frac{dq}{dS},\ \rho = \frac{dq}{dV}.$$

8. Теорема Гауса для електростатичного поля у вакуумі:
у випадку дискретного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i ;$$

у випадку безперервного розподілу зарядів:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV ,$$

де $\sum_{i=1}^{N} q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, що знаходяться у середині замкнутої поверхні S; N – число зарядів; ρ – об'ємна густина зарядів.

9. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженою нескінченною площиною:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

де σ – поверхнева густина заряду.

10. Напруженість поля, створеного двома нескінченними паралельними різнойменно зарядженими площинами:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

11. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженою сферичною поверхнею радіусом R із загальним зарядом q на відстані r від центру сфери:

$E = 0$ при $r < R$ (всередині сфери),

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$ при $r \geq R$ (поза сферою).

12. Напруженість поля, створеного об'ємно зарядженою кулею радіусом R із загальним зарядом q на відстані r від центру кулі:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} r \qquad \text{при } r \leq R \text{ (всередині кулі)},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (поза кулею).}$$

13. Напруженість поля, створеного рівномірно зарядженим нескінченним циліндром радіусом R на відстані r від осі циліндра:

$$E = 0 \qquad \text{при } r < R \text{ (всередині циліндра),}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r} \qquad \text{при } r \geq R \text{ (поза циліндром),}$$

де τ – лінійна густина заряду.

14. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж замкнутого контуру:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0,$$

де E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$. Інтегрування проводиться по замкненому контуру L.

15. Потенціальна енергія заряду q_0 у полі заряду q на відстані r від нього:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r}.$$

16. Потенціал електростатичного поля :

$$\varphi = \frac{U}{q_0}, \; \varphi = \frac{A_\infty}{q_0},$$

де q_0 – точковий позитивний заряд, поміщений у дану точку поля; U – потенціальна енергія заряду q_0; A_∞ – робота переміщення заряду q_0 з даної точки поля за його межі.

17. Потенціал електростатичного поля точкового заряду на відстані від заряду:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}.$$

18. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \right),$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори координатних осей. Знак «–» визначається тим, що вектор $\vec{E}$ поля спрямований у бік зменшення потенціалу.

19. У випадку поля з центральною або вісьовою симетрією:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

20. Робота, що здійснюється силами електростатичного поля під час переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \;\; A_{12} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 E_l dl,$$

де E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$.

21. Різниця потенціалів між двома точками 1 і 2 в електростатичному полі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl,$$

де A_{12} – робота, що здійснюються силами електростатичного поля під час переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2; E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\vec{l}$; інтегрування проводиться вздовж будь-якої лінії, що з'єднує початкову та кінцеву точки, тому що робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії переміщення.

22. Різниця потенціалів між точками, що знаходяться на відстані x_1 і x_2 від рівномірно зарядженої нескінченної площини:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1),$$

де σ – поверхнева густина заряду.

23. Різниця потенціалів між нескінченними різнойменно зарядженими площинами, відстань між якими дорівнює d:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d.$$

24. Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від центру рівномірно зарядженої сферичної поверхні (об'ємно зарядженого кулі) радіусом R із загальним зарядом q за умови $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

25. Різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від центру об'ємно зарядженої кулі радіусом R із загальним зарядом q, за умови $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{R^3} dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

26. Різниця потенціалів між двома точками, що знаходяться на відстанях r_1 і r_2, від осі рівномірно зарядженого з лінійною густиною τ нескінченного циліндра радіусом R, за умови $r_1 < R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

8.4 Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте закон Кулона.
2. Для яких зарядів можна застосувати закон Кулона?
3. Який заряд називається точковим, пробним?
4. Фізичний смисл напруженості електростатичного поля.
5. Які властивості має електростатичне поле?
6. Як визначається напруженість електростатичного поля точкового заряду?
7. Дайте визначення ліній напруженості електричного поля.
8. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів.
9. Що таке циркуляція вектора напруженості електростатичного поля і чому вона дорівнює?
10. Чому дорівнює потенціальна енергія взаємодії двох точкових електричних зарядів?
11. Що таке потенціал електричного поля?
12. Що таке різниця потенціалів?
13. Чому дорівнює робота сил електричного поля з переміщення заряду з точки 1 в точку 2?
14. Як пов'язані різниця потенціалів з вектором напруженості електричного поля?
15. Як пов'язані вектор напруженості електричного поля з потенціалом?
16. Чому дорівнює потенціал поля точкового заряду?

8.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Три точкових заряди $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл розташовані у вершинах рівнобічного трикутника. Який заряд q_4 слід розташувати в центрі трикутника, щоб ця система зарядів була в рівновазі?

Дані: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ нКл.

Знайти: q_4.

Аналіз і розв'язання

Всі три заряди, що розташовані у вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах. Тому достатньо з'ясувати, який заряд слід розташувати в центрі трикутника, щоб будь-який з трьох зарядів, наприклад q_1, перебував у рівновазі. Заряд q_1 знаходитиметься в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнює нулю (рис. 8.1).

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (8.1)$$

де $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ – сили, які відповідно діють на заряд q_1 з боку зарядів q_2, q_3, q_4; $\vec{F}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

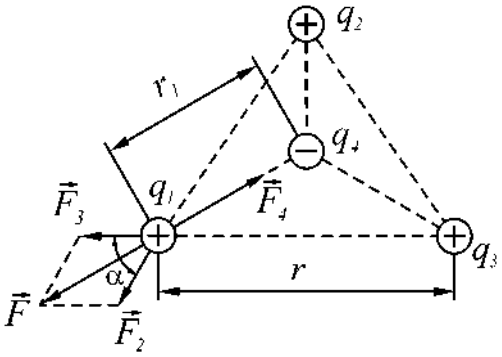


Рисунок 8.1

Беручи до уваги, що $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ спрямовані по одній прямій у протилежні боки, векторне рівняння (8.1) можна замінити скалярним $F - F_4 = 0$, звідки $F_4 = F$. Враховуючи, що $F_3 = F_2$, маємо:

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Застосовуючи закон Кулона і маючи на увазі, що $q_1 = q_2 = q_3$, визначаємо:

$$\frac{q_1 q_4}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Звідки:

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\,.$$

Беручи до уваги, що трикутник $q_1q_2q_3$ рівнобічний, маємо:

$$r_1 = \frac{r}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}};\ \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$q_4 = \frac{q_1}{\sqrt{3}};\ q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = 5{,}77\cdot 10^{-7}\ \text{Кл} = 577\ \text{нКл}.$$

Відповідь: q_4 = 577 нКл. Слід відзначити, що рівновага системи зарядів буде нестійкою.

Задача 2. Кільце радіусом R з тонкого дроту має заряд q, що рівномірно розподілений по кільцю. Знайти модуль напруженості електричного поля на осі кільця в точці A як функцію відстані f до його центра. Дослідити одержану залежність при $f >> R$.

Дані: R, q, f, $f >> R$.

Знайти: $E(f)$.

Аналіз і розв'язання

Поєднаємо координатну площину xOy з площиною кільця, а вісь Oz

dl. Заряд цього елемента $dq = \tau dl = \frac{q}{2\pi R}dl$ можна

вважати точковим, тоді напруженість $d\vec{E}$ електричного поля, створеного цим зарядом, може бути записана у вигляді:

$$d\vec{E} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q \cdot dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R (R^2 + f^2)} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

$$r = \sqrt{R^2 + f^2},$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, спрямований від еле-мента dl до точки A.

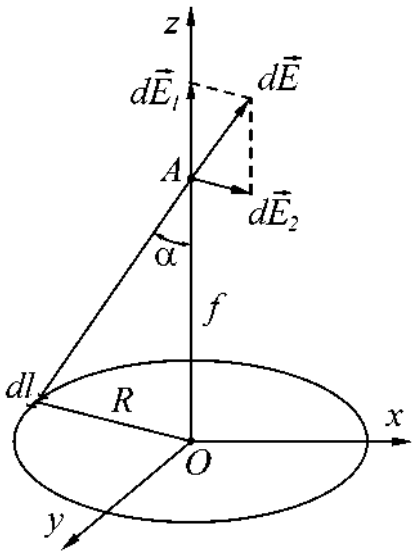


Рисунок 8.2

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: $d\vec{E}_1$, перпендикулярну площині кільця, (спрямовану так само, як і вісь O_z), і $d\vec{E}_2$, паралельну площині кільця (площині *xOy*), тобто:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напруженість $\vec{E}$ електричного поля у точці A знайдемо інтегруванням:

$$E = \oint_L d\vec{E}_1 + \oint_L d\vec{E}_2,$$

де інтегрування ведеться за довжиною кільця $L = 2\pi R$. Врахуємо, що для кожної пари зарядів dq і dq' ($dq = dq'$), розташованих симетрично відносно центра кільця, вектори $d\vec{E}_2$ і $d\vec{E}_2'$ у точці A однакові за модулем і протилежні за напрямком, тобто $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}_2'$. Тому векторна сума (інтеграл):

$$\oint_L d\vec{E}_2 = 0.$$

Складові $d\vec{E}_1$ для всіх елементів кільця спрямовані вздовж осі Oz, (вздовж одиничного вектора $\vec{k}$), тобто $d\vec{E} = \vec{k} dE_1$. Тоді $\vec{E} = \vec{k} \int_L dE_1$.

Зважаючи на те, що

$$dE = \frac{qdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R (R^2 + f^2)} \text{ і } \cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{R^2 + f^2}},$$

маємо:

$$dE_1 = \frac{fqdl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R (R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким чином:

$$\vec{E}(f) = \vec{k} \cdot \oint_L \frac{fqdl}{8\pi^2 \varepsilon R \left(R^2 + f^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \vec{k} \frac{fq}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 + f^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

При $f >> R$: $E(f) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 f^2}$ – як для точкового заряду.

Відповідь: $\vec{E}(f) = \vec{k}\dfrac{fq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + f^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 3. Тонкий стрижень довжиною $l = 10$ см рівномірно заряджений зарядом $q = 10^{-7}$ Кл. Знайти силу, яка діє на точковий заряд q_0 = 6 нКл, розташований на подовженні стрижня на відстані $a = 20$ см від нього. Знайти напруженість поля як функцію відстані до стержня a.

Дані: $q = 10^{-7}$ Кл, $q_0 = 6$ нКл $= 6 \cdot 10^{-9}$ Кл, $a = 20$ см = 0,2 м.

Знайти: F, $E(a)$.

Аналіз і розв'язання

Безпосередньо застосувати закон Кулона неможливо, тому що стрижень – не точковий заряд. Але можна застосувати метод диференціювання та інтегрування. Виділимо на стержні дуже малий елемент довжиною dx, заряд якого $dq = \dfrac{q}{l}dx$ можна вважати точковим (рис. 8.3).

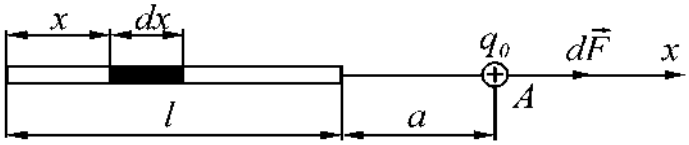


Рисунок 8.3

Сила взаємодії dF точкового заряду q_0 та елементарного точкового заряду dq за законом Кулона:

$$dF = \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 (l + a - x)^2},$$

де $(l + a - x)$ – відстань від елемента dx до точкового заряду q_0, x – відстань від початку координат до елемента dx (рис. 8.3). Інтегруючі вираз для dF за довжиною стрижня, отримаємо результуючу силу:

$$F = \int dF = \int_0^l \frac{q_0 dq}{4\pi\varepsilon_0 (l + a - x)^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l} \cdot \int_0^l \frac{dx}{(l + a - x)^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 l} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l} \right) = 90 \text{ мкН}.$$

Напруженість поля в точці A дорівнює:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l} \right).$$

За напрямком напруженість $\vec{E}$ збігається з $\vec{F}$. Для будь-якої точки на подовженні стрижня:

$$E(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + l} \right),$$

де a – відстань від кінця стрижня до точки, де визначається напруженість поля.

Відповідь: $F = 90$ мкН, $E(a) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+l}\right)$.

Задача 4. Електричне поле створене тонким прямим провідником, рівномірно зарядженим з лінійного густиною $\tau = 0,2$ мкКл/м. Визначити потенціал φ поля в точці C, яка розташована від кінців провідника на відстанях, що дорівнюють довжині провідника *l*. Яку роботу здійснить електричне поле по переміщення заряду $q = 10^{-5}$ Кл з точки C на нескінченно велику відстань?

Дані: $\tau = 0,2$ мкКл/м, $r_{\max} = l$, $q = 10^{-5}$ Кл.

Знайти: φ_C, A.

Аналіз і розв'язання

Заряд, який знаходиться на провіднику, не можна вважати точковим, тому необхідно розподілити провідник на елементарні відрізки (рис. 8.4). У цьому випадку заряд $dq = \tau dl$, який перебуває на кожному з них, можна розглядати як точковий. Потенціал, утворений у точці C зарядом dq:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (8.2)$$

де r – відстань від точки, в якій визначається потенціал, до елемента провідника. З рис. 8.4 можна бачити, що $dl = \dfrac{\tau d\alpha}{\cos\alpha}$. Тоді з формули (8.2):

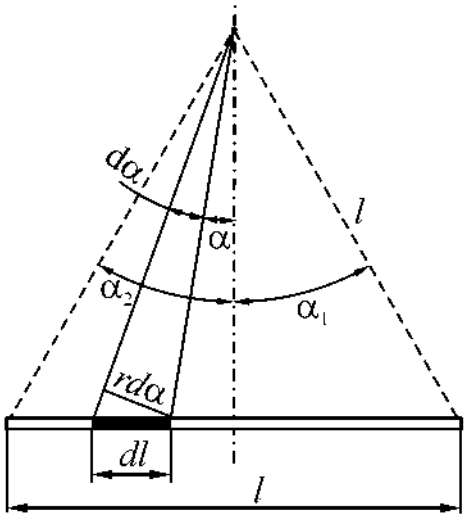


Рисунок 8.4

$$d\varphi = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

Інтегруючи одержаний вираз від, α_1 до α_2, знайдемо потенціал у точці C:

$$\varphi_C = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Внаслідок симетрії розташування точки C відносно кінців провідника маємо: $\alpha_1 = \alpha_2$, тому:

$$\varphi_C = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln tg\frac{\pi}{3} - \ln tg\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln tg\frac{\pi}{3}.$$

Робота переміщення заряду q з точки C на нескінченність:

$$A = q(\varphi_C - \varphi_\infty) = q\varphi_c,$$

де потенціал поля на нескінченності $\varphi_C = 0$. Розрахуємо:

$$\varphi_C = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}55}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1{,}98 \cdot 10^3 \text{ В}; \; A = 10^{-5} \cdot 1978 \approx 0{,}02 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $\varphi_C = 1{,}98 \cdot 10^3$ В, $A = 0{,}02$ Дж.

Задача 5. Електричне поле створюється точковим диполем, електричний момент якого $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м. Знайти роботу A_{12} сил поля з переміщення заряду $q = +0{,}1$ Кл з точки 1 (рис. 8.5), яка розташована на осі диполя на відстані $r_1 = 0{,}1$ м від його центра з боку позитивного заряду, в точку 2, яка розташована на осі диполя на відстані $r_2 = 0{,}2$ м від його центра.

Дані: $p = 2 \cdot 10^{-14}$ Кл·м, $q = +0{,}1$ Кл, $r_1 = 0{,}1$ м, $r_2 = 0{,}2$ м.

Знайти: A_{12}.

Аналіз і розв'язання

Для визначення роботи сил поля скористаємося співвідношенням

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (8.3)$$

З принципу суперпозиції полів випливає, що потенціал будь-якої точки електричного поля диполя:

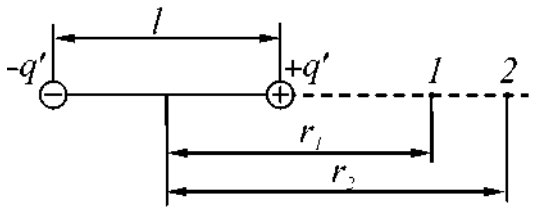


Рисунок 8.5

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)}. \qquad (8.4)$$

Враховуючи, що для точкового диполя $l << r$, можна знехтувати значенням $\frac{l^2}{4}$ у знаменнику, з формул (8.3) та (8.4) одержимо:

$$A_{12} = \frac{q\rho}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right);$$

$$A_{12} = \frac{0{,}1 \cdot 2 \cdot 10^{-14}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1^2} - \frac{1}{0{,}2^2}\right) = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A_{12} = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 6. Тонкий диск радіусом R рівномірно заряджений з поверхневою густиною σ. Знайти потенціал і напруженість поля в точці A, що лежить на осі диска на відстані a від нього.

Дані: R, σ, a.

Знайти: φ, $\vec{E}$.

Аналіз і розв'язання

Для визначення потенціалу в точці A застосуємо принцип суперпозиції полів. Розіб'ємо диск на елементарні кільця шириною dx (рис. 8.6). Площа кільця радіусом x дорівнює $2\pi x \cdot dx$, заряд кільця $dq = 2\pi\sigma x \cdot dx$. Потенціал поля кільця в точці A дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, утворе-них усіма його точковими елементами, які рівновід-далені від точки A.

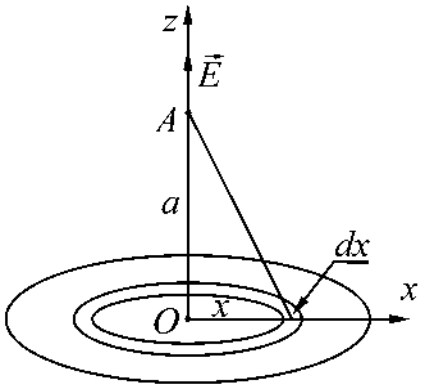


Рисунок 8.6

Потенціал кільця A:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi\sigma x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \qquad (8.5)$$

Потенціал диска визначимо інтегруванням (8.5):

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right).$$

Враховуючи симетрію, можна бачити, що вектор напруженості електричного поля в точці A спрямований уздовж осі диска, тому, розглядаючи a як змінну, отримаємо $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{da}\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k},$$

де $\vec{k}$ – орт, спрямований вздовж осі z.

Відповідь: $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right)$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)\vec{k}$.

8.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Відстань l між вільними зарядами $q_1 = 180$ нКл і $q_2 = 720$ нКл дорівнює 60 см. Який негативній заряд q_3 потрібно розташувати між вказаними зарядами, щоб система зарядів знаходилася в рівновазі? Визначити його відстань від заряду q_1.

Відповідь: $q_3 = -8 \cdot 10^{-8}$ Кл, $l_1 = 20$ см від заряду q_1.

Задача 2. У вершинах квадрата знаходяться однакові заряди $q = 0{,}33$ нКл. Який заряд q_1 необхідно розташувати в центрі квадрата, щоб система була у рівновазі?

Відповідь: $q_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)q = -0{,}287$ нКл.

Задача 3. Тонкий стрижень довжиною $l = 10$ см рівномірно заряджений. Лінійна густина τ заряду дорівнює 1 мкКл/м. На продовженні осі стрижня на відстані $a = 20$ см від ближнього його кінця знаходиться точковий заряд $q = 100$ нКл. Визначити силу F взаємодії зарядженого стрижня і точкового заряду.

Відповідь: $F = \dfrac{q\tau l}{4\pi\varepsilon_0 (l + a)a} = 1{,}5$ мН.

Задача 4. Тонке напівкільце радіусом $R = 10$ см несе рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 1$ мкКл/м. У центрі кривизни напівкільця розташовано заряд $q = 20$ нКл. Визначити силу F взаємодії точкового заряду і зарядженого напівкільця.

Відповідь: $F = \dfrac{q \cdot \tau}{2\pi\varepsilon_0 R} = 3{,}6$ мН.

Задача 5. Електричне поле створене двома точковими зарядами $q_1 = 10$ нКл і $q_2 = -20$ нКл, що розташовані на відстані $d = 20$ см один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, віддаленій від першого заряду на $r_1 = 30$ см і від другого – на $r_2 = 50$ см.

Відповідь: $E = 280$ В/м.

Задача 6. Електричне поле, створене двома точковими зарядами $q_1 = 40$ нКл і $q_2 = -10$ нКл, що знаходяться на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити напруженість E поля в точці, віддаленій від першого заряду на $r_1 = 12$ см і від другого на $r_2 = 6$ см.

Відповідь: $E = 23{,}4 \cdot 10^3$ В/м.

Задача 7. Дві кульки масою $m = 1$ г кожна підвішені на нитках, верхні кінці яких з'єднані. Довжина кожної нитки $l = 10$ см. Які однакові заряди слід передати кулькам, щоб нитки розійшлися на кут $\alpha = 60^\circ$?

Відповідь: $q = 2l\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 mg}{\sqrt{3}}} = 79{,}3$ нКл.

Задача 8. Довгий прямий тонкий дріт несе рівномірно розподілений заряд. Обчислити лінійну густину τ заряду, якщо напруженість поля на відстані $r = 0{,}5$ м від дроту напроти його середини $E = 2$ В/см.

Відповідь: $\tau = 2\pi\varepsilon_0 rE = 5{,}65$ мКл/м.

Задача 9. Тонке дротяне кільце радіусом r має електричний заряд q. Яким буде приріст сили, яка розтягує дріт, якщо в центрі кільця розташувати точковий заряд q_0?

Відповідь: $\Delta F = \dfrac{q_0 q}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$.

Задача 10. Чотири позитивні точкові заряди, по $q = 7$ нКл кожен, розміщені у вершинах квадрата. Сила, яка діє з боку трьох зарядів на четвертий, дорівнює 20 мкН. Знайти довжину сторони квадрата.

Відповідь: $a = \sqrt{\dfrac{1{,}9}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 F}} = 0{,}2$ м.

Задача 11. Дуже довга пряма рівномірно заряджена нитка має заряд τ на одиницю довжини. Знайти модуль і напрямок вектора напруженості електричного поля в точці, яка віддалена від нитки на відстань y і розташована на перпендикулярі до нитки, що проходить через один із її кінців.

Відповідь: $E = \dfrac{\sqrt{2}\tau}{4\pi\varepsilon_0 y}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 12. На відрізку тонкого прямого провідника рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Обчислити потенціал φ, створений зарядом у точці, що розташована на осі провідника та віддалена від ближнього кінця провідника на відстань, що дорівнює довжині цього відрізка.

Відповідь: $\varphi = 62{,}4$ В.

Задача 13. Тонкий стрижень довжиною $l = 0{,}1$ м має рівномірно розподілений заряд $q = 1$ нКл. Знайти потенціал φ електричного поля в точці, що міститься на осі стрижня на відстані $a = 0{,}2$ м від найближчого кінця.

Відповідь: $\varphi = 36{,}5$ В.

Задача 14. По тонкому кільцю радіусом $R = 10$ см рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10$ нКл/м. Визначити потенціал φ у точці, яка лежить на осі кільця на відстані $a = 5$ см від його центра.

Відповідь: $\varphi = 505$ В.

Задача 15. Тонкі стрижні утворюють квадрат зі стороною $a = 0{,}1$ м. Стрижні заряджені з лінійною густиною $\tau = 1{,}33$ нКл/м. Знайти потенціал φ у центрі квадрата.

Відповідь: $\varphi = 84{,}2$ В.

Задача 16. Два точкових заряди $q_1 = 6$ нКл і $q_2 = 3$ нКл розташовані на відстані $d = 0{,}6$ м один від одного. Яку роботу необхідно виконати зовнішнім силам, щоб зменшити відстань між зарядами вдвічі?

Відповідь: $A = 2{,}7 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 17. Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною $\tau = 0{,}4$ мкКл/м. Визначити різницю потенціалів точок 1 і 2, якщо точка 2 знаходиться в $\eta = 2$ рази далі від нитки, ніж точка 1.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2 = 5$ кВ.

Задача 18. Зігнутий кільцем радіусом $R = 0{,}1$ $\tau = 600$ нКл/м. Яку роботу A потрібно виконати,

щоб перенести заряд $q = 5$ нКл з центра кільця в точку, що розташована на осі кільця на відстані $l = 0,2$ м від його центра?

Відповідь: $A = 94$ мкДж.

Задача 19. Знайти напруженість електричного поля E в точці $A(4,2)$, потенціал якого залежить від координат за законом $\varphi = a(2x - xy)$, де $a = 4$ В/м.

Відповідь: $E = 16$ В/м.

Задача 20. Знайти потенціальну енергію U системи трьох точкових зарядів $q_1 = 10$ нКл, $q_2 = 20$ нКл та $q_3 = -30$ нКл, які розташовані у вершинах рівнобічного трикутника зі стороною $a = 0,1$ м.

Відповідь: $U = -63$ мкДж.

Задача 21. Чому дорівнює потенціальна енергія U системи чотирьох однакових точкових зарядів $q = 10$ нКл, які розташовані у кутах квадрата зі стороною $a = 0,1$ м?

Відповідь: $U = 48,8$ мкДж.

Задача 22. Різниця потенціалів між точками однорідного електричного поля, що лежать на одній силовій лінії на відстані 12 см одна від одної, дорівнює 24 В. Яка напруженість електричного поля?

Відповідь: $E = 200$ В/м.

Задача 23. Напруженість однорідного електричного поля в деякій точці дорівнює 120 В/м. Визначити різницю потенціалів між цією точкою та іншою, яка лежить на цій силовій лінії на відстані $\Delta r = 1$ мм від першої.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0,12$ В.

Задача 24. У центрі куба розташований точковий заряд q. Визначити потік Φ_E вектора напруженості крізь: а) повну поверхню куба; б) одну із граней куба.

Відповідь: а) $\Phi_E = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ незалежно від положення заряду в кубі;

б) $\Phi_E = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$, якщо заряд розташований в центрі куба.

Задача 25. По нескінченній площині рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma = 1$ мкКл/м^2. На деякій відстані від площини розташовано коло радіусом $r = 10$ см. Знайти потік вектора напруженості поля Φ_E через коло, якщо кут між площиною кола і нескінченною площиною α.

Відповідь: $\Phi_E = 35\cos\alpha$ В·м.

Задача 26. Металевій сфері надали заряд $q = 1$ нКл. Радіус сфери $R = 15$ см. Визначити напруженість поля $\vec{E}$: а) в центрі сфери; б) на поверхні сфери; в) зовні сфери на відстані $r = 10$ см від її поверхні.

Відповідь: а) 0; б) 0,4 кВ/м; в) 144 В/м.

Задача 27. Заряд $q = 0,4$ мкКл рівномірно розподілений по об'єму сфери радіусом $R = 3$ см**.** Знайти напруженість поля E на відстані $r_1 = 2$ см і $r_2 = 4$ см від центра сфери. Відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 5$.

Відповідь: $E_1 = 533$ кВ/м, $E_2 = 2,26$ кВ/м.

Задача 28. Нескінченна тонка пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною τ. Користуючись теоремою Гауса, знайти модуль напруженості поля E в залежності від відстані *r* між ниткою та точкою спостереження.

Відповідь: $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Задача 29. Три однакових точкових заряди по 20 нКл розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. На кожен заряд діє сила $F = 10$ мН. Знайти довжину *a* сторони трикутника.

Відповідь: $a = q\sqrt{\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 F}} = 2,5\cdot 10^{-2}$ м.

Задача 30. Дві однакових кульки вагою $m = 9$ г знаходяться одна від одної на відстані r, яка значно перевищує їх розміри. Які однакові заряди необхідно помістити на кульках, щоб сила їх кулонівської взаємодії врівноважувала силу гравітаційного тяжіння?

Відповідь: $q = m\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} = 7,74\cdot 10^{-13}$ Кл.

9 ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

9.1 Мета заняття

Навчитися розраховувати електричні поля в діелектриках, визначати поверхневі та об'ємні густини вільних і зв'язаних зарядів, поляризованість і діелектричну проникність діелектриків.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [3, розд. 2; 4, розд. 2; 5, §13…16], відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв'язання завдань, наведених як приклад.

Під час вивчення теоретичного матеріалу особливу увагу необхідно звернути на те, що під дією зовнішнього поля діелектрики, незалежно від типу молекул, набувають дипольний момент, тобто поляризуються. Поляризований діелектрик стає джерелом електричного поля, яке накладається на поле вільних зарядів, а самі молекули зазнають дії цього сумарного поля. Для розв'язання задач необхідно мати уяву про вільні і зв'язані заряди, засвоїти смисл теореми Гауса і таких фізичних величин, як вектор поляризації діелектрика, вектор електричного зміщення.

9.3 Основні закони і формули

1. Вектор поляризації (поляризованість) діелектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\Delta V} = \frac{\vec{p}_V}{\Delta V},$$

де $\vec{p}_i$ – електричний дипольний момент i-ї молекули, N – кількість молекул в об'ємі ΔV, $\vec{p}_V$ – дипольний момент об'єму ΔV.

2. Зв'язок поляризованості $\vec{P}$ з вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

де χ – діелектрична сприйнятливість діелектрика, ε_0 – електрична стала.

3. Теорема Гауса для поляризованості

– в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -\sum q',$$

де $\oint_S \vec{P} d\vec{S}$ – потік вектора поляризації крізь замкнуту поверхню, $\sum q'$ – алгебраїчна сума зв'язаних зарядів всередині поверхні S.

– в диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{P} = -\rho',$$

де ρ' – об'ємна густина зв'язаних зарядів.

4. Вектор електричного зміщення (електричної індукції)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

5. Теорема Гауса для вектора електричної індукції

– в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q,$$

де $\oint_S \vec{D} d\vec{S}$ – потік вектора електричної індукції, $\sum q$ – алгебраїчна сума сторонніх (вільних) зарядів, охоплених поверхнею *S*;

– в диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho,$$

де ρ – об'ємна густина вільних зарядів.

6. Зв'язок вектора електричного зміщення з вектором напруженості електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0(\chi + 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

де $\varepsilon = \chi + 1$ – діелектрична проникність діелектрика.

7. Напруженість поля всередині діелектрика

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

де E_0 – зовнішнє електричне поле.

8. Умови на межі розділу двох діелектриків

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$$

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad D_{1n} = D_{2n};$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma;$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma',$$

де E_τ, E_n – тангенціальна та нормальна складові вектора напруженості, D_τ, D_n – тангенціальна та нормальна складові вектора електричного зміщення, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – діелектричні проникності двох діелектриків, σ, σ' – поверхневі густини вільних і зв'язаних зарядів на граничній поверхні.

9. Зв'язок вектора поляризованості з поверхневою густиною зв'язаних зарядів

$$P_n = \sigma'.$$

10. Зв'язок вектора електричного зміщення з поверхневою густиною вільних зарядів

$$D_n = \sigma.$$

9.4 Контрольні запитання та завдання

1. У чому відмінність діелектриків від провідників?

2. Що називається поляризацією?

3. Які види поляризації діелектриків ви знаєте?

4. Які заряди називаються зв'язаними, вільними?

5. Дайте визначення поляризованості.

6. Як поляризованість пов'язана з напруженістю електричного поля?

7. Як зв'язана поляризованість діелектрика з поверхневою та об'ємною густинами зв'язаних зарядів?

8. Сформулюйте теорему Гауса для поляризованості в інтегральній та диференціальній формах.

9. Який фізичний смисл діелектричної проникності?

10. Що називається вектором електричного зміщення.

11. Як вектор електричного зсуву пов'язаний з напруженістю електричного поля?

12. Сформулюйте теорему Гауса для вектора електричного зсуву в інтегральній та диференціальній формах.

13. Які речовини називаються сегнетоелектриками?

14. За якими ознаками можна відрізнити сегнетоелектрики від звичайних діелектриків?

15. Що називається коерцитивною силою?

16. Що називається залишковою поляризацією?

17. Які умови для напруженості та вектора електричного зсуву на границі розділу двох діелектриків?

9.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Металева куля радіусом $R=5$ см оточена шаром фарфору завтовшки $d = 2$ см (рис. 9.1). Визначити поверхневі густини σ_1' і σ_2' зв'язаних зарядів відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях діелектрика. Заряд кулі Q = 10 нКл.

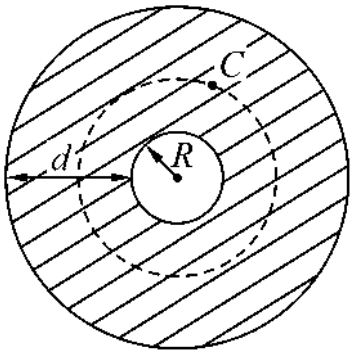


Рисунок 9.1

Дані: Q = 10 нКл, ε = 6, $R=5$ см, $d = 2$ см.

Знайти: σ_1', σ_2' .

Аналіз і розв'язання

Наявність шару діелектрика, що оточує металеву кулю, внаслідок поляризації приведе до зміни напруженості поля. Щоб знайти напруженість поля всередині діелектрика, скористаємося теоремою Гауса для вектора зміщення $\vec{D}$.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i \,. \qquad (9.1)$$

Лінії вектора $\vec{D}$, як і силові лінії поля $\vec{E}$, будуть спрямовані радіально. Виберемо всередині діелектричного шару точку C і проведемо через неї допоміжну сферичну поверхню S_C. Тоді

$$\oint_{S_C} \vec{D} d\vec{S} = \oint_{S_C} D dS = D \oint_{S_C} dS = D 4\pi r_C^2 . \qquad (9.2)$$

Допоміжна поверхня охоплює вільні заряди, що знаходяться на внутрішній кулі, тобто

$$\sum q_i = Q . \qquad (9.3)$$

Підставивши (9.2) і (9.3) в (9.1), одержимо:

$$D 4\pi r_C^2 = Q ;$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r_C^2} . \qquad (9.4)$$

Оскільки

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} , \qquad (9.5)$$

то з (9.4) і (9.5) знаходимо:

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r_C^2} .$$

В діелектричному середовищі, для $R_1 > r > R$, $R_1 = R + d$

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} . \qquad (9.6)$$

У вакуумі, для $r > R_1$

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} . \qquad (9.7)$$

З (9.6) і (9.7) випливає, що на межі ($r = R_1$) діелектрик-вакуум вектор напруженості E зазнає розрив і величина стрибка

$$|\Delta E| = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} ,$$

де σ' – поверхнева густина зв'язаних зарядів на межі діелектрик-вакуум. Знайдемо поверхневу густину зв'язаних зарядів, що з'явилися на зовнішній і внутрішній поверхнях діелектричного шару.

При $r = R_1$

$$\sigma'_2 = \varepsilon_0 |\Delta E| . \qquad (9.8)$$

Стрибок ΔE знайдемо з рівнянь (9.7) і (9.6)

$$|\Delta E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right). \qquad (9.9)$$

Тоді поверхневу густину зв'язаних зарядів на зовнішній поверхні діелектрика отримаємо, підставивши (9.9) у (9.8) і врахувавши, що $R_1 = R + d$

$$\sigma_2' = \frac{Q}{4\pi(R+d)^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right) = \frac{10^{-8}}{4\pi\left(7\cdot 10^{-2}\right)^2}\cdot\frac{5}{6} = 0{,}13 \text{ мкКл/м}^2.$$

Щоб знайти поверхневу густину зв'язаних зарядів σ_1' на внутрішній поверхні діелектричного шару ($r = R$), необхідно звернути увагу, що на цій поверхні, яка межує з поверхнею металевої кулі, крім зв'язаних зарядів, що виникли внаслідок поляризації, є і вільні заряди з поверхневою густиною σ.

Таким чином

$$\sigma + \sigma_1' = \varepsilon_0 |\Delta E|,$$

де $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$.

$$|\Delta E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} - E_{внутр},$$

де $E_{внутр}$ – поле у металевій кулі.

Але $E_{внутр} = 0$, тому

$$|\Delta E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}.$$

Тоді

$$\sigma_1' = \varepsilon_0|\Delta E| - \sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} - \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -0{,}255 \text{ мкКл/м}^2.$$

Відповідь: $\sigma_1' = -0{,}255$ мкКл/м^2, $\sigma_2' = 0{,}13$ мкКл/м^2.

Задача 2. Нескінченна пластина з проникністю ε заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ. Товщина пластини дорівнює *2a*. Поза пластиною $\varepsilon_1 = 1$. Вісь *x* перпендикулярна до пластини, а початок координат збігається з серединою пластини (рис. 9.2). Знайти потенціал φ і поле E_x всередині пластини як функцію *x* (потенціал у точці *O* пластини покласти рівним нулю).

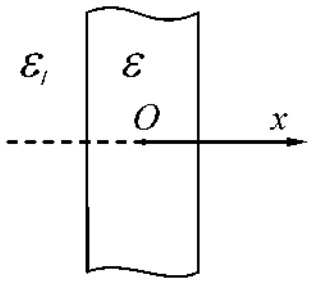


Рисунок 9.2

Дані: ε, ρ, $d = 2a$, $\varepsilon_1 = 1$;

Знайти: φ , E_x.

Аналіз і розв'язання

Вектор зміщення $\vec{D}$ і об'ємна густина вільних зарядів зв'язані, як відомо, теоремою Гауса у диференціальній формі

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho .$$

Цей самий вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} .$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля у пластині.

Або для проекції $\vec{D}$ на вісь *x* маємо:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \rho . \qquad (9.10)$$

І аналогічно

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon E_x . \qquad (9.11)$$

З рівняння (9.10) маємо:

$$D_x = \rho x . \qquad (9.12)$$

З рівняння (9.11) з урахуванням (9.12) отримаємо для $|x| \le a$:

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0 \varepsilon} . \qquad (9.13)$$

Для того, щоб визначити потенціал φ всередині діелектричної пластини, скористаємося тим, що вектор напруженості поля

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi ,$$

або для проекції вектора $\vec{E}$ на вісь x маємо:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Звідки з урахуванням (9.13)

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x dx = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Відповідь: $\varphi(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Задача 3. Скляна пластинка з проникністю $\varepsilon_2 = 6$ внесена в однорідне електричне поле з напруженістю $E_1 = 10$ В/м і розташована так, що кут α_1 між нормаллю до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює 30° (рис. 9.3). Знайти: 1) напруженість E_2 поля у пластинці; 2) кут α_2, який це поле утворює з

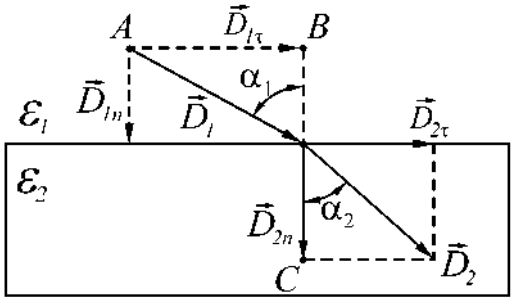


Рисунок 9.3

нормаллю до пластинки; 3) густину σ' зв'язаних зарядів, що виникли на поверхнях пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою $\varepsilon_1 = 1$.

Дані: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 6$, $E_1 = 10$ В/м, $\alpha_1 = 30°$,

Знайти: E_2, α_2, σ'.

Аналіз і розв'язання

1. З граничних умов, яким задовольняють вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на межі розділу двох однорідних та ізотропних діелектричних середовищ, виходить, що нормальна складова вектора зміщення $\vec{D}$ в обох діелектриках одна й та сама, тобто

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Оскільки $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ то

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n},$$

звідки

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{9.14}$$

Таким чином, нормальні складові вектора $\vec{E}$ на межі розподілу зазнають розриву.

Для тангенціальних складових граничні умови, як відомо, мають такий вигляд:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \tag{9.15}$$

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

З рис. 9.3 випливає, що

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}} = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}. \tag{9.16}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}} = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}. \tag{9.17}$$

Поділимо (9.16) на (9.17):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{E_{1\tau} E_{2n}}{E_{1n} E_{2\tau}}.$$

З урахуванням (9.14) і (9.15) одержимо:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{9.18}$$

звідки

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot \operatorname{tg}\alpha_1\right) = \operatorname{arctg}\left(6\cdot \operatorname{tg}30^\circ\right) = 74^\circ.$$

2. Щоб знайти напруженість поля E_2 у пластинці, скористаємося рис. 9.3. З прямокутного трикутника OCD_2

$$D_2 = \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}\right)^2} = D_{2n}\sqrt{1+tg^2\alpha_2}\,.$$

Оскільки з (9.18) $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_1\cdot\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, а $D_{1n} = D_{2n}$, то

$$D_2 = D_{2n}\sqrt{1+\left(\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2} = D_{2n}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}} =$$

$$= \frac{D_{2n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_1\cos\alpha_1}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1}. \qquad (9.19)$$

З прямокутного трикутника ABO

$$D_{1n} = D_1\cos\alpha_1. \qquad (9.20)$$

Враховуючи, що $D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1$, $D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2$ і підставляючи ці вирази, а також вираз (9.20) у формулу (9.19), отримаємо

$$E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1^2\cos^2\alpha_1+\varepsilon_2^2\sin^2\alpha_1} = 5{,}2 \text{ В/м}.$$

3. Під дією електричного поля E_1 скляна пластинка поляризується і на поверхнях пластини з'являються зв'язані заряди з густиною σ', яка визнача-ється нормальною складовою вектора поляризації $\vec{P}$, тобто

$$\sigma' = P_n.$$

Оскільки

$$P_n = \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)E_{2n}, \text{ а } E_{2n} = E_{1n}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

то

$$\sigma' = (\varepsilon_2 - 1)\varepsilon_0\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n},$$

тобто

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1\cos\alpha_1 = 64 \text{ нКл/м}^2.$$

Відповідь: $E_2 = 5{,}2$ В/м, $\alpha_2 = 74^\circ$, $\sigma' = 64$ нКл/м².

9.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. В однорідному електростатичному полі напруженістю 700 В/м перпендикулярно полю розміщена нескінчена плоскопаралельна скляна плас-

ε =7). Визначити: 1) напруженість електростатичного поля всередині пластини; 2) електричне зміщення всередині пластини; 3) поляризованість скла; 4) поверхневу густину зв'язаних зарядів на склі.

Відповідь: $E = 100$ В/м, $D = 6{,}19$ нКл/м^2, $P = 5{,}31$ нКл/м^2, $\sigma' = 5{,}31$ нКл/м^2.

Задача 2. Між пластинами плоского конденсатора розміщені два шари діелектрика – слюдяна пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) товщиною 1 мм та парафін ($\varepsilon_2 = 2$) товщиною 0,5 мм. Визначити: 1) напруженість електростатичних полів у шарах діелектрика; 2) електричне зміщення, якщо різниця потенціалів між пластинами конденсатора 500 В.

Відповідь: $E_1 = 182$ кВ/м, $E_2 = 637$ кВ/м, $D = 11{,}3$ мкКл/м^2.

Задача 3. Відстань між пластинами плоского конденсатора складає 1 см, різниця потенціалів 200 В. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів ебонітової пластинки, розміщеної на нижній обкладинці конденсатора. Товщина пластини 8 мм.

Відповідь: $\sigma' = 253$ нКл/м^2.

Задача 4. Вільні заряди рівномірно розташовані з об'ємною густиною $\rho = 5$ нКл/м^3 по кулі радіусом 10 см з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 5$. Визначте напруженість електростатичного поля на відстанях 5 см та 15 см від центра кулі.

Відповідь: $E_1 = 1{,}88$ В/м, $E_2 = 8{,}37$ В/м.

Задача 5. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений парафіном ($\varepsilon = 2$). Відстань між пластинами $d = 8{,}85$ мм. Яку різницю потенціалів необхідно подати на пластини, щоб поверхнева густина зв'язаних зарядів на парафіні склала $\sigma = 0{,}1$ нКл/см^2?

Відповідь: $U = 1$ кВ.

Задача 6. Відстань d між пластинами плоского конденсатора дорівнює 2 мм, різниця потенціалів U = 1,8 кВ. Діелектрик – скло (ε =7). Визначити діелектричну сприйнятливість скла і поверхневу густину σ' поляризаційних (зв'язаних) зарядів на поверхні скла.

Відповідь: $\chi = 6$, $\sigma' = 47{,}7$ мкКл/м^2.

Задача 7. Ебонітова плоскопаралельна пластина розташована в однорідному електричному полі напруженістю $E_0 = 2$ МВ/м. Площина пластини перпендикулярна лініям напруженості. Визначити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на поверхнях пластини.

Відповідь: $\sigma' = \pm\ 11{,}8$ мкКл/м^2.

Задача 8. У деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю ε електричне зміщення має значення $\vec{D}$. Чому дорівнює поляризованість $\vec{P}$ у цій точці?

Відповідь: $\vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\vec{D}$.

Задача 9. Поляризованість нескінченної плоско-паралельної пластини з парафіну (ε=2), розміщеної перпендикулярно до напрямку електричного поля, дорівнює 0,44 нКл/м^2. Визначити напруженість поля E_0.

Відповідь: E_0=100 В/м.

Задача 10. Дві нескінченні паралельні площини заряджені з густиною $+\sigma$ і $-\sigma$. Спочатку вони перебувають у вакуумі. Потім проміжок між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю ε. Що відбувається при цьому у проміжку з напруженістю $\vec{E}$ поля, зміщенням $\vec{D}$, різницею потенціалів U між площинами?

Відповідь: а) $\vec{E}$ зменшується у ε разів; б) $\vec{D}$ залишається незмінним; в) U зменшується в ε разів.

Задача 11. Знайти напруженість $\vec{E}$ і електричне зміщення $\vec{D}$ всередині нескінченної плоскопаралельної пластини з фарфору (ε=5), яку розмістили перпендикулярно до напрямку поля напруженістю E_0=200 В/м.

Відповідь: E = 40 В/м, D =1,77 нКл/м^2.

Задача 12. Визначити, за якою напруженості E середнього макроскопічного поля у діелектрику (ε=3) поляризованість P досягає значення, що дорівнює 200 мкКл/м^2.

Відповідь: E = 11,3 МВ/м.

Задача 13. Діелектрик розмістили в електричному полі напруженістю E_0=20 кВ/м. Чому дорівнює поляризованість P діелектрика, якщо напруженість E середнього макроскопічного поля у діелектрику виявилась рівною 4 кВ/м?

Відповідь: P = 141,6 нКл/м^2.

Задача 14. У середині кулі з однорідного ізотропного діелектрика з ε = 5 утворене однорідне електричне поле з напруженістю E = 100 В/м. Знайти максимальну поверхневу густину $\sigma'_{\max}$ зв'язаних зарядів і середнє значення σ' зарядів одного знака.

Відповідь: $\sigma'_{\max} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = 3{,}5$ нКл/м^2, $\langle\sigma'\rangle = \dfrac{\sigma'_{\max}}{2} = 1{,}75$ нКл/м^2.

Задача 15. Напруженість електричного поля біля поверхні Землі $E_0 = -130$ В/м (знак мінус показує, що вектор напруженості спрямований до центра Землі). На висоті h=0,5 км напруженість $E_1 = -50$ В/м. Обчислити об'ємну густину ρ електричних зарядів в атмосфері, вважаючи, що вона до висоти h є сталою. Радіус Землі $R_3 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

Відповідь: $\rho = 1{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл/м^3.

Задача 16. У проміжок між різнойменними зарядженими площинами ввели пластину з діелектрика, яка не несе сторонніх зарядів (рис. 9.4). Штриховою лінією на рисунку показана уявна замкнена поверхня, яка частково проходить всередині діелектрика, частково поза ним. Чому дорівнює потік вектора D через цю поверхню?

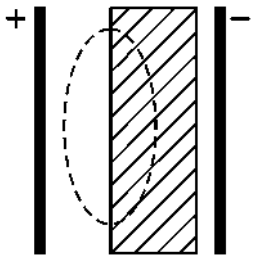


Рисунок 9.4

Відповідь: $\Phi_D = 0$.

Задача17. Всередині діелектрика відомі його поляризованість $\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$ і напруженість поля $\vec{E} = \frac{a}{\varepsilon_0}(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})$, де a – стала. Визначити густини зв'язаних та сторонніх зарядів всередині діелектрика. Чому дорівнює діелектрична проникність матеріалу?

Відповідь: $\rho' = -12a$, $\rho = 18a$, $\varepsilon = 3$.

Задача 18. Проміжок між пластинами плоского конденсатора заповнений діелектриком. Товщина проміжку $d = 1$ мм, напруга на пластинах конденсатора $U = 1000$ В, а поверхнева густина індукованого на діелектрику заряду дорівнює 11,5 мкКл/м^2. Обчислити діелектричну проникність матеріалу, що заповнює проміжок між пластинами.

Відповідь: $\varepsilon = 2{,}3$.

Задача 19. Поверхнева густина зв'язаних зарядів на діелектричній пластині, що розміщена між пластинами плоского конденсатора дорівнює $\sigma' = 5{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. Пластини конденсатора притягуються одна до одної з силою $F = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н. Площа пластин дорівнює $S = 100$ см^2. Визначити проникність діелектричної пластини.

Відповідь: $\varepsilon = 7$.

Задача 20. Однорідний діелектрик має вигляд сферичного шару. внутрішній та зовнішній радіуси якого дорівнюють a і b. Нарисуйте і поясніть графіки залежності напруженості E і потенціалу φ електричного поля від відстані r до центра системи, якщо діелектрику надати позитивний сторонній заряд, що розподілений рівномірно: 1) по внутрішній поверхні шару; 2) по об'єму шару.

Задача 21. Сферичний шар радіусами $R_1 = 3$ см і $R_2 = 5$ см рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho = 3$ мкКл/м^3. Діелектрична проникність шару $\varepsilon_1 = 5$, діелектрична проникність середовища зовні шару ($r > R_2$) $\varepsilon_2 = 2{,}5$. Знайти індукцію і напруженість електричного поля: в центрі кулі; між поверхнями шару на відстані 4 см від центра; зовні шару на відстані 4 см від зовнішньої поверхні. Чому дорівнює різниця потенціалів між поверхнями шару?

Відповідь: 1) $D = E = 0$; 2) $D = 23$ нКл /м^2, $E = 523$ В/м;
3) $D = 12{,}1$ нКл /м^2, $E = 550$ В/м; 4) $\Delta\varphi = 9{,}94$ В.

Задача 22. Система з двох однорідних та ізотропних діелектриків, що розділені плоскою межею, розміщена в електричному полі. Напруженість поля у першому діелектрику утворює з нормаллю до межі розподілу кут $\alpha_1 = 20^\circ$. У другому діелектрику ($\varepsilon_2 = 3$) кут α_2 між нормаллю до межі розподілу і напрямком поля в ньому складає $28^\circ 36'$. Визначити проникність ε_1 першого діелектрика.

Відповідь: $\varepsilon_1 = 2$.

Задача 23. Біля поверхні фарфору ($\varepsilon = 6$) напруженість поля у повітрі дорівнює $E = 2 \cdot 10^4$ В/м. Напрямок поля утворює з нормаллю до поверхні кут $\alpha = 40°$. Визначити: 1) кут β між напрямком поля та нормаллю у фарфорі;

2) напруженість поля у фарфорі; 3) поверхневу густину зв'язаних зарядів у фарфорі.

Відповідь: $\beta = 78°46'$; $E = 1{,}31 \cdot 10^4$ В/м; $\sigma' = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2.

Задача 24. Поблизу межі розділу скло-вакуум напруженість електричного поля у вакуумі E_0=10 В/м, кут між вектором напруженості та нормаллю до межі $\alpha_0 = 30^\circ$. Знайти напруженість поля у склі, кут між вектором напруженості та нормаллю до межу розділу у склі, а також поверхневу густину зв'язаних зарядів на межі розділу.

Відповідь: $tg\alpha = \varepsilon tg\alpha_0, E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}\sqrt{\cos^2\alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2\alpha_0}$,

$\sigma' = \varepsilon_0(1 - 1/\varepsilon)E_0 \cos\alpha_0$.

Задача 25. За деяких умов поляризованість нескінченої незарядженої пластини має вигляд $\vec{P} = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$, де P_0 – вектор, перпендикулярний до пластини, x – відстань від середини пластини, d – її напівтовщина. Знайти напруженість електричного поля всередині пластини та різницю потенціалів між її поверхнями.

Відповідь: $\vec{E} = -\vec{P}_0(1 - x^2/d^2)/\varepsilon_0$, $U = \dfrac{4P_0 d}{3\varepsilon_0}$.

Задача 26. Точковий заряд q розташований у центрі кулі з однорідного ізотропного діелектрика з проникністю ε. Знайти поляризованість $\vec{P}$ як функцію радіус-вектора $\vec{r}$ відносно центра сфери, а також зв'язаний заряд всередині кулі.

Відповідь: $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$, $q' = \dfrac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot q$.

Задача 27. Нескінчена пластина з діелектрика з проникністю ε заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ. Товщина пластини *2a*. Поза пластиною $\varepsilon = 1$. Знайти: а) поляризованість $\vec{P}$ діелектрика як функцію x; б) поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів на лівій ($x = -a$) і правій ($x = +a$) межах пластини; в) об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів.

Відповідь: а) $\vec{P} = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\rho x\vec{i}$; б) на обох поверхнях $\sigma' = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\rho a$;

в) $\rho' = \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)\rho$.

Задача 28. Нескінченна пластина з ізотропного діелектрика розміщена в перпендикулярному до неї однорідному зовнішньому електричному полі напруженістю E_0. Товщина пластини a, проникність змінюється лінійно від значення ε_1 на лівій межі до ε_2 на правій. Поза пластиною $\varepsilon = 1$ (рис. 9.5). Знайти: а) $\nabla\vec{E}$ всередині пластини як функцію x; б) потік вектора $\vec{E}$ крізь уявну циліндричну поверхню, з твірними, паралельними осі x; основи циліндра розміщені у

точках $x_1 = -a/2$, $x_2 = a/2$; площа кожної основи дорівнює S; в) об'ємну густину ρ' зв'язаних зарядів як функцію x.

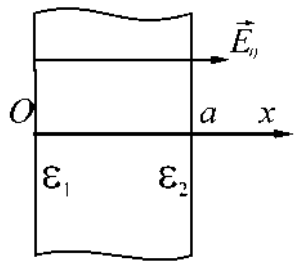


Рисунок 9.5

Відповідь: а) $\nabla\vec{E} = -\dfrac{E_0 k}{(\varepsilon_1 + kx)^2}$, де $k = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a}$;

б) $\Phi_E = SE_0\left[\dfrac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - 1\right]$;

в) $\rho' = -\dfrac{\varepsilon_0 E_0 k}{(\varepsilon_1 + kx)^2}$.

Задача 29. Знайти ρ' усередині пластини з задачі 18, якщо $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, a=1см, E_0=3кВ/м.

Відповідь: $\rho' = -\dfrac{(4\varepsilon_0 E_0/a)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)^2} = -0{,}59$ мкКл/м^2.

Задача 30. Нескінченна діелектрична пластина товщиною a розміщена у зовнішньому, перпендикулярному до пластини, однорідному електричному полі з напруженістю E_0. Проникність пластини змінюється за деяким законом $\varepsilon(x)$, причому $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ де x=0 знаходиться на одній грані, а вісь x спрямована перпендикулярно до пластини від цієї грані до іншої. Який вигляд повинна мати функція $\varepsilon(x)$, щоб густина об'ємних зв'язаних зарядів змінювалася за законом $\rho' = \rho'_1/(1 + \alpha x)$ де ρ'_1 і α сталі? Поза пластиною $\varepsilon = 1$.

Відповідь: $\varepsilon(x) = \alpha\varepsilon_1\varepsilon_0 E_0\left[\varepsilon_1\rho'_1 \ln(1 + \alpha x) + \alpha\varepsilon_0 E_0\right]$.

10 ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ, ЕЛЕКТОЄМНІСТЬ

10.1 Мета заняття

Ознайомитися з поведінкою провідників в електричному полі. З′ясувати, як розміщуються електричні заряди на поверхні зарядженого провідника, яке явище носить назву електростатичної індукції, а також яке значення приймає напруженість електростатичного поля всередині провідника. З'ясувати, що таке електроємність та навчитися розраховувати ємності простих систем та енергію електричного поля.

10.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи

Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом та [3, розд. 3; 4, розд. 3; 5, §17,18]. Якщо металевий провідник розміщений в електричному полі, то на хаотичний рух електронів накладається впорядкований рух у напрямі, протилежному напрямку напруженості поля. Явище перерозподілу зарядів усередині провідника під дією зовнішнього електричного поля називається електростатичною індукцією. Заряди, які виникають на поверхні провідника, мають назву наведених або індукованих. Внаслідок такого перерозподілу зарядів поле всередині провідника дорівнює нулю, а поверхня провідника стає еквіпотенціальною.

10.3 Основні закони та формули

1. Напруженість електростатичного поля біля поверхні провідника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

де σ − поверхнева густина зарядів; ε − діелектрична проникність середовища, що оточує провідник.

2. Електрична ємність (ємність) відокремленого провідника:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де q − заряд провідника; φ − потенціал провідника.

3. Електрична ємність кулі радіусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

4. Електрична ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

де q − заряд, накопичений в конденсаторі; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ − різниця потенціалів між його пластинами.

5. Електрична ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

де S − площа кожної пластини конденсатора; d − відстань між пластинами.

6. Електрична ємність сферичного конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

де r_1 і r_2 − радіуси концентричних сфер.

7. Електрична ємність циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}},$$

де l − довжина пластин конденсатора; r_1 і r_2 − радіуси порожнистих коаксіальних циліндрів.

8. Ємність при послідовному з'єднанні *n* конденсаторів:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

9. Ємність при паралельному з'єднанні *n* конденсаторів:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

10. Енергія відокремленого зарядженого провідника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де C, q, φ − ємність, заряд і потенціал провідника відповідно.

11. Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де q − заряд конденсатора; C − його електроємність; $\Delta\varphi$ − різниця потенціалів між пластинами.

12. Енергія електростатичного поля плоского конденсатора:

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V,$$

де S − площа однієї пластини; U − різниця потенціалів між пластинами; $V = S \cdot d$ − об'єм конденсатора.

13. Об'ємна густина енергії електростатичного:

$$w_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

де E − напруженість електростатичного поля; D − електричне зміщення.

10.4 Контрольні запитання та завдання

1. Як розподіляються електричні заряди на зарядженому провіднику?
2. Чому дорівнюють напруженість і потенціал електростатичного поля всередині і на поверхні провідника?
3. Як виникають індуковані заряди?
4. Що таке електроємність відокремленого провідника, від чого вона залежить?
5. Чому дорівнюють електроємність конденсатора, ємність плоского, циліндричного та сферичного конденсаторів?
6. Як розрахувати електроємність батареї при паралельному та послідовному з'єднаннях конденсаторів?
7. Чому дорівнює енергія відокремленого провідника та енергія зарядженого конденсатора?
8. Як визначити електричну енергію системи заряджених тіл (провідників і непровідників)? Де локалізована ця енергія?
9. Виведіть формулу для об'ємної густини енергії електричного поля.
10. Чому зменшується сила взаємного притягання пластин зарядженого плоского конденсатора при зануренні його в рідкий діелектрик?

10.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Нескінченну металеву площину, товщина якої a, зарядили так, що густина заряду на кожній поверхні площини дорівнює σ. Далі цю площину розмістили в однорідному електричному полі напруженістю, $\vec{E} = E_0\vec{i}$ перпендикулярно площині, як подано на рис. 10.1. Визначити: 1) напруженість поля $\vec{E}'$ всередині площини, а також поле зовні площини; 2) поверхневу густину зарядів σ_1 і σ_2, яка виникає на правому та лівому боці площини.

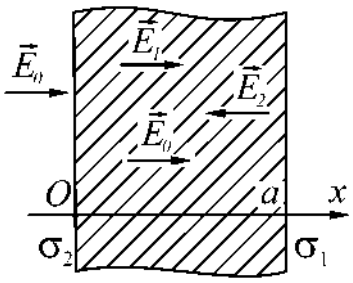


Рисунок 10.1

Дані: a, σ, $\vec{E} = E_0\vec{i}$.

Знайти: $\vec{E}'$, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{\sigma}_1$, $\vec{\sigma}_2$.

Аналіз і розв'язання

Після внесення зарядженої площини в поле заряди на поверхні площини перерозподілятимуться доти, доки напруженість поля всередині металевої поверхні не дорівнюватиме нулю ($\vec{E}' = 0$). Припустимо, що в такому випадку поверхнева густина заряду на лівому боці площини дорівнює σ_2, а на правому – σ_1. Електростатичне поле всередині металу є суперпозицією трьох полів: поля $\vec{E}_0$;

поля, обумовленого зарядами на правому боці площини $\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$; поля обумовленого зарядами на лівому боці площини $\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Згідно з рис.10.1,

$$E_0 + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 0.$$

Сумарний заряд пластини не зменшиться, тому:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma,$$

звідки маємо:

$$\sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0;\ \sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0.$$

Тоді ліворуч від площини:

$$E_1 = E_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

праворуч:

$$E_2 = E_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Відповідь: $\vec{E}' = 0$, $E_1 = E_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = E_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $\sigma_1 = \sigma - \varepsilon_0 E_0$, $\sigma_2 = \sigma + \varepsilon_0 E_0$.

Задача 2. Ємність плоского повітряного конденсатора $C = 10^{-9}$ Ф, відстань між пластинами $d = 4$ мм. На заряд $q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл, розміщений між пластинами конденсатора, діє сила $F = 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н. Площа пластини конденсатора S=100 см^2. Визначити: 1) напруженість електричного поля і різницю потенціалів між пластинами; 2) енергію і густину енергії електричного поля конденсатора.

Дані: $F = 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н, $q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл, $C = 10^{-9}$ Ф, $S = 10^{-2}$ м^2, $d = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Знайти: E, U, W, w.

Аналіз і розв'язання

Поле між пластинами конденсатора вважаємо однорідним. Напруженість поля E можна визначити як

$$E = \frac{F}{q} = 2 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Різницю потенціалів між пластинами знайдемо зі співвідношення

$$U = E \cdot d = 80\,\text{В}.$$

Ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Енергія електричного поля зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = 7{,}04 \cdot 10^{-8}\ \text{Дж}.$$

Врахувавши, що $V = S \cdot d$ – об'єм конденсатора , густина енергії:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = 1{,}75 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж/м}^3.$$

Відповідь: $E = 2 \cdot 10^4$ В/м, $U = 80\,\text{В}$, $W = 7{,}04 \cdot 10^{-8}$ Дж, $w = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^3.

Задача 3. Встановити, як змінюються ємність і енергія плоского повітряного конденсатора, якщо паралельно його обкладкам (рис. 10.2) помістити металеву пластину завтовшки $d_0 = 1$ мм. Площа обкладок конденсатора і пластини 150 см^2 , відстань між обкладками $d = 6$ мм. Конденсатор заряджений до напруги 400 В і відімкнений від батареї.

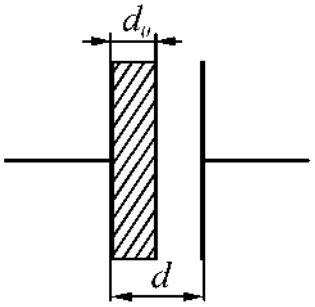


Рисунок 10.2

Дані: $\varepsilon = 1$, $d_0 = 1$ мм = 10^{-3} м, $S = 150$ см^2 = $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2, $d = 6$ мм = $6 \cdot 10^{-3}$ м, $U = 400\,\text{В}$.

Знайти: ΔC , ΔW .

Аналіз і розв'язання

Ємність та енергія конденсатора при внесенні в нього металевої пластини зміняться. Це спричинено зменшенням відстані між пластинами з d до $(d - d_0)$. Використавши формулу електроємності плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

одержимо:

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0} - \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S d_0}{d(d - d_0)} = 4{,}42 \cdot 10^{-12}\,\Phi.$$

При внесенні металевої пластини паралельно обкладинкам об'єм електричного поля зменшився на $\Delta V = S(d - d_0) - Sd = -Sd_0$.

Об'ємна густина енергії електричного поля конденсатора

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2},$$

отже,

$$\Delta W = w \cdot \Delta V = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S d_0}{2}.$$

Напруженість E поля пов'язана з напругою на обкладинках:

$$E = \frac{U}{d},$$

отже,

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2 S d_0}{2d^2} = -2{,}95 \cdot 10^{-7}\ \text{Дж}.$$

Відповідь: $\Delta C = 4{,}42 \cdot 10^{-12}$ Ф, $\Delta W = -2{,}95 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Задача 4. Знайти ємність системи з двох однакових металевих кульок з радіусами a, відстань між центрами яких b, до того ж $b >> a$.

Дані: $a,\ b,\ b >> a$.

Знайти: C.

Аналіз і розв'язання

За визначенням ємність системи $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$.

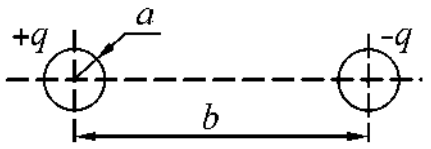


Рисунок 10.3

Нехай ліва кулька має заряд $+q$, а права $-q$ (рис. 10.3).

Згідно з принципом суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a}\right),\ \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{a} + \frac{q}{b-a}\right).$$

Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b-a} + \frac{q}{a} - \frac{q}{b-a}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b-2a}{a(b-a)}.$$

Враховуючи, що $b >> a$, отримаємо :

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

Тоді

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 2\pi\varepsilon_0 a.$$

Відповідь: $C = 2\pi\varepsilon_0 a$.

Задача 5. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл рівномірно розподілений по поверхні сфери радіусом $R = 1$ см. Діелектрична проникність середовища, яке оточує сферу, $\varepsilon = 1$. Визначити енергію поля, яка пов'язана зі сферою.

Дані: $q = 10^{-10}$ Кл, $R = 1$ см $= 10^{-2}$, $\varepsilon = 1$.

Знайти: W.

Аналіз і розв'язання

Енергію W поля, пов'язану зі сферою, визначимо за формулою:

$$W = \int_V^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV = \int_R^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

де $4\pi r^2 dr$ – сферичний шар радіусом r і завтовшки dr, а об'ємна густина енергії $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$.

Значення напруженості поля зовні сфери можна визначити за допомогою теореми Гауса. Отримаємо: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Тоді:

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2R} = 4{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}.$$

Відповідь: $W = 4{,}5$ нДж.

10.5 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Відстань між вертикальними пластинами в плоскому повітряному конденсаторі дорівнює $d = 6$ мм. Його занурюють до половини в масло ($\varepsilon = 7$). Як зміниться ємність конденсатора?

Відповідь: збільшиться в чотири рази.

Задача 2. Пластини плоского повітряного конденсатора площею $S = 150$ см^2 розсувають так, що відстань між ними збільшується від 5 до 14 мм. Яку роботу A слід при цьому виконати, якщо напруга між пластинами конденсатора стала (тобто конденсатор не відключений від джерела) і дорівнює 380 В?

Відповідь: $A = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Задача 3. Між обкладинками плоского конденсатора площею $S = 100$ см^2 кожна розташована слюда. Обкладинки притягуються одна до одної з силою $F = 0{,}03$ Н. Визначити напруженість поля конденсатора (для слюди $\varepsilon = 6$).

Відповідь: $E = 3{,}3 \cdot 10^5$ В/м.

Задача 4. На пластинках плоского вакуумного конденсатора рівномірно розподілений заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Площа обкладинок $S = 100$ см², а відстань між обкладинками $d = 3$ мм. Заряджений конденсатор відключений від батареї. Яку необхідно виконати роботу, щоб розсунути пластини до 8 мм *?*

Відповідь: $A = 0{,}706$ Дж .

Задача 5. У батарею з'єднали послідовно 10 однакових конденсаторів. Ємність кожного дорівнює $C_i = 100$ пф. Визначити ємність батареї C.

Відповідь: $C = 10$ пф.

Задача 6. Як слід з'єднати конденсатори $C_1 = 2$ пф, $C_2 = 4$ пф та $C_3 = 6$ пф, щоб загальна ємність дорівнювала 3 пф?

Відповідь: $\left(C_1 \| \, | C_2\right) + C_3$.

Задача 7. Площа обкладки конденсатора S. Простір між обкладками заповнений двошаровим діелектриком. Діелектрична проникність і товщина першого шару дорівнює ε_1 та d_1, другого – ε_2 та d_2. Знайти ємність конденсатора C.

Відповідь: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$.

Задача 8. Плоский конденсатор заповнений речовиною з діелектричною проникністю ε і питомим опором ρ. Чому дорівнює опір конденсатора, якщо його ємність C?

Відповідь: $R = \dfrac{\rho \varepsilon \varepsilon_0}{C}$.

Задача 9. Який заряд q' пройде по провідниках, що з'єднують пластини повітряного конденсатора з джерелом струму з напругою U, при зануренні конденсатора в гас (діелектрична проникність ε). Площа пластини конден-сатора S, відстань між пластинами d.

Відповідь: $q' = \dfrac{\varepsilon_0 S U}{d}(\varepsilon - 1)$.

Задача 10 Плоский повітряний конденсатор зарядили до різниці потенціалів U_0. Далі конденсатор відключили від джерела струму. Якою стала різниця потенціалів між пластинами, якщо відстань між ними збільшиться від d_0 до d, а простір між пластинами заповнити слюдою з діелектричною проникністю ε?

Відповідь: $U = \dfrac{d \cdot U_0}{\varepsilon \cdot d_0}$.

Задача 11. Електричне поле створене двома паралельними нескінчен-ними зарядженими площинами з поверхневими густинами зарядів та σ_2. Визначити напруженості електричного поля, створеного цими площинами між ними (E_1 і E_2) і зовні (E_3).

Відповідь: $E_1 = -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}$, $E_3 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$.

Задача 12. Два конденсатори зарядили до напруги U_1 та U_2, після чого їх з'єднали паралельно. Різниця потенціалів між обкладинками конденсаторів стала рівною U. Знайти відношення величин ємностей конденсаторів.

Відповідь: $\frac{C_1}{C_2}=\frac{U-U_2}{U_1-U}$.

Задача 13. На пластинах плоского повітряного конденсатора з площею пластин $S=150$ см^2 розміщений заряд $q=5\cdot10^{-8}$ Кл. Чому дорівнює сила F взаємного притягання між пластинами конденсатора?

Відповідь: $F=0{,}94\cdot10^{-2}$ Н.

Задача 14. На пластинах плоского повітряного конденсатора з площею пластин $S=150$см^2 розміщений заряд $q=5\cdot10^{-8}$ Кл. Чому дорівнює об'ємна густина w енергії електричного поля конденсатора?

Відповідь: $w=0{,}628$ Дж/м^3 .

Задача 15. Два однакових плоских конденсатори з'єднали паралельно і зарядили до різниці потенціалів U_0. Знайти різницю потенціалів U між пластинами конденсаторів, якщо після відключення конденсаторів від джерела струму в одному з них зменшили відстань між пластинами вдвічі.

Відповідь: $U=\frac{2}{3}U_0$.

Задача 16. Два конденсатори з ємностями C_1 та C_2 зарядили до різниці потенціалів U_1 та U_2. Знайти різницю потенціалів U після з'єднання конденсаторів однойменними полюсами.

Відповідь: $U=\frac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}$.

Задача 17. Точковий заряд q розташований у середовищі з діелектричною проникністю ε. Визначити енергію електричного поля у шарі, радіуси якого a та b. Заряд знаходиться в центрі шару.

Відповідь: $W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

Задача 18. Плоский конденсатор має ємність $C=5$ пФ. Який заряд знаходиться на кожній з його пластин, якщо різниця потенціалів між ними $U=1000$ В?

Відповідь: $q=C\cdot U=5\cdot10^{-9}$ Кл.

Задача 19. Знайти заряд, який потрібно передати двом паралельно з'єднаним конденсаторам з ємностями $C_1=2$ мкФ і $C_2=1$ мкФ, щоб зарядити їх до різниці потенціалів $U=20$ кВ.

Відповідь: $q=(C_1+C_2)\cdot U=6\cdot10^{-7}$ Кл.

Задача 20. Два конденсатори з ємностями $C_1=1$ мкФ і $C_2=2$ мкФ зарядили до різниць потенціалів $U_1=20$ В і $U_2=50$ В. Знайти різницю потенціалів U після з'єднання конденсаторів однойменними полюсами.

Відповідь: $U=\frac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}=40$ В.

Задача 21. Два послідовно з'єднаних конденсатори з ємностями $C_1 = 1$ мкФ і $C_2 = 3$ мкФ підключені до джерела струму з напругою $U = 220$ В. Знайти напругу на кожному конденсаторі.

Відповідь: $U_1 = \dfrac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 165$ В, $U_2 = \dfrac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 55$ В.

Задача 22. Два послідовно з'єднаних конденсатори з ємностями $C_1 = 1$ мкФ і $C_2 = 2$ мкФ підключені до джерела струму з напругою $U = 900$ В. Чи можлива робота такої схеми, якщо напруга пробою конденсаторів $U_{пр} = 500$ В?

Відповідь: $U_1 = 600$ В, $U_2 = 300$ В. Не можлива, бо $U_1 > U_{пр}$.

Задача 23. Плоский повітряний конденсатор заряджений до різниці потенціалів $U_0 = 50$ В і відключено від джерела струму. Після цього в конденсатор паралельно обкладинкам вноситься металева пластинка товщини $d_n = 1$ мм. Відстань між обкладинками $d = 5$ мм, площі обкладинок і пластинки однакові. Знайти різницю потенціалів U між обкладинками конденсатора з металевою пластиною.

Відповідь: $U = \dfrac{(d - d_n)U_0}{d} = 40$ В.

Задача 24. Знайти загальну ємність конденсаторів, підключених за схемою, зображеною на рис. 10.4. Ємності конденсаторів $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ, $C_4 = 5$ мкФ.

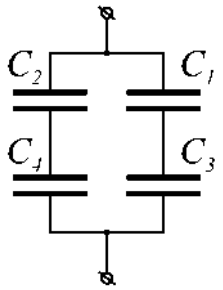


Рисунок 10.4

Відповідь: $C = \dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \dfrac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Задача 25. Конденсатору ємністю $C = 2$ мкФ передано заряд $q = 1$ мКл. Обкладки конденсатора з'єднали провідником. Знайти кількість теплоти Q, яка виділилась у провіднику під час розрядження конденсатора, і різницю потенціалів між обкладинками конденсатора до розрядження.

Відповідь: $Q = \dfrac{q^2}{2C} = 0{,}25$ Дж, $U = \dfrac{q}{C} = 500$ В.

Задача 26. Конденсатору, електроємність C якого дорівнює 10 пФ, передано заряд $q = 1$ пКл. Визначити енергію W конденсатора.

Відповідь: $W = 5 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Задача 27. Яка кількість теплоти Q виділиться під час розрядження плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів U між пластинками дорівнює 15 кВ, відстань між пластинками $d = 1$ мм, діелектрик – слюда, і площа S кожної пластинки дорівнює 300 см^2?

Відповідь: $W = 0{,}209$ Дж.

Задача 28. Сила F притягання між пластинами плоского повітряного конденсатора дорівнює 50 мН. Площа S кожної пластини дорівнює 200 см^2. Знайти густину енергії w поля конденсатора.

Відповідь: $w = 2{,}5$ Дж/м^3.

Задача 29. Конденсатори електроємностями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ і $C_3 = 3$ мкФ, увімкнені в коло з напругою $U = 1{,}1$ кВ. Визначити енергію кожного конденсатора у випадках: 1) послідовного їх включення; 2) паралельного включення.

Відповідь: 1) 0,18 Дж, 0,09 Дж, 0,06 Дж; 2) 0,605 Дж, 1,21 Дж, 1,815 Дж.

Задача 30. Електроємність C плоского конденсатора дорівнює 111 пФ. Діелектрик – фарфор. Конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U = 600$ В і відключили від джерела напруги. Яку роботу A потрібно виконати, щоб вийняти діелектрик із конденсатора? Тертям знехтувати.

Відповідь: $A = 8 \cdot 10^{-5}$ Дж.

11 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

11.1 Мета заняття

Засвоїти основні закони теорії постійного електричного струму: узагальнений закон Ома, правила Кірхгофа та закон Джоуля-Ленца, а також навчитися розраховувати електричні кола, тобто, маючи довільне електричне коло і будь-які його параметри (електрорушійну силу (ЕРС), опір та ін.), вміти визначити інші невідомі величини (силу струму, роботу, потужність, кількість теплоти тощо).

11.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи

Теоретичний матеріал даної теми слід вивчити за [3, розд. 4; 4, розд. 4; 5, глава 4] і конспектом лекцій, відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв'язання завдань, наведених як приклади.

11.3 Основні закони та формули

1. Сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

2. Густина струму у провіднику

$$j = \frac{I}{S},\ \vec{j} = ne\langle\vec{\upsilon}\rangle,$$

де S – площа поперечного перерізу провідника; $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ – середня швидкість впорядкованого руху зарядів у провіднику; n – концентрація зарядів.

3. Електрорушійна сила, що діє у колі,

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q_0},$$

де A_{cm} – робота сторонніх сил; q_0 – одиничний позитивний заряд,

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} \qquad \text{(замкнене коло)},$$

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \qquad \text{(ділянка кола 1-2)},$$

де $\vec{E}_{cm}$ – напруженість поля сторонніх сил.

4. Різниця потенціалів між двома точками кола

$$\varphi_1 - \varphi_2 = = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = = \int_1^2 E_l dl,$$

де $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля; E_l – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок елементарного переміщення $d\vec{l}$.

5. Напруга на ділянці 1-2 кола:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon,$$

де $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – різниця потенціалів між точками кола; ε – ЕРС, що діє на ділянці 1-2 кола.

6. Опір R однорідного лінійного провідника, провідність G провідника і питома електропровідність γ речовини провідника:

$$R = \rho\frac{l}{S},\ G = \frac{1}{R},\ \gamma = \frac{1}{\rho},$$

де ρ – питомий електричний опір; S – площа поперечного перерізу провідника; l – його довжина.

7. Опір при послідовному з'єднанні n провідників:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i .$$

8. Опір при паралельному з'єднанні n провідників:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}.$$

9. Закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \qquad \text{(для однорідної ділянки кола)},$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R} \qquad \text{(для неоднорідної ділянки кола)},$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \qquad \text{(для замкнутого кола)},$$

де U – напруга на ділянці кола; R – опір кола (ділянки кола); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола; ε_{12} – ЕРС джерел струму, що входять до кола; ε – ЕРС всіх джерел струму кола.

10. Залежність питомого опору ρ і опору R від температури

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),\ R = R_0(1 + \alpha t),$$

де ρ і ρ_0, R і R_0 – відповідно питомий опір та опір провідника при довільній t і $t = 0^\circ C$; α – температурний коефіцієнт опору.

11. Закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \gamma\vec{E},$$

де $\vec{j}$ – густина струму; $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля; γ – питома електропровідність провідника.

12. Робота струму

$$dA = Udq = IUdt = I^2Rdt = \frac{U^2}{R}dt,$$

де U – напруга, прикладена до кінців однорідного провідника; I – сила струму в провіднику; R – опір провідника; dq – заряд, що переноситься через переріз провідника за період часу dt.

13. Потужність струму

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R},$$

де U – напруга, прикладена до кінців одного провідника; I – сила струму в провіднику; R – його опір.

14. Закон Джоуля-Ленца:

$$dQ = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt.$$

15. Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі

$$w = jE = \gamma E^2,$$

де w – питома теплова потужність струму; j – густина струму; E – напруженість електростатичного поля; γ – питома електропровідність речовини.

16. Перше правило Кірхгофа

$$\sum_k I_k = 0, \qquad (11.1)$$

де I_k – струм, що входить у вузол / виходить з вузла; k – кількість струмів у вузлі.

17. Друге правило Кірхгофа

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k, \qquad (11.2)$$

де $I_i R_i$ – падіння напруги на i-му елементі кола; i – кількість елементів у колі; ε_k – k-та ЕРС, що діє у колі; k – кількість ЕРС, що діють у колі.

Порядок розв'язання задач з використовуванням правил Кірхгофа:

1. Вибрати довільний напрямок струмів на всіх ділянках кола; дійсний напрямок визначається під час вирішення задачі: якщо шуканий струм виходить позитивним, то його напрямок обраний вірно, негативним – його вірній напрямок протилежний обраному.

2. Підрахувати число m вузлів у колі і записати рівняння (11.1) для $(m-1)$ вузлів.

3. Виділити в розгалуженому колі замкнені контури, визначити напрямок обходу кожного і записати систему рівнянь (11.2) для кожного з них. Контури слід вибирати так, щоб кожен новий контур мав хоча б одну ділянку кола, яка б не входила в попередні контури. Добуток $I \cdot R$ позитивний, якщо струм на даній ділянці збігається з напрямком обходу, і навпаки; ЕРС, що діють за обраним напрямком обходу, вважаються позитивними, проти – негативними.

4. Розв’язати отриману систему рівнянь і знайти шукані струми.

11.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке електричний струм, сила і густина струму?
2. Що таке електроопір провідника, від чого залежить?
3. Чому дорівнює електроопір при паралельному та послідовному з'єднанні провідників?
4. Який вигляд має залежність електроопору від температури?
5. Що розуміють під сторонніми силами і яка їхня роль у колі постійного струму?
6. Поясніть фізичний смисл електрорушійної сили, напруги і різниці потенціалів на ділянці електричного кола.
7. Запишіть закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральному вигляді.
8. Запишіть закон Ома у диференціальній формі.
9. Запишіть закон Ома для неоднорідної ділянки кола.
10. Сформулюйте правила знаків для сили струму і ЕРС в узагальненому законі Ома для ділянки кола.
11. Запишіть правила Кірхгофа та їх обґрунтування.
12. Чому дорівнює робота і потужність електричного струму?
13. Запишіть закон Джоуля-Ленца в інтегральній і диференціальній формах.

11.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Який заряд переноситься у таких випадках: а) струм рівномірно збільшується від нуля до $3\,\text{А}$ за $10\,\text{с}$; б) струм зменшується від $18\,\text{А}$ до нуля, до того ж за кожні $0{,}01\,\text{с}$ він спадає вдвічі: в) сила струму зменшувалася від $10\,\text{А}$ до $5\,\text{А}$ протягом $10\,\text{с}$, причому опір провідника рівномірно зростав, а різниця потенціалів на кінцях провідника залишалася постійною?

Дані:

а) $I_0 = 0$, $I_1 = 3\text{А}$, $\tau = 10\,\text{с}$; б) $I_0 = 18\text{А}$, $I_1 = 0$, $\tau = 0{,}01\,\text{с}$, $\dfrac{I(t)}{I(t+\tau)} = 2$;

в) $I_0 = 10\,\text{А}$, $I = 5\,\text{А}$, $\tau = 10\,\text{с}$.

Знайти: q.

Аналіз і розв'язання

а) Відомо, що $I = \dfrac{dq}{dt}$, звідки $dq = Idt$ і $q = \int\limits_0^\tau Idt$. Але за умовами $I = kt$, де $k = \dfrac{I_1}{\tau}$, тоді $q = \int\limits_0^\tau ktdt = \dfrac{k\tau^2}{2} = \dfrac{I_{1\tau}}{2} = 15\,\text{Кл}$.

б) Знайдемо закон зміни струму з часом. За умовами задачі

$$\frac{I(t)}{I(t+\tau)} = 2, \text{ тобто } I(\tau) = \frac{I_0}{2};\ I(2\tau) = \frac{l_0}{2^2};\ I(3\tau) = \frac{I_0}{2^3}.$$

Одержимо залежність струму від часу:

$$I(t)=\frac{I_0}{2^{\frac{t}{\tau}}}=I_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Тепер розрахуємо q

$$q=\int_0^{\infty} I(t)dt=\int_0^{\infty} I_0 2^{-\frac{t}{\tau}}dt=-\frac{I_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\tau}{\ln 2}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{I_0\tau}{\ln 2}=0,26\,\text{Кл}.$$

в) З умов задачі випливає, що величина опору є лінійною функцією часу, тобто

$$R=R_0+kt\ , \qquad (11.3)$$

де R_0 і R – відповідно початковий і кінцевий опір провідника; k – стала величина, яка відповідає швидкості зміни опору:

$$k=\frac{R-R_0}{\tau}.$$

За законом Ома для однорідної ділянки кола можна записати:

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}.$$

Очевидно, що сила струму не є лінійною функцією часу. Знаючи залежність *I(t),* можна визначити заряд за формулою:

$$q=\int_0^{\tau} Idt=\int_0^{\tau}\frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_0+kt}dt=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\cdot\int_0^{\tau}\frac{d(R_0+kt)}{R_0+kt}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{k}\cdot\ln\frac{R_0+kt}{R_0}.$$

Маючи на увазі (11.3) і співвідношення $R=(\varphi_1-\varphi_2)/I$; $R_0=(\varphi_1-\varphi_2)/I_0$, одержимо:

$$q=\frac{(\varphi_1-\varphi_2)\tau}{R-R_0}\ln\frac{R}{R_0}=\frac{I_0 I_\tau}{I_0-I}\ln\frac{I_0}{I}=69,3\,\text{Кл}.$$

Відповідь: а) $q=15\,\text{Кл}$, б) $q=0,26\,\text{Кл}$, в) $q=69,3\,\text{Кл}$.

Задача 2. Джерело струму з ЕРС $\varepsilon_1=12\,\text{В}$ і внутрішнім опором $r_1=0,2\,\text{Ом}$ заряджає батарею акумуляторів з ЕРС $\varepsilon_2=10\,\text{В}$ і внутрішнім опором $r_2=0,6\,\text{Ом}$. Паралельно батареї підключено лампу розжарювання опором $R=3\,\text{Ом}$ (рис. 11.1). Визначити величину струмів в батареї акумуляторів I_2 та крізь лампу I.

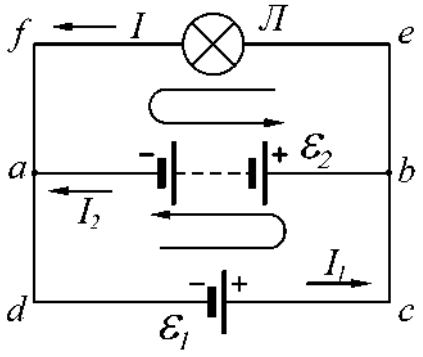


Рисунок 11.1

Дані: $\varepsilon_1=12\,\text{В}$, $r_1=0,2\,\text{Ом}$, $\varepsilon_2=10\,\text{В}$, $r_2=0,6\,\text{Ом}$, $R=3\,\text{Ом}$.

Знайти: I_2, I.

Аналіз і розв'язання

У процесі заряджання акумулятора його полюси з'єднуються з однойменними полюсами генератора. Вибираємо напрямки струмів, вказані на рисунку, тоді за першим законом Кірхгофа (11.1) для вузла а маємо:

$$I_1 = I + I_2. \qquad (11.4)$$

В обох замкнутих колах *abef* та *abcd* напрямок обходу беремо проти напрямку руху годинникової стрілки. Тоді за другим законом Кірхгофа (11.2) одержимо:

$$IR - I_2 r_2 = \varepsilon_2;$$

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Разом з рівнянням (11.4) маємо систему рівнянь, після розв'язання якої одержимо:

$$I_2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R - \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} = 1{,}6 \text{ А};$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} = 3{,}6 \text{ А}.$$

Відповідь: $I = 3{,}6 \text{ А}$, $I_2 = 1{,}6 \text{ А}$.

Задача 3. Величина струму в колі змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-at}$, де $I_0 = 5 \text{ А}$. Визначити кількість теплоти, яка виділиться у провіднику опором $R = 20 \text{ Ом}$ за час, протягом якого струм зменшиться в e разів. Коефіцієнт a дорівнює $2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$.

Дані: $I = I_0 e^{-at}$, $I_0 = 5 \text{ А}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$.

Знайти: Q.

Аналіз і розв'язання

За законом Джоуля-Ленца маємо:

$$Q = \int_0^t I^2 R dt,$$

підставимо закон струму $I = I_0 e^{-at}$ і одержимо:

$$Q = I_0^2 R \int_0^{\tau} e^{-2at} dt = I_0^2 R \left(-\frac{1}{2a} e^{-at} \right) \Bigg|_0^{\tau} = \frac{I_0^2 R}{2a} \left(1 - e^{2a\tau} \right).$$

Розрахуємо час τ, протягом якого струм зменшиться в e разів.

$$I = \frac{I_0}{e};\ \frac{I_0}{e} = I_0 e^{-a\tau};\ e^{-1} = e^{-a\tau};\ \tau = \frac{1}{a} = 50\,c.$$

Обчислення дає результат:

$$Q = \frac{I_0^2}{2a} \cdot \left(1 - e^{-2a\tau}\right) \approx 1{,}1 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $Q \approx 11$кДж.

Задача 4. Визначте внутрішній опір джерела струму, якщо у зовнішньому колі при силі струму $I_1 = 4\,\text{А}$ розвивається потужність $P_1 = 10\,\text{Вт}$, а при силі струму $I_2 = 6\,\text{А}$ – потужність $P_2 = 12\,\text{Вт}$.

Дані: $I_1 = 4\,\text{А}$, $P_1 = 10\,\text{Вт}$, $I_2 = 6\,\text{А}$, $P_2 = 12\,\text{Вт}$.

Знайти: r.

Аналіз і розв'язання

Потужність, що розвивається струмом,

$$P_1 = I_1^2 R_1 \text{ и } P_2 = I_2^2 R_2, \tag{11.5}$$

де R_1 і R_2 – опір зовнішнього кола.

Згідно з законом Ома для замкнутого кола,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r},\ I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r},$$

де ε – ЕРС джерела. Розв'язавши ці два рівняння відносно r, отримуємо

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}. \tag{11.6}$$

Виразивши $I_1 R_1$ і $I_2 R_2$ з рівняння (11.5) і підставивши в вираз (11.6), знайдемо внутрішній опір джерела струму:

$$r = \frac{P_1 / I_1 - P_2 / I_2}{I_2 - I_1} = 0{,}25\,\text{Ом}.$$

Відповідь: $r = 0{,}25\,\text{Ом}$

Задача 5. По провіднику з опором $R = 10$ Ом тече струм, сила струму зростає при цьому лінійно. Кількість теплоти Q, яка виділилася в провіднику за час $\tau = 10$ с, дорівнює 300 Дж. Визначте заряд q, який пройшов за цей час по провіднику, якщо в початковий момент часу сила струму в провіднику дорівнює нулю.

Дано: $R = 10$ Ом, $\tau = 10$ с, $Q = 300$ Дж, $I_0 = 0$.

Знайти: q.

Аналіз і розв'язання

З умови рівномірності зростання сили струму (при $I_0 = 0$) випливає, що $I = kt$, де k – коефіцієнт пропорційності. Враховуючи, що $I = \frac{dq}{dt}$, можемо записати:

$$dq = Idt = ktdt. \tag{11.7}$$

Інтегруючи вираз (11.7), отримаємо:

$$q = \int_0^{\tau} ktdt = \frac{k\tau^2}{2}. \tag{11.8}$$

Для знаходження коефіцієнта k запишемо закон Джоуля-Ленца для нескінченно малого проміжку часу dt:

$$dQ = I^2 Rdt.$$

Інтегруючи цей вираз від 0 до τ, отримаємо кількість теплоти Q, задану в умові задачі:

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 Rdt = \int_0^{\tau} k^2 t^2 Rdt = \frac{1}{3}k^2 R\tau^3,$$

звідки знайдемо k:

$$k = \sqrt{\frac{3Q}{\tau^3 R}}. \tag{11.9}$$

Підставивши формулу (11.7) у вираз (11.8), визначимо шуканий заряд

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q}{R}} = 15 \text{ Кл}.$$

Відповідь: $q = 15$ Кл.

11.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Величина струму в провіднику рівномірно збільшується від $I_0 = 2$ А до $I = 8$ А за 10 с. Знайти величину заряду, що пройшов.

Відповідь: $q = 30$ Кл.

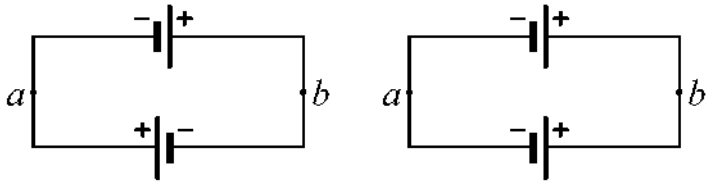
Задача 2. Визначити густину струму в залізному провіднику, довжина якого 10 м, якщо провідник знаходиться під напругою $U = 6$ В.

Відповідь: $j = 6{,}1$ МА/м^2.

Задача 3. Внутрішній опір гальванометра $r = 680$ Ом. Як та який опір $R_ш$ слід підключити до нього, щоб за його допомогою можна було б вимірювати струм 2,5 А? Шкала гальванометра розрахована на 300 мкА.

Відповідь: $R_ш = 0{,}0618$ Ом.

Задача 4. Внутрішній опір гальванометра $r_a = 720\,\text{Ом}$, шкала розрахована $300\,\text{мкА}$. Як та який опір $R_д$ слід додати до нього, щоб за його допомогою можна було б вимірювати напругу $U = 300\,\text{В}$?



а) б)

Рисунок 11.2

Відповідь: $R_д \approx 10^6\,\text{Ом}$.

Задача 5. Два однакових джерела струму з $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}2\,\text{В}$, внутрішній опір яких $r = 0{,}4\,\text{Ом}$, з'єднані, як зображено на рис. 11.2. Визначити величину струму в колі та різницю потенціалів між точками a і b в першому та другому випадках.

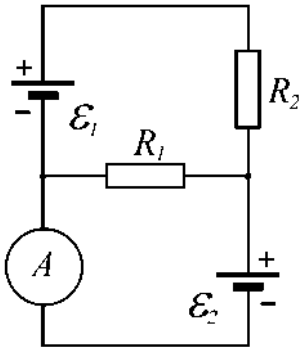


Рисунок 11.3

Відповідь: а) $I = 3\,\text{А}$; $U = 0$; б) $I = 0$; $U = 1{,}2\,\text{В}$.

Задача 6. Два елементи $\varepsilon_1 = 1{,}2\,\text{В}$ з внутрішнім опором $r_1 = 0{,}10\,\text{Ом}$ та $\varepsilon_2 = 0{,}9\,\text{В}$ з внутрішнім опором $r_2 = 0{,}3\,\text{Ом}$ з'єднані однойменними полюсами. Опір R провідників, що їх з'єднує, дорівнює $0{,}2\,\text{Ом}$. Визначити величину струму в колі.

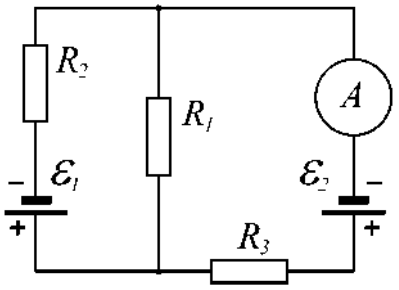


Рисунок 11.4

Відповідь: $I = 0{,}5\,\text{А}$.

Задача 7. На рис. 11.3 $\varepsilon_1 = 110\,\text{В}$, $\varepsilon_2 = 220\,\text{В}$, $R_1 = R_2 = 100\,\text{Ом}$, $R_3 = 500\,\text{Ом}$. Яку величину струму покаже амперметр? Опором батарей та амперметра знехтувати.

Відповідь: $I = 0{,}4\,\text{А}$.

Задача 8. Яку величину струму показує амперметр (рис. 11.4), якщо $\varepsilon_1 = 2\,\text{В}$, $\varepsilon_2 = 1\,\text{В}$, $R_1 = 10^3\,\text{Ом}$, $R_2 = 500\,\text{Ом}$, $R_3 = 200\,\text{Ом}$. Опір амперметра $R_A = 200\,\text{Ом}$. Внутрішнім опором елементів знехтувати.

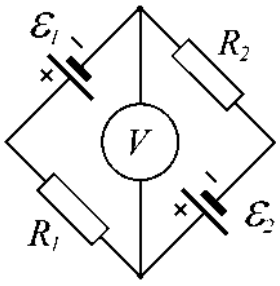


Рисунок 11.5

Відповідь: $I = 0{,}45\,\text{мА}$.

Задача 9. На схемі (рис. 11.5) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $R_2 = 2R_1$. У скільки разів струм, що тече через вольтметр, більше струму, що тече через R_2? Опором батарей знехтувати.

Відповідь: в 3 рази.

Задача 10. На схемі (рис. 11.5) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 110\,\text{В}$, $R_1 = R_2 = 200\,\text{Ом}$, опір вольтметра $1000\,\text{Ом}$. Знайти напругу, що показує вольтметр. Опором батареї знехтувати.

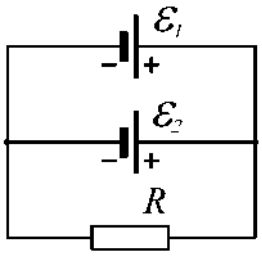


Рисунок 11.6

Відповідь: $U = 100\,\text{В}$.

Задача 11. Дві батареї акумуляторів ($\varepsilon_1 = 10\,\text{В}$, $r_1 = 1\,\text{Ом}$, $\varepsilon_2 = 8\,\text{В}$, $r_2 = 2\,\text{Ом}$) та реостат ($R = 6\,\text{Ом}$) з'єднані так, як зображено

на рис.11.6. Визначити величину струму в батареях та реостаті.

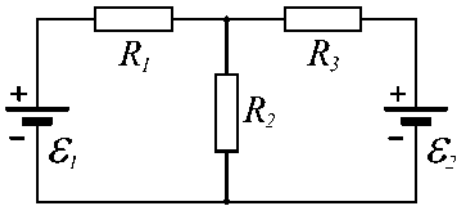


Рисунок 11.7

Відповідь: 1,6 А, 0,2 А, 1,4 А.

Задача 12. Визначити величину струму в резисторі (рис. 11.7), який має опір $R_3 = 3$ Ом, та напругу на його кінцях, якщо $\varepsilon_1 = 4$ В, $\varepsilon_2 = 3$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

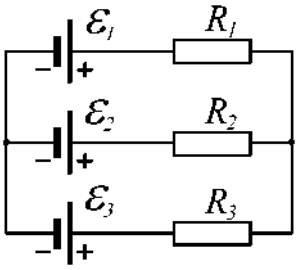


Рисунок 11.8

Відповідь: $I_3 = 0$, $U_3 = 0$.

Задача 13. Три джерела струму $\varepsilon_1 = 11$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В та $\varepsilon_3 = 6$ В з'єднані, як зображено на рис. 11.8. Визначити величину струму в резисторах, якщо $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом та $R_3 = 2$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

Відповідь: $I_1 = 0{,}8$ А, $I_2 = 0{,}3$ А, $I_3 = 0{,}5$ А.

Задача 14. Від батареї $\varepsilon = 500$ В потрібно передати енергію на відстань 2,5 км. Споживна потужність дорівнює 10 кВт. Визначити мінімальні втрати потужності $\Delta P_{\min}$ в мережі, якщо діаметр мідних провідників 1,5 см.

Відповідь: $\Delta P_{\min} = 212$ Вт.

Задача 15. Від генератора $\varepsilon = 110$ В слід передати енергію на відстань 250 м. Споживна потужність дорівнює 1 кВт. Знайти мінімальну площу перерізу мідного провідника, якщо втрати потужності в мережі не повинні перевищувати 1%.

Відповідь: $S = 85$ мм^2.

Задача 16. Для нагрівання 4,5 л води від 23°C до кипіння нагрівач споживає 0,5 кВт·год. Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії η нагрівача?

Відповідь: $\eta = 80\%$.

Задача 17. Величина струму в провіднику, що має опір $R = 12$ Ом, рівномірно спадає від $I_0 = 5$ А до $I = 0$ протягом 10 секунд. Яка кількість теплоти Q виділяється в цьому провіднику за вказаний проміжок часу?

Відповідь: $Q = 1$ кДж.

Задача 18. Електрорушійна сила батареї акумуляторів $\varepsilon = 12$ В. Величина струму короткого замикання дорівнює 5 А. Яку найбільшу потужність $P_{\max}$ можна одержати в зовнішньому колі, з'єднаному з такою батареєю?

Відповідь: $P_{\max} = 15$ Вт.

Задача 19. Величина струму в провіднику; який має опір $R = 100$ Ом, рівномірно зростає від $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10$ А протягом $\tau = 30$ с. Знайти кількість теплоти Q, що виділяється за цей час у провіднику.

Відповідь: Q= 100 кДж.

Задача 20. Амперметр з опором $R_1 = 2\,\text{Ом}$, підключений до джерела струму, показує струм $I_1 = 5\,\text{А}$. Вольтметр з опором $R_1 = 150\,\text{Ом}$, підключений до такого ж джерела струму, показує напругу $U = 12\,\text{В}$. Знайти струм короткого замикання $I_к$ джерела.

Відповідь: $I_к = \dfrac{I_1 U\left(R_2 - R_1\right)}{R_2(U - I_1 R_1)} = 29{,}6\,\text{А}.$

Задача 21. Два паралельно з'єднані резистори з опором $R_1 = 40\,\text{Ом}$ і $R_2 = 10\,\text{Ом}$ підключені до джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 10\,\text{В}$. Струм у колі $I = 1\text{А}$. Знайти внутрішній опір джерела і струм короткого замикання $I_к$.

Відповідь: $r = \dfrac{\varepsilon\left(R_1 + R_2\right) - IR_1R_2}{I\left(R_1 + R_2\right)} = 2\,\text{Ом},\ I_к = \dfrac{\varepsilon}{r} = 5\,\text{А}.$

Задача 22. При підключенні зовнішнього кола напруга на затискачах джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 30\,\text{В}$ виявилась рівною $U = 18\,\text{В}$. Зовнішній опір кола $R = 6\,\text{Ом}$. Знайти внутрішній опір джерела r.

Відповідь: $r = \dfrac{R\left(\varepsilon - U\right)}{U} = 4\,\text{Ом}.$

Задача 23. Джерело струму з ЕРС $\varepsilon = 15\,\text{В}$ і внутрішнім опором $r = 5\,\text{Ом}$ замкнуте на резистор з опором $R = 10\,\text{Ом}$. До затискачів джерела підключений конденсатор ємністю $C = 1\text{мкФ}$. Знайти заряд на конденсаторі q.

Відповідь: $q = \dfrac{C\varepsilon R}{R + r} = 10^{-5}\,\text{Кл}.$

Задача 24. У колі джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 30\,\text{В}$ проходить струм $I = 3\,\text{А}$. напруга на затискачах джерела $U = 18\,\text{В}$. Знайти зовнішній опір кола R і внутрішній опір джерела r.

Відповідь: $R = \dfrac{U}{I} = 6\,\text{Ом},\ r = \dfrac{\varepsilon - U}{I} = 4\,\text{Ом}.$

Задача 25. Лампа підключена мідними дротами до джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 2\,\text{В}$ і внутрішнім опором $r = 0{,}04\,\text{Ом}$. Довжина дротів $l = 4\,\text{м}$, їх діаметр $D = 0{,}8\,\text{мм}$, питомий опір міді $\rho = 0{,}017\,\text{мкОм}\cdot\text{м}$ напруга на затискачах джерела $U = 1{,}98\,\text{В}$. Знайти опір лампи R.

Відповідь: $R = \dfrac{Ur}{\varepsilon - U} - \dfrac{4\rho l}{\pi D^2} = 3{,}82\,\text{Ом}.$

Задача 26. Загальний опір двох послідовно з'єднаних провідників $R = 5\,\text{Ом}$, а паралельно з'єднаних $R_0 = 1{,}2\,\text{Ом}$. Знайти опір кожного провідника.

Відповідь: $R_1 = 3\,\text{Ом},\ R_2 = 2\,\text{Ом}.$

Задача 27. При підключенні в електричне коло провідника, що має діаметр $D = 0{,}5\,\text{мм}$ і довжину $l = 47\,\text{мм}$, напруга на ньому $U = 1{,}2\,\text{В}$ при струмі у колі $I = 1\text{А}$. Знайти питомий опір ρ матеріалу провідника.

Відповідь: $\rho = \dfrac{U\pi D^2}{4Il} = 5 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

Задача 28. Який необхідно взяти опір R, щоб можна було підключити в мережу з напругою $U = 220$ В лампу, розраховану на напругу $U = 120$ В і струм $I_0 = 4$ А?

Відповідь: $R = \dfrac{U - U_0}{I_0} = 25$ Ом.

Задача 29. Знайти напругу на провіднику з опором $R = 10$ Ом, якщо за час $t = 5$ хв, протікає заряд $q = 120$ Кл.

Відповідь: $U = \dfrac{qR}{t} = 4$ В.

Задача 30. Знайти струм у ланцюгу джерела струму, замкнутого на провідник з опором $R = 1000$ Ом, якщо при послідовному з'єднанні з міліамперметром з опором $R_0 = 100$ Ом він показав струм $I_0 = 25$ мА.

Відповідь: $I = \dfrac{I_0(R + R_0)}{R} = 27{,}5$ мА.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник/ Упоряд.: Ткаченко Т.Б. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2004. – 108 с.

2. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина І. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник / В.О. Стороженко, І.М. Кібець, А.І. Рибалка, Т.Б. Ткаченко. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 320 с.

3. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: навч. посібник / Упоряд.: Українець М.І. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 164 с.

4. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина ІІ. Електрика та магнетизм: навч. посібник / І.М. Кібець, А.І. Рибалка, В.О. Стороженко. – Харків: Компанія СМІТ, 2009. – 424 с.

5. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. – М.: 1981. – 496 с.

6. Савельев И.В. Курс общей физике: в 3 т. – М.: 1982. – Т.1. – 432 с.

7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: 1988. – 416 с.

8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: 1982. – 420 с.

9. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу физики с решениями. – М.: Высш. шк. 1999. – 591 с.

Наукове видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ ФІЗИКИ
Частина 1

для студентів усіх напрямів
бакалаврата денної форми навчання

Упорядники: СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович
ОРЕЛ Роман Петрович
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна
МАЛИК Світлана Борисівна

Відповідальний випусковий	В.О. Стороженко
Редактор	О. Г. Троценко
Комп’ютерна верстка	Л.Д. Медведєва

План 2012 (друге півріччя), поз. 63

Підп. до друку 27.06.12.	Формат 60×84 1/16.	Спосіб друку – ризографія.
Умов. друк. арк. 8,7.	Облік. вид. арк. 7,8.	Тираж 100 прим.
Зам. № 1-63.	Ціна договірна.	

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна,14

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з фізики
частина 2

Харків 2013

Методичні вказівки до практичних занять з фізики (частина 2) для студентів усіх спеціальностей і усіх форм навчання / Упоряд.: В.О. Стороженко, О.М. Коваленко, С.Ф. Марченко, І.М. Кібець, Р.П. Орел, С.Б. Малик – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 140 с.

Упорядники: В.О. Стороженко,
О.М. Коваленко,
С.Ф. Марченко,
І.М. Кібець,
Р.П. Орел,
С.Б. Малик

Рецензент С.М. Мєшков, канд. техн. наук, доц. каф. фізики

ЗМІСТ

Загальні положення 4
1 Магнітне поле постійного струму 5
2 Електромагнітна індукція. Система рівнянь Максвелла 19
3 Електромагнітні коливання і хвилі 31
4 Хвильова оптика 44
5 Рівноважне теплове випромінювання 60
6 Квантові властивості випромінювання 69
7 Теорія Бора атома водню. Постулати Бора 79
8 Хвилі де Бройля. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга 86
9 Хвильова функція. Рівняння Шредінгера 953
10 Атом водню з точки зору квантової механіки. Принцип Паулі. Електронні шари складних атомів 104
11 Рентгенівське випромінювання. Магнітні властивості атомів 116
12 Будова атомних ядер. Ядерні реакції. Радіоактивність 127
Рекомендована література 138

ВСТУП

Вміння розв’язувати задачі – один з основних критеріїв засвоєння курсу фізики. Воно свідчить про здібність студента до аналізу фізичних процесів та явищ, про розуміння основних фізичних ідей, вміння знаходити зв’язок між окремими явищами.

Мета запропонованих методичних вказівок – допомогти студентам під час підготовки до практичних занять з фізики.

Дані вказівки є заключною (другою) частиною методичних вказівок до практичних занять з курсу загальної фізики і включають 12 тем, що відповідають робочій програмі курсу фізики.

Методичний матеріал до кожного практичного заняття містить стислі теоретичні відомості з теми заняття (основні закони та формули). Для кожної теми наведено контрольні запитання та завдання, які можна використовувати для самоперевірки та експрес-контролю на заняттях.

Методичні вказівки містять типові задачі з кожної теми та приклади їх розв’язування, а також задачі, які рекомендовані для самостійної роботи студентів.

1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Мета заняття

Користуючись основними законами магнетизму, навчитися розв'язувати задачі з розрахунку кількісних характеристик магнітного поля, дії магнітного поля на струми та заряджені частинки.

1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до заняття необхідно вивчити теоретичний матеріал, наведений у конспекті лекцій та підручнику [1, розд. 5; 3, §39-50, 72-76; 5, розд. 5.1]. Зверніть увагу на зміст та межі застосування основних законів і формул цього розділу.

1.3 Основні закони і формули

1. Закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3},$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, яке створюється елементом провідника довжиною dl зі струмом; μ_0 – магнітна стала; μ – магнітна проникність (у вакуумі μ=1); $d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює за модулем dl провідника і збігається за напрямком зі струмом; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від середини елемента провідника до точки, в якій визначається магнітна індукція; I – сила струму.

Модуль вектора $d\vec{B}$

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2},$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

2. Зв'язок магнітної індукції $\vec{B}$ із напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

У вакуумі (μ=1)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

3. Магнітна індукція у центрі колового провідника зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R},$$

де R – радіус колового витка.

4. Магнітна індукція у будь-якій точці на осі колового струму

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}},$$

де h – відстань від центра витка до точки, в якій визначається магнітна індукція.

5. Магнітна індукція поля, що створюється нескінченно довгим прямим провідником зі струмом

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{R},$$

де R – відстань від осі провідника.

6. Магнітна індукція поля, що створюється відрізком провідника

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right),$$

де позначення I, r_0, φ_1, φ_2 зрозумілі з рис. 1.1 (вектор $\vec{B}$ напрямлений перпендикулярно площині рисунка).

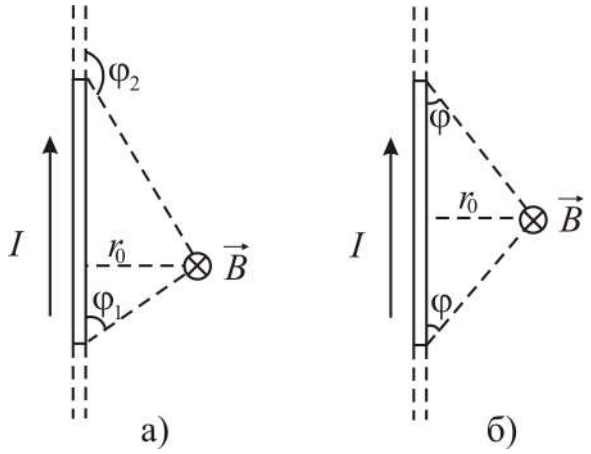


Рисунок 1.1

При симетричному розташуванні кінців провідника відносно точки, в якій визначається магнітна індукція (рис. 1.1, б)

$$-\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi.$$

Отже,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\varphi.$$

7. Магнітна індукція поля всередині соленоїда

$$B = \frac{\mu_0 \mu N I}{l} = \mu_0 \mu n I,$$

де N – кількість витків соленоїда; l – довжина соленоїда; I – сила струму в одному витку, n – щільність намотки, тобто кількість витків, що припадають на одиницю довжини соленоїда.

8. Принцип суперпозиції магнітних полів

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i ,$$

де $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції поля, яке породжується декількома рухомими зарядами (струмами); $\vec{B}_i$ – вектор магнітної індукції поля, яке породжується окремим рухомим зарядом (струмом).

У випадку накладання двох полів

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 ,$$

а модуль вектора магнітної індукції

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\alpha} ,$$

де α – кут між векторами.

9. Закон Ампера. Сила, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі

$$\vec{F} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right],$$

де I – сила струму, $\vec{l}$ – вектор, який за модулем дорівнює довжині l провідника і за напрямком збігається з напрямком струму; $\vec{B}$ – магнітна індукція поля.

Модуль вектора сили $\vec{F}$

$$F = IBl\sin\alpha ,$$

де α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{B}$.

Сила, що діє на елемент провідника $d\vec{l}$ зі струмом I в магнітному полі

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right],$$

або за модулем

$$dF = IBdl\sin\alpha ,$$

де α – кут між $d\vec{l}$ і $\vec{B}$.

10. Сила взаємодії двох прямих паралельних провідників зі стумами I_1 та I_2:

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} l ,$$

де l – довжина провідників, d – відстань між ними.

11. Магнітний момент плоского контуру зі струмом

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} ,$$

де I – сила струму у плоскому контурі, S – площа контуру, $\vec{n}$ – одиничний вектор позитивної нормалі до контуру.

12. Механічний момент, який діє на рамку зі струмом із боку магнітного поля:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right],$$

$$M = p_m B\sin\alpha ,$$

де α – кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$.

13. Сила Лоренца

$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

або за модулем

$$F = q\upsilon B\sin\alpha,$$

де $\vec{\upsilon}$ – швидкість зарядженої частинки, q – заряд частинки, α – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$.

Якщо частинка знаходиться одночасно в електричному і магнітному полях, то сила, що діє на частинку, має вигляд

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right],$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

14. Теорема про циркуляцію вектора $\vec{B}$ (закон повного струму для магнітного поля у вакуумі)

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i,$$

де n – кількість провідників зі струмом, які охоплені контуром L довільної форми.

15. Потік вектора магнітної індукції (магнітний потік) крізь площину dS

$$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S} = BdS\cos\alpha = B_n dS,$$

де $B_n = B\cos\alpha$ – проекція вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі до площини dS (α – кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{B}$), $d\vec{S} = \vec{n}dS$ – вектор, модуль якого дорівнює dS, а напрямок збігається з напрямком нормалі $\vec{n}$ до площини.

Магнітний потік крізь довільну поверхню

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS.$$

16. Повний потік (потокозчеплення)

$$\Psi = N\Phi,$$

де N – кількість витків соленоїда або тороїда з рівномірним намотуванням, які щільно прилягають один до одного.

17. Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі

$$dA = Id\Phi.$$

18. Робота з переміщення контуру зі струмом

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

де $d\Phi_1$ – потік, який пронизує контур у початковому положенні, $d\Phi_2$ – у кінцевому.

1.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що називають магнітним полем? Яка його природа та кількісні характеристики?

2. Яку величину називають вектором магнітної індукції? Як визначити її напрямок?

3. Як пов'язані магнітна індукція $\vec{B}$ та напруженість $\vec{H}$ магнітного поля?

4. Сформулюйте закон Біо-Савара-Лапласа.

5. Сформулюйте принцип суперпозиції магнітних полів.

6. Чому дорівнює магнітна індукція у центрі колового провідника зі струмом?

7. Чому дорівнює магнітна індукція поля, що створюється нескінченно довгим прямим провідником зі струмом? Відрізком провідника?

8. Опишіть дію магнітного поля на прямолінійний провідник зі струмом. Сформулюйте закон Ампера. Як визначити напрямок сили Ампера?

9. Чому дорівнює магнітний момент контуру зі струмом?

10. Чому дорівнює механічний момент рамки зі струмом у магнітному полі?

11. Розрахуйте силу взаємодії двох провідників зі струмами.

12. Що називають магнітним потоком? В яких одиницях його вимірюють?

13. Чому дорівнює робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі?

14. Сформулюйте закон повного струму.

15. Чому дорівнює сила, що діє на рухомий заряд у магнітному полі? В електричному і магнітному полях одночасно?

16. Як визначити напрямок сили Лоренца?

17. Розрахуйте магнітне поле всередині соленоїда.

1.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. По двох довгих паралельних нескінченних провідниках у протилежних напрямках проходять струми 90 і 70 А. Визначити напруженість магнітного поля, яке створюється струмами у точці *M*, що лежить на відстані 12 см від першого і 14 см від другого провідників, якщо відстань між ними 10 см.

Дані: I_1 = 90 А; I_2 = 70 А;

R_1 = 12 см; R_2 = 14 см; d = 10 см;

H – ?

Аналіз і розв'язання

Припустимо, що провідники спрямовані перпендикулярно до площини рис. 1.2. Струм I_1 йде від нас, а I_2 до нас. Кожний струм створює у точці *M* напруженість магнітного поля $H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1}$; $H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2}$. Напрям векторів $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ визначається за правилом свердлика і вказаний на рис. 1.2. Згідно з принципом суперпозиції величина напруженості поля $\vec{H}$ у точці *M* дорівнює геометричній сумі напруженостей $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ (за теоремою косинусів):

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - 2H_1H_2\cos\beta}\,. \qquad (1.1)$$

Обчислення

$$H_1 = \frac{90}{2\pi \cdot 0{,}12} = 120 \text{ (А/м)}; \; H_2 = \frac{70}{2\pi \cdot 0{,}14} = 80 \text{ (А/м)}.$$

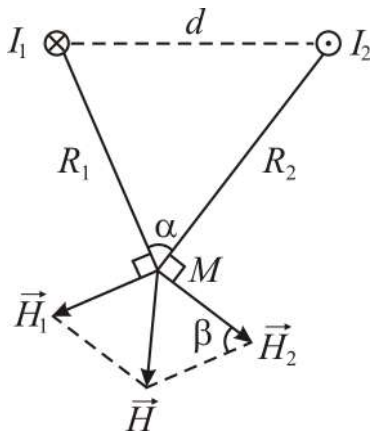


Рисунок 1.2

З (1.1) визначимо $\cos\beta$ (оскільки $\alpha = \beta$, то $\cos\beta = \cos\alpha$)

$$\cos\alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2} = \frac{(144 + 196 + 100)\cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 0{,}71$$

Отже

$$H = \sqrt{14400 + 6400 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot 0{,}71} = 84 \text{ А/м}.$$

Задача 2. Круглу рамку зі струмом площею 1 см^2 закріплено паралельно магнітному полю, і на неї діє обертальний момент $M = 10^{-5}$ Н·м при індукції 0,05 Тл. Рамку звільнили, після повороту на 90° її кутова швидкість дорівнює 20 с$^{-1}$. Визначити струм I, що проходить по рамці, і момент інерції рамки відносно діаметра.

Дані: S =1см^2; $M = 10^{-5}$ Н·м;
B = 0,05 Тл; ω = 20 с$^{-1}$;
I – ? J – ?

Аналіз і розв'язання

Коли площина рамки розміщена паралельно полю, на неї діє максимальний обертальний момент $M = p_m B = BIS$, де B – індукція поля; I – сила струму; S – площа рамки; $p_m = IS$ – магнітний момент. Звідси

$$I = \frac{M}{BS}.$$

Під час повороту рамки виконується робота

$$A = I\Delta\Phi,$$

де $\Delta\Phi = BS$ – зміна магнітного потоку, який пронизує площину рамки. Отже, $A = IBS$. Ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії рамки:

$$IBS = J\omega^2/2 - J\omega_0^2/2 = J\omega^2/2,$$

де J – момент інерції рамки; ω – кінцева кутова швидкість; $\omega_0 = 0$ – початкова кутова швидкість. Звідси

$$J = \frac{2IBS}{\omega^2},$$

оскільки $M = BIS$, то $J = \frac{2M}{\omega^2}$.

Обчислення

$$I = \frac{10^{-5}}{0{,}05 \cdot 10^{-4}} = 2\,\text{А},\ J = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{20^2} = 5 \cdot 10^{-8}\,(\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

Задача 3. Соленоїд без осердя з одношаровою обмоткою з дроту діаметром 0,5 мм завдовжки 0,6 м має поперечний переріз 0,006 м^2. Який струм проходить по обмотці при напрузі 10 В, якщо за 0,001 с в обмотці виділяється кількість теплоти, яка дорівнює енергії поля всередині соленоїда? Поле вважати однорідним.

Дані: $d = 0{,}5$ мм ; $l = 0{,}6$ м; $S = 0{,}006\,\text{м}^2$;

$U = 10\,\text{В}$; $t = 0{,}001\,\text{с}$; $\mu = 1$;

I – ?

Аналіз і розв'язання

Під час проходження струму I при напрузі U в обмотці за час t виділиться кількість теплоти

$$Q = IUt. \tag{1.2}$$

Енергія поля всередині соленоїда

$$W = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 Sl, \tag{1.3}$$

де S – переріз; l – довжина соленоїда.

Напруга поля всередині соленоїда

$$H = nI,$$

де $n = \frac{N}{l} = \frac{N}{Nd} = \frac{1}{d}$ – щільність намотки витків соленоїда; N – кількість витків; d – діаметр дроту. Якщо витки щільно прилягають один до одного, то $l = Nd$.

Після підстановки в (1.3) значення H за умовою задачі можна дорівняти праві частини (1.2) та (1.3), тоді одержимо:

$$IUt = \frac{\mu\mu_0 I^2 Sl}{2d^2}.$$

Звідси

$$I = \frac{2Ud^2 t}{\mu\mu_0 Sl}.$$

Обчислення

$$I = \frac{2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}001}{1 \cdot 12{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}6} = 1{,}1 \text{ (А)}.$$

Задача 4. Електрон, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 100$ В, потрапив в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл під кутом $\alpha = 30°$ до напрямку ліній індукції. Визначити радіус R та крок h траєкторії руху електрону у вигляді гвинтової лінії.

Дані: $U = 100$ В; $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл; $\alpha = 30°$;

$R - ?$

Аналіз і розв'язання

На заряджену частинку, що рухається у магнітному полі, діє сила Лоренца, перпендикулярна векторам індукції $\vec{B}$ і швидкості $\vec{\upsilon}$:

$$F = |e| \upsilon B \sin\alpha = |e| \upsilon_{\perp} B$$

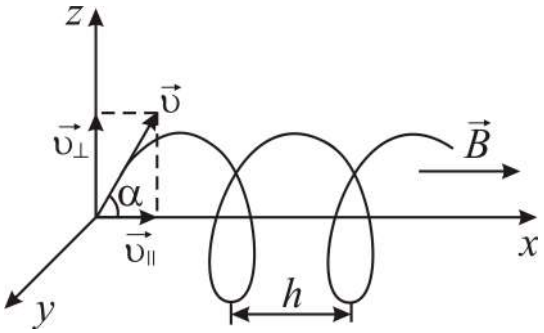


Рисунок 1.3

Складова сили Лоренца у напрямку $\vec{B}$ дорівнює нулю. Отже, електрон, що влетів у магнітне поле, рухатиметься по колу у площині, перпендикулярній лініям індукції зі швидкістю $\upsilon_{\perp}$ (рис. 1.3) і одночасно вздовж поля зі швидкістю $\upsilon_{||}$:

$$\upsilon_{\perp} = \upsilon \sin\alpha \,;\; \upsilon_{||} = \upsilon \cos\alpha \,.$$

Внаслідок одночасного руху по колу і прямій електрон рухатиметься по гвинтовій лінії.

Радіус кола знайдемо з таких міркувань. Магнітна сила для частинки є доцентровою. Таким чином,

$$|e| \upsilon_{\perp} B = \frac{m \upsilon_{\perp}^2}{R}.$$

Звідки радіус гвинтової лінії

$$R = \frac{\upsilon m \sin\alpha}{|e| B}.$$

Кінетична енергія електрона, яку він набув у прискорюючому електричному полі, дорівнює роботі, яку здійснило поле над частинкою. Тому

$$m\upsilon^2 / 2 = |e| U \,. \qquad (1.4)$$

Маючи швидкість з виразу (1.4), отримаємо:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{|e|}}\sin\alpha .$$

Крок гвинтової лінії дорівнює шляху, що пройшов електрон у напрямку $\vec{B}$ зі швидкістю $\upsilon_{||}$ за час, протягом якого електрон здійснює один оберт,

$$h = \upsilon_{||} T ,$$

де $T = \dfrac{2\pi R}{\upsilon_{\perp}}$.

Отже,

$$h = \upsilon_{||}\frac{2\pi R}{\upsilon_{\perp}} = 2\pi R ctg\alpha .$$

Задача 5. Протон, прискорений різницею потенціалів $U = 500$ кВ пролітає поперечне однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0{,}51$ Тл. Ширина області з полем $d = 10$ см (рис. 1.4). Знайти кут відхилення протона від початкового напрямку руху.

Дані: $U = 500$ кВ; $B = 0{,}51$ Тл; $d = 10$ см;

α – ?

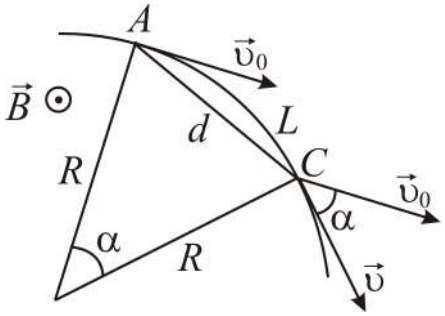


Рисунок 1.4

Аналіз і розв'язання

Перш ніж потрапити в однорідне магнітне поле протон рухається у прискорюючому електричному полі. Робота сил електричного поля йде при цьому на збільшення його кінетичної енергії

$$eU = \frac{m_p \upsilon_0^2}{2}, \qquad (1.5)$$

де e – заряд протона; m_p – його маса; υ_0 – швидкість, набута протоном в електричному полі.

З рівняння (1.5)

$$\upsilon_0 = \sqrt{2eU/m_p} .$$

На протон, що рухається у магнітному полі, діє сила Лоренца $\vec{F} = e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$, яка надає протону нормальне прискорення:

$$a_n = F/m_p = e\upsilon B/m_p = \upsilon_0^2/R .$$

Отже,

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_p}{e}} = 2\,(\text{м}).$$

Вийшовши з магнітного поля, протон продовжуватиме рух по прямій під певним кутом α до напрямку вектора початкової швидкості $\vec{\upsilon}_0$. Вектори $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\upsilon}_0$ перпендикулярні радіусам відповідно у точках А і С (рис. 1.4), тому кут можна знайти зі співвідношення $R\alpha = L$, де L – довжина дуги.

Для $R >> d$, що має місце у цьому випадку, можна припустити $AC \approx d$. Таким чином

$$\alpha \approx d/R = 0{,}51\,(\text{рад}).$$

1.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. По двох паралельних провідниках проходять струми 3 А і 4 А. Відстань між провідниками 14 см. Знайти геометричне місце точок, в яких напруженість магнітного поля дорівнює нулю. Розглянути два випадки надходження струму: а) в одному напрямку; б) у протилежних напрямках.

Відповідь: а) 6 см від меншого; б) 42 см від меншого.

Задача 2. По двох паралельних провідниках, розміщених на відстані 12 см один від одного, проходять струми по 30 А. Визначити напруженість магнітного поля в точці, яка лежить на відстані 10 см від кожного провідника, якщо струми проходять: а) в одному напрямі; б) у протилежних напрямках.

Відповідь: $H_1 = 76{,}4$ А/м; $H_2 = 57{,}3$ А/м.

Задача 3. Два колових провідники, радіусом 4 см кожний, розташовані у паралельних площинах на відстані 0,1 м. По кожному провіднику проходить струм $I_1 = I_2 = 2$ А. Знайти напруженість магнітного поля на осі кіл у точці, яка знаходиться на однаковій відстані від кожного провідника. Задачу обчислити для випадків, коли струми у провідниках мають: а) однаковий напрямок; б) протилежні напрямки.

Відповідь: $H = 12{,}2$ А/м ; $H = 0$.

Задача 4. Провідник завдовжки 1 м має вигляд квадрата. По ньому проходить струм 10 А. Знайти напруженість магнітного поля у центрі квадрата.

Відповідь: $H = 35{,}8$ А/м.

Задача 5. Соленоїд довжиною 30 см має 1000 витків. Знайти напруженість магнітного поля всередині соленоїда, якщо струм, що проходить по соленоїду, $I = 2$ А.

Відповідь: $H =$ 6670 А/м.

Задача 6. Рамка, площа якої 16 см^2 обертається в однорідному магнітному полі зі швидкістю 2 об/с. Вісь обертання розташована у площині рамки і перпендикулярна лініям магнітної індукції. Напруженість магнітного поля $7{,}96\cdot10^4$ А/м. Визначити: 1) залежність величини магнітного потоку крізь площину рамки від часу; 2) найбільше значення магнітного потоку.

Відповідь: $\Phi = 1{,}6\cdot10^{-4}\cos(4\pi t)$ Вб; $\Phi_{max} = 1{,}6\cdot10^{-4}$ Вб.

Задача 7. Потік магнітної індукції крізь соленоїд без осердя дорівнює $5\cdot10^{-6}$ Вб. Знайти магнітний момент соленоїда, якщо його довжина 25 см.

Відповідь: $p_m = 1\,\text{А}\cdot\text{м}^2$.

Задача 8. Магнітний момент колового контуру зі струмом $p_m = 1\,\text{А}\cdot\text{м}^2$. Радіус кола $R = 10$ см. Знайти індукцію B у центрі контуру.

Відповідь: $B = 0{,}2$ мТл.

Задача 9. В однорідному горизонтальному магнітному полі розміщений у рівновазі перпендикулярно до поля горизонтальний прямолінійний алюмінієвий провідник зі струмом 10 А. Визначити індукцію поля, якщо радіус провідника дорівнює 2 мм.

Відповідь: $B = 3{,}39\cdot10^{-2}$ Тл.

Задача 10. По дротяному кільцю $R = 10$ см проходить струм $I = 80$ А. Знайти магнітну індукцію B у точці, рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань $r = 20$ см.

Відповідь: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2r^3}R^2 = 62{,}8$ мкТл.

Задача 11. Два нескінченно довгих прямих провідники схрещені під прямим кутом (рис. 1.5). По провідниках йдуть струми I_1=80 А та I_2=60 А. Відстань між провідниками d=10 см. Чому дорівнює магнітна індукція B у точках A і C, які розташовані на однаковій відстані від обох провідників?

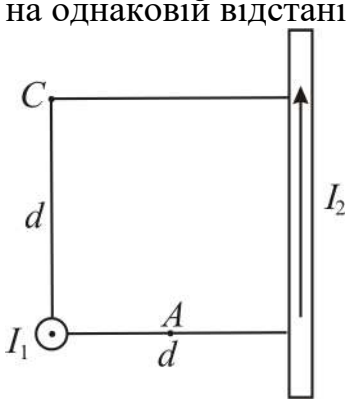


Рисунок 1.5

Відповідь: $B_1 = 400$ мкТл, $B_2 = 200$ мкТл.

Задача 12. По тонкому дроту, вигнутому у вигляді прямокутника, проходить струм I=60 А. Сторони прямокутника a=30 см і b=40 см. Яке значення має магнітна індукція в точці перехрестя діагоналей?

Відповідь: $B = \dfrac{2\mu_0 I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}$=200 мкТл.

Задача 13. По тонкому дротяному кільцю проходить струм. Не змінюючи сили струму у провіднику, його перетворили на квадрат. У скільки разів змінилася магнітна індукція у центрі контуру?

Відповідь: в 1,14 рази.

Задача 14. Електрон знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю E = 200 кВ/м. Який шлях пройде електрон за час t=1 нс, якщо його початкова швидкість дорівнює нулю? Яку швидкість матиме електрон у кінці цього проміжку часу?

Відповідь: $S = \dfrac{|e|Et^2}{2m}$=1,76 см; $\upsilon = \dfrac{|e|E}{mt}$=35,2 Мм/с.

Задача 15. Яка прискорююча різниця потенціалів U потрібна для того, щоб надати швидкість υ=30 Мм/с: 1) електрону; 2) протону?

Відповідь: 1) 2,56 кВ; 2) 4,7 МВ.

Задача 16. Протон, початкова швидкість якого дорівнює 100 км/с, влетів у однорідне електричне поле (E=300 В/см) так, що вектор швидкості збігся з напрямком ліній напруженості. Який шлях S має пройти протон у напрямку ліній поля, щоб його швидкість подвоїлась?

Відповідь: $S = \dfrac{3m_p\upsilon^2}{2eE}$=5,19 мм. ($m_p$ – маса протона).

Задача 17. Нескінченна площина заряджена негативно з поверхневою густиною σ=35,4 нКл/м^2. У напрямку силової лінії поля, створеного площиною, летить електрон. Визначити мінімальну відстань $l_{\min}$, на яку може підійти до площини електрон, якщо на відстані l_0=5 см він мав кінетичну енергію $T = 80$ еВ.

Відповідь: $l = l_0 - \dfrac{2\varepsilon_0 T}{|e|\sigma} = 1$ см.

Задача 18. Електрон, що летів горизонтально зі швидкістю υ =1,6 Мм/с, потрапив в однорідне електричне поле з напруженістю E = 90 В/см, яке спрямовано вертикально вгору. Якою буде за абсолютним значенням і напрямком швидкість електрона υ через 1 нс?

Відповідь: 2,24 Мм/с; відхилиться на 45° від початкового напрямку.

Задача 19. В однорідне електричне поле напруженістю E=1 кВ/м вздовж силової лінії влітає електрон зі швидкістю υ_0=1 Мм/с. Визначити відстань l, що пройшов електрон до точки, в якій його швидкість υ_1 дорівнюватиме половині початкової.

Відповідь: $l = \dfrac{3m\upsilon_1^2}{8|e|E}$=2,13 мм.

Задача 20. Електрон із початковою швидкістю υ_0=3 Мм/с влетів в однорідне електричне поле напруженістю E=150 В/м. Вектор початкової швидкості перпендикулярний лініям напруженості електричного поля. Знайти: силу F, що діє на електрон; прискорення a, якого набув електрон; швидкість υ електрона через t = 0,1 мкс.

Відповідь: F = 2,4·10^{-17} Н; a = 2,75·10^{13} м/с^2; υ = 4,07 Мм/с.

Задача 21. Електрон влетів у плоский конденсатор, маючи швидкість υ=10 Мм/с, яка спрямована паралельно пластинам. У момент вильоту з конденсатора напрямок швидкості електрона складав α=35° з початковим напрямком швидкості. Визначити різницю потенціалів U між пластинами (поле вважати однорідним), якщо довжина пластин l дорівнює 10 см, відстань d між ними дорівнює 2 см.

Відповідь: 79,6 В.

Задача 22. Два електрона, що розташовані на великій відстані один від одного, зближуються з відносною початковою швидкістю υ=10 Мм/с. Визначити мінімальну відстань $r_{\min}$, на яку вони можуть підійти один до одного.

Відповідь: $r_{\min} = \dfrac{e^2}{\pi m\varepsilon_0\upsilon^2}$=10,1 пм.

Задача 23. Електрон рухається у магнітному полі з індукцією B=0,02 Тл по колу радіусом 1 см. Визначити кінетичну енергію T електрона (у джоулях і електрон-вольтах).

Відповідь: $T = \dfrac{B^2r^2e^2}{2m}$ = 0,563 Дж = 3,52 кеВ.

Задача 24. Заряджена частинка з енергією T=1 кеВ рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом R = 1 мм. Знайти силу F, що діє на частинку з боку поля.

Відповідь: $F = 2T/R$=0,32 пН.

Задача 25. Визначити частоту обертання електрона по коловій орбіті у магнітному полі, індукція B якого дорівнює 0,2 Тл.

Відповідь: $\nu = \dfrac{B|e|}{2\pi m} = 5{,}6 \cdot 10^9$ Гц.

Задача 26. В однорідному магнітному полі з індукцією B=100 мкТл рухається електрон по гвинтовій лінії. Визначити швидкість υ електрона, якщо крок h гвинтової лінії дорівнює 20 см, а радіус R = 5 см.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{B|e|}{m}\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}$ =1,04 Мм/с.

Задача 27. Провідник довжиною 0,6 м і опором 0,025 Ом рухається поступально у площині, перпендикулярній до магнітного поля з індукцією $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Тл. По провіднику проходить струм 4 А. Швидкість руху провідника 0,8 м/с. Яка потужність більша і в скільки разів: витрачена на переміщення провідника в магнітному полі чи на його нагрівання?

Відповідь: у 416 разів.

Задача 28. З дроту довжиною 20 см зробили квадратний і коловий контури. Знайти обертальні моменти, що діють на контури, якщо вони знаходяться в однорідному магнітному полі, індукція якого 0,1 Тл. По контурах проходить струм 2 А. Площина контурів складає 45° із напрямком ліній індукції.

Відповідь: M_1 =$3{,}53 \cdot 10^{-4}$ Н·м; M_2=$4{,}5 \cdot 10^{-4}$ Н·м.

Задача 29. Заряджена частинка влетіла перпендикулярно лініям індукції в однорідне магнітне поле, утворене у середовищі. Внаслідок взаємодії з речовиною частинка, знаходячись у полі, втратила половину своєї початкової енергії. У скільки разів будуть відрізнятися радіуси кривизни R траєкторії початку і кінця шляху?

Відповідь: $R_1/R_2 = \sqrt{T_1/T_2} = \sqrt{2}$ **.**

Задача 30. Перпендикулярно магнітному полю з індукцією B = 0,1 Тл збуджене електричне поле напруженістю E = 100кВ/м. Перпендикулярно обом полям рухається, не відхиляючись від прямолінійної траєкторії, заряджена частинка. Обчислити швидкість υ частинки.

Відповідь: $\upsilon = \dfrac{E}{B}$ = 1Мм/с.

2 ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ. СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА.

2.1 Мета заняття

Вивчити закони електромагнітної індукції та рівняння Максвелла. Навчитися користуватися ними для розв'язання задач.

2.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом або підручником [1, розд. 7, 10; 3, § 60-71; 5, розд. 5.3, 5.5]. Особливу увагу зверніть на закон Фарадея, правило Ленца, явища самоіндукції та взаємоіндукції. З'ясуйте фізичний зміст та межі застосування рівнянь Максвелла. Дайте відповіді на контрольні запитання, проаналізуйте розв'язання завдань, наведених, як приклад.

2.3 Основні закони і формули

1. Закон Фарадея (закон електромагнітної індукції)

$$\varepsilon_i = -d\Phi/dt,$$

де ε_i – електрорушійна сила (ЕРС) електромагнітної індукції, $\Phi = BS\cos\alpha$ – потік вектора магнітної індукції $\vec{B}$ крізь площину S, α – кут між вектором нормалі $\vec{n}$ до площини S і вектором магнітної індукції $\vec{B}$, N – кількість витків котушки.

2. ЕРС самоіндукції

$$\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt},$$

де $L = \Phi/I$ – індуктивність контуру, I – сила струму у контурі.

3. Індуктивність соленоїда

$$L = \mu_0\mu n^2 V,$$

де $n = N/l$ – кількість витків на одиницю довжини соленоїда, $V = Sl$ – об'єм соленоїда.

4. Магнітна індукція соленоїда

$$B = \mu_0\mu nI.$$

5. Миттєве значення сили струму у колі, яке має опір R та індуктивність L:

а) при замиканні кола

$$I = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$

б) при розмиканні кола

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

де I_0 – сила струму у колі при $t = 0$; t – час, який минув після замикання чи розмикання кола.

6. ЕРС взаємоіндукції

$$\varepsilon_{i12} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt};\ \varepsilon_{i21} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

де $L_{12}I_2 = \Phi_1$, $L_{21}I_1 = \Phi_2$ – магнітні потоки у першому та другому контурах, створені струмами I_2 та I_1 відповідно.

7. Енергія магнітного поля, зчепленого з контуром

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

8. Об'ємна густина енергії магнітного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

9. Перше рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}.$$

10. Друге рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S}.$$

2.4 Контрольні запитання та завдання

1. У чому полягає явище електромагнітної індукції?
2. Сформулюйте закон електромагнітної індукції.
3. Поясніть правило Ленца.
4. У чому полягає явище самоіндукції? Чому дорівнює ЕРС самоіндукції?. Дайте визначення індуктивності.
5. Як змінюється з часом сила струму при включенні електричного поля з індуктивністю?
6. Запишіть закони зміни струму у колі з індуктивністю при замиканні та розмиканні кола. Поясніть за допомогою графіка.
7. У чому полягає явище взаємної індукції? Чому дорівнює ЕРС взаємної індукції? Дайте визначення взаємної індуктивності.
8. Охарактеризуйте природу вихрового електричного поля та його зв'язок зі змінним магнітним полем.
9. Які величини характеризують електромагнітне поле?
10. Запишіть та проаналізуйте рівняння Максвелла.

2.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Прямий провідник довжиною l рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon} = const$ в однорідному магнітному полі з індуктивністю $\vec{B}$ так, що площина dS його траєкторії перпендикулярна вектору $\vec{B}$ (рис. 2.1). Користуючись

електронною теорією провідності, виведіть формулу закону електромагнітної індукції і з'ясуйте сутність природи цього явища, відкритого М. Фарадеєм.

Дані: $l\,;\vec{B}\,;\vec{\upsilon}\,;dS\,;$

$\varepsilon_i - ?$

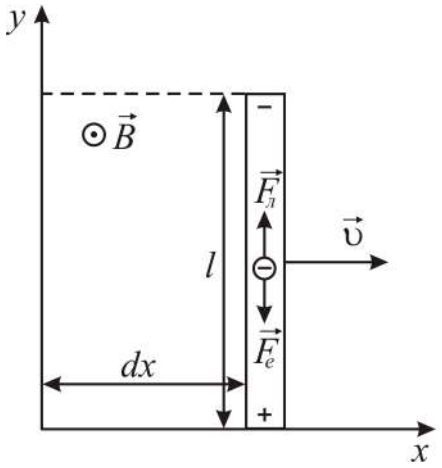


Рисунок 2.1

Аналіз і розв'язання

Вільні електрони провідності, що знаходяться у провіднику, разом із ним рухаються у магнітному полі зі швидкістю $\vec{\upsilon}$. Отже на кожен з них діє сила Лоренца

$$\vec{F}_л = e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right].$$

Результатом цього є впорядковане переміщення цих електронів вздовж провідника в один його кінець з утворенням там надлишку від'ємного заряду. На протилежному боці утворюватиметься недостача електронів із позитивним зарядом. У результаті такого перерозподілу між цими зарядами виникає електричне поле з напруженістю $\vec{E}$, яке викликає дію на електрони ще однієї сили – сили електричного поля

$$\vec{F}_e = e\vec{E}\,.$$

Електрони рухатимуться під дією рівнодіючої цих сил, доки вона не стане рівною нулю, тобто при

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_л$$

або з урахуванням їх значень

$$e\vec{E} = -e\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right].$$

Звідси

$$\vec{E} = -\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right].$$

З останнього виразу видно, що напруженість поля сил, які рухають електрони проти сил електростатичного поля, має неелектростатичну природу. Тому її називають напруженістю поля сторонніх сил $\vec{E}_{ст} = \left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]$. Вона однакова за величиною з напруженістю електричного поля $\vec{E}$, але протилежна їй за напрямком $\vec{E} = -\vec{E}_{ст}$.

Робота поля сторонніх сил $dA = F_л dl \cos\varphi$ з переміщення зарядів проти сил електричного поля зумовлює появу ЕРС, індукованої магнітним полем

$$\varepsilon_i = \int_0^l \vec{E} d\vec{l} = -\int_0^l \vec{E}_{cm} d\vec{l} = -\int_0^l \left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right] d\vec{l} = -\int_0^l \upsilon B dl = -\upsilon B l .$$

Враховуючи, що $\upsilon = dx/dt$, маємо:

$$\varepsilon_i = -\upsilon B l = -B\frac{l dx}{dt} = -B\frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де $d\Phi = BdS$ – магнітний потік через площину dS.

Отже ми вивели формулу ЕРС електромагнітної індукції $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ як роботу сторонніх сил з переміщення зарядів вздовж провідника, що рухається у магнітному полі, а також з'ясували, що поле цих сил не є електростатичним.

Задача 2. Між полюсами магніту з індукцією $\vec{B}$ знаходиться підвішений провідний плоский контур із джерелом електрики. Опір контуру R. Його площина dS розташована паралельно лініям магнітної індукції (рис. 2.2). Після замикання ключа К за час dt контур повертається на деякий кут. При цьому магнітний потік через нього змінюється на величину $d\Phi$. З'ясувати природу електромагнітних явищ, які відбуваються при цьому, їх кількісні характеристики та зв'язок між ними.

Дані: $\vec{B}$; R; dS; dt; $d\Phi$

$\varepsilon_i - ?$

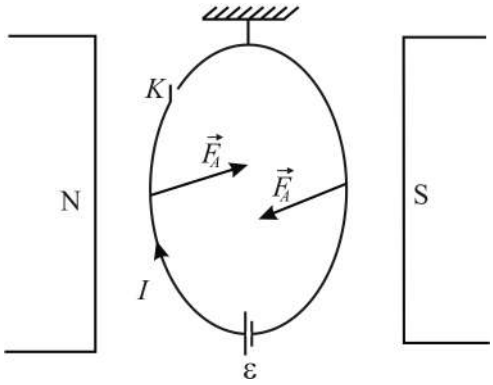


Рисунок 2.2

Аналіз і розв'язання

Після замикання ключа К відбувається протікання струму I по контуру, його нагрівання та кутове переміщення. Ці явища супроводжуються енергетичними змінами у джерелі електрики $\varepsilon I dt$, тепловими в електричному опорі контуру $Q = I^2 R dt$ та механічною роботою пари сил Ампера при зміні кутового положення контуру у магнітному полі $dA = Id\Phi$, де $d\Phi$ – зміна потоку магнітної індукції через площу контуру dS за час dt. Всі ці зміни врівноважені законом збереження енергії

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + Id\Phi .$$

Після очевидних перетворень цього виразу маємо еквівалентне йому рівняння закону Ома

$$RI = \varepsilon - d\Phi/dt$$

або

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R},$$

де $\varepsilon_i = -d\Phi/dt$ – ЕРС індукції магнітного поля.

Струм, індукований у контурі магнітним полем, виражається формулою

$$I_i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

До речі, з цих виразів видно, що цей струм існуватиме й за відсутності джерела електрики, коли $\varepsilon = 0$, тільки б відбувалася зміна магнітного потоку в часі.

Зробимо вслід за Максвеллом ще один важливий висновок з отриманих результатів. При повороті контуру силами Ампера чи силами будь-якої іншої природи змінюється у часі величина магнітного потоку через його площину dS зі швидкістю $\frac{d\Phi}{dt}$, де $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$. Отже

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{B}d\vec{S}\right).$$

Оскільки площина контуру при цьому не змінюється у часі, операції диференціювання за часом та інтегрування по поверхні можна поміняти місцями і записати зміну потоку Φ через контур як частинну похідну від $\vec{B}$ за часом. Тоді ЕРС індукції магнітного поля матиме такий вигляд:

$$\varepsilon_i = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}.$$

Звернемо увагу на те, що ЕРС у будь-якому контурі дорівнює циркуляції вектора напруженості сторонніх сил, тобто

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{cm}d\vec{l},$$

де $\vec{E}_{cm} = \vec{E}$ – вектор напруженості вихрового електричного поля за висновком Максвелла. Прирівняємо праві частини останніх двох виразів

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}.$$

Це перше рівняння Максвелла. Воно дає можливість стверджувати, що вихрове магнітне поле неминуче породжує вихрове електричне поле, і вони існують невід'ємно одне від одного, причому незалежно від існування провідникового контуру. Адже у цьому рівнянні відсутні його електричні чи магнітні характеристики. Тому контур є тільки індикатором наявності вихрового електричного поля.

Задача 3. Контур радіусом 0,2 м розташований у площині, перпендикулярній вектору магнітної індукції, яка змінюється з часом за законом $B = 6 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^5 t}$. У просторі це поле однорідне. Знайдіть напруженість вихрового електричного поля, що збуджується у контурі у момент часу $t = 3 \cdot 10^{-5}$ с.

Дані: R=0,2 м; $B = 6 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^5 t}$; $t = 3 \cdot 10^{-5}$ с

$E - ?$

Аналіз і розв'язання

За першим рівнянням Максвела в інтегральній формі $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$ можна визначити залежність E від B таким чином:

$$E \cdot 2\pi R = -\pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t},$$

звідки

$$E = -\frac{R}{2}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(6 \cdot 10^{-3} e^{-2 \cdot 10^5 t}\right) = 1{,}2 \cdot 10^3 \frac{R}{2} e^{-2 \cdot 10^5 t} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^3 \frac{0{,}2}{2} e^{-2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 0{,}3 \text{ (А/м).}$$

Задача 4. По довгому прямому соленоїду радіусом R проходить струм, який можна змінювати так, що магнітне поле у середині соленоїда змінюється за законом $B = \beta t^2$, де β – стала величина. Знайдіть густину струму зміщення як функцію відстані r від соленоїда.

Дані: R; $B = \beta t^2$

$j_{зм}(r) - ?$

Аналіз і розв'язання

Густина струму зміщення $\vec{j}_{зм} = d\vec{D}/\partial t$, де $\vec{D}$ – вектор електричного зміщення $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Знайдемо спочатку зміщення вихрового електричного поля $\vec{E}$. Для цього використаємо рівняння Максвелла для циркуляції вектора $\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \qquad (2.1)$$

Якщо $r < R$, то рівняння (2.1) має вигляд

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \text{ або } E = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right).$$

Знаходимо $\partial B/\partial t = 2\beta t$. Тоді $E(r) = r\beta t$, ($r < R$).

Для $r > R$ теорему про циркуляцію вектора $\vec{E}$ запишемо у вигляді:

$$2\pi r E = \pi R^2 \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Звідси $E(r)=\dfrac{\beta R^2 t}{r}$, $(r>R)$.

Знаючи залежність напруженості вихрового електричного поля від відстані $E(r)$, знайдемо густину струму зміщення

$$j_{зм}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\varepsilon_0\beta r,\ (r<R),$$

$$j_{зм}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\varepsilon_0\beta R^2}{r},\ (r>R).$$

Залежність $j_{зм}(r)$ можна зобразити графічно (рис. 2.3)

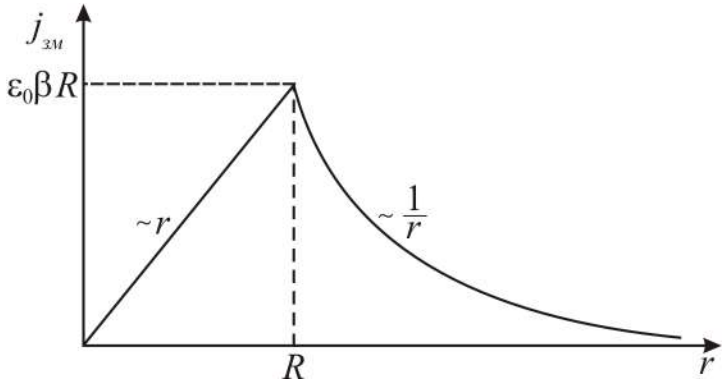


Рисунок 2.3

2.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Прямий провідник довжиною l=0,4 м рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю υ=5 м/с перпендикулярно лініям індукції. Різниця потенціалів між кінцями провідника дорівнює 0,6 В. Знайти індукцію магнітного поля.

Відповідь: B = 0,3 Тл.

Задача 2. Прямий провідник довжиною l=0,1 м знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B=1 Тл. Кінці його замкнуто гнучким провідником, що не знаходиться у магнітному полі. Опір цього електричного кола дорівнює 0,4 Ом. Яка потужність витрачається, якщо провідник рухається перпендикулярно лініям індукції з швидкістю υ = 20 м/с?

Відповідь: P=10 Вт.

Задача 3. В однорідному магнітному полі з індукцією B=0,4 Тл обертається стержень довжиною l=0,1 м. Вісь обертання проходить через один із кінців стержня. Визначити різницю потенціалів між кінцями стержня при частоті обертання n = 16 c^{-1} .

Відповідь: U =0,2 В.

Задача 4. В однорідному магнітному полі з індукцією B=0,35 Тл рівномірно обертається з частотою n = 8 с$^{-1}$ рамка. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна лініям індукції. Площа рамки S=50 см^2, кількість витків N=1500. Визначити максимальну ЕРС індукції, яка виникає у рамці.

Відповідь: ε_{max} = 132 В.

Задача 5. По П-подібному провіднику (рис. 2.4) переміщується зі сталою швидкістю υ під дією сили F перемичка. Контур знаходиться у перпендикулярному його площині однорідному магнітному полі. Чому дорівнює сила F, якщо кожної секунди у контурі виділяється кількість теплоти Q?

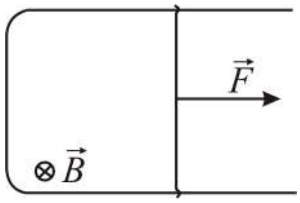


Рисунок 2.4

Відповідь: $F = \dfrac{Q}{\upsilon t}$.

Задача 6. Провідник, що має форму параболи $y = kx^2$, знаходиться у однорідному магнітному полі з індукцією B (рис. 2.5). З вершини параболи в момент часу t=0 почати переміщувати перемичку 1-2. Знайти ЕРС індукції у контурі як функцію y, якщо перемичка рухається зі сталою швидкістю υ.

Відповідь: $\varepsilon_i = 2B\upsilon\sqrt{y/k}$.

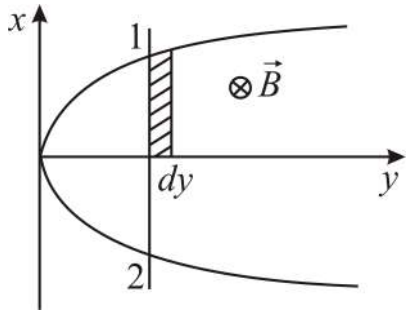


Рисунок 2.5

Задача 7. Кільце з провідника радіусом a = 0,1 м лежить на столі. Який електричний заряд пройде по кільцю, якщо його перевернути з однієї сторони на іншу? Опір кільця R=1 Ом. Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі B = 10 мТл.

Відповідь: q = 3,14 мкКл.

Задача 8. Квадратна рамка зі струмом а=5 см і опором R мОм знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B=40 мТл. Нормаль до

площини рамки розташована під кутом $\alpha = 30°$ до ліній магнітної індукції. Знайти заряд, що пройде по рамці, якщо магнітне поле виключити.

Відповідь: q = 8,67 мКл.

Задача 9. Тонкий провідник довжиною l =1 м зігнуто у вигляді квадрата, кінці якого замкнено. Квадрат знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B =0,1 Тл. Визначити заряд, що пройде по провіднику, якщо квадрат, протягнувши за протилежні вершини, витягнути у лінію. Опір провідника дорівнює 3 Ом.

Відповідь: $q = 2{,}08 \cdot 10^{-3}$ Кл.

Задача 10. Магнітна індукція B поля між полюсами двополюсного генератора дорівнює 0,8 Тл. Ротор має N =100 витків площею S =400 см^2. Визначити частоту обертання якоря, якщо максимальне значення ЕРС індукції ε_{max} =200 В.

Відповідь: n =10 с$^{-1}$.

Задача 11. Соленоїд площею перерізу 5 см^2 має N = 1200 витків. При силі струму I = 2 А індукція магнітного поля всередині соленоїда B = 0,01Тл. Знайти індуктивність соленоїда.

Відповідь: L = 3 мГн.

Задача 12. Ізольований металевий диск радіусом r = 0,25 м обертається з кутовою швидкістю ω = 100 с$^{-1}$ навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно площині диска. Визначити різницю потенціалів між центром та краєм диска, яка виникає за відсутності магнітного поля та в однорідному магнітному полі, перпендикулярному площині диска (B = 10 млТл).

Відповідь: 1,8 нВ; $3{,}08 \cdot 10^{-2}$ В.

Задача 13. Котушка з індуктивністю L = 250 мГн і опором R = 0,3 Ом підключається до джерела постійної напруги. Через який проміжок часу τ сила струму у котушці досягне 50% від усталеного значення?

Відповідь: τ = 0,58 с.

Задача 14. У колі проходив струм I_0 = 50 А. Джерело струму можна включити, не розриваючи кола. Визначити силу струму в цьому колі через t 0,01 с після відключення його від джерела струму. Опір кола дорівнює 20 Ом, індуктивність L = 0,1 Гн.

Відповідь: I = 6,86 А.

Задача 15. До джерела струму з внутрішнім опором r = 2 Ом підключили котушку індуктивністю L = 0,5 Гн і опором R = 8 Ом. Знайти проміжок часу, за який струм у котушці, збільшуючись, досягне значення, що відрізняється від максимального на 1%.

Відповідь: t =0,23 с.

Задача 16. Дві котушки знаходяться на невеликій відстані одна від одної. Коли сила струму у першій котушці змінюється зі швидкістю $\Delta I/\Delta t$=5 А/с, у другій виникає ЕРС індукції $\mathcal{E}_1$ = 0,1В. Визначити коефіцієнт взаємної індукції.

Відповідь: 20 мГн.

Задача 17. Магнітний потік через нерухомий контур з опором R змінюється протягом часу τ за законом $\Phi(t) = at(\tau - t)$. Знайти кількість теплоти, яка виділяється за цей час у контурі. Індуктивністю контуру знехтувати.

Відповідь: $Q = \dfrac{a^2\tau^3}{R}$.

Задача 18. Скільки метрів тонкого дроту потрібно для виготовлення соленоїда довжиною 100 см та індуктивністю 1 мГн, якщо діаметр перерізу соленоїда значно менший за його довжину.

Відповідь: l = 100 м.

Задача 19. Через котушку радіусом 2 см, яка має 500 витків, проходить струм силою 2 А. Визначити індуктивність котушки, якщо напруженість магнітного поля у центрі дорівнює 10 кА/м.

Відповідь: L = 4 мГн.

Задача 20. Знайти індуктивність одиниці довжини кабеля, що складається з двох тонкостінних коаксіальних металевих циліндрів радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$). Сили струмів у циліндрах однакові та протилежно напрямлені. Магнітна проникність середовища дорівнює одиниці.

Відповідь: $\dfrac{L}{I} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

Задача 21. Дві котушки, індуктивності яких дорівнюють L_1 = 3 мГн та L_2 = 5 мГн, з'єднані послідовно. При цьому індуктивність системи L =11 мГн. Як зміниться індуктивність системи, якщо в одній з котушок напрям струму змінити на протилежний, не змінюючи взаємне положення котушок?

Відповідь: L = 5 мГн.

Задача 22. Два соленоїда однакової довжини l та з радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$) мають відповідно n_1 та n_2 витків на одиницю довжини. Менший соленоїд цілком помістили всередину більшого так, що осі їх співпали. Визначити модуль взаємної індуктивності $|L_{12}|$ соленоїдів.

Відповідь: $|L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$.

Задача 23. Довжина соленоїда 1 м, площа його поперечного перерізу 20 см^2, індуктивність L=0,4 мГн, об'ємна густина енергії $w = 0{,}1$ Дж/м^2. Визначити силу струму у соленоїді.

Відповідь: $I = \sqrt{\dfrac{2wSl}{L}} = 1\text{A}.$

Задача 24. Одношаровий соленоїд довжиною 0,4 м із площею поперечного перерізу 50 см^2, намотаний дротом діаметром 0,5 мм, підключено до напруги 10 В. Який струм тече по обмотці, якщо за 0,5 мс в ній виділяється кількість теплоти, яка дорівнює енергії магнітного поля всередині соленоїда? Поле однорідне.

Відповідь: I = 995 мА.

Задача 25. Визначити енергію магнітного поля соленоїда, який має 300 витків, що намотані на картонний каркас радіусом 3 см та довжиною 6 см, якщо по ньому проходить струм 4 А.

Відповідь: 8,5 мДж.

Задача 26. Довести, використовуючи рівняння Максвелла, що змінне магнітне поле не може існувати без електричного поля; що однорідне електричне поле не може існувати за наявності змінного магнітного поля.

Задача 27. Показати, що наслідком рівнянь Максвелла є закон збереження електричного заряду, тобто $div\vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$.

Задача 28. Сила струму у прямому нескінченному провіднику дорівнює I. На відстані r_0 (рис. 2.6) від провідника знаходиться плоский контур, утворений двома паралельними шинами, по яких переміщується прямий провідник, та резистором з опором R. Відстань між шинами дорівнює a, швидкість руху провідника υ. Знайти, за якими законами змінюється з часом: магнітний потік, що пронизує контур, $\Phi(t)$; ЕРС індукції $\varepsilon_i(t)$; індукційний струм у контурі $I_i(t)$ кількість теплоти Q, що виділяється у контурі за проміжок часу від t_1 до t_2.

Відповідь: $\Phi(t) = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \dfrac{r_0 + \upsilon t}{r_0};$

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \cdot \frac{\upsilon}{r_0 + \upsilon t};$$

$$I_i(t) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R} \cdot \frac{\upsilon}{r_0 + \upsilon t};$$

$$Q = \frac{\mu_0^2 I^2 a^2 \upsilon}{4\pi^2 R} \left(\frac{1}{r_0 + \upsilon t_1} - \frac{1}{r_0 + \upsilon t_2} \right).$$

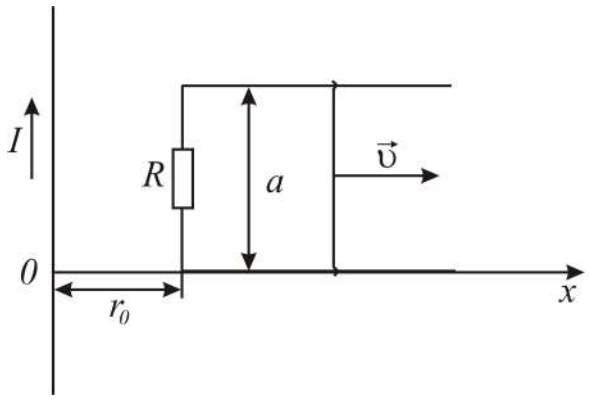


Рисунок 2.6

Задача 29. Квадратна рамка і довгий прямий провідник зі струмом I знаходиться в одній площині (рис. 2.7). Сторона рамки дорівнює a. Рамку переміщують вправо зі сталою швидкістю υ. Знайти ЕРС індукції як функцію відстані x.

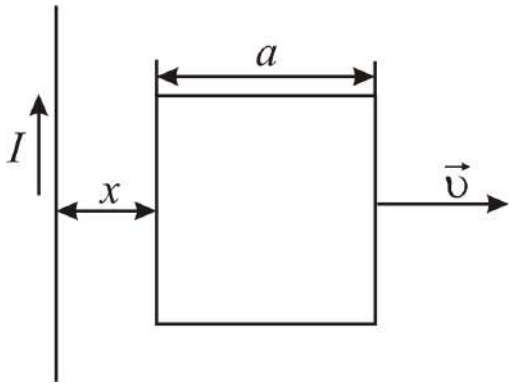


Рисунок 2.7

Відповідь: $\varepsilon_i = \dfrac{\mu_0 I a^2 \upsilon}{2\pi x(x+a)}$.

Задача 30. Визначити величину заряду, який пройшов по соленоїду зі струмом 0,5 А після замикання його кінців. Діаметр соленоїда 3 см, дріт обмотки (алюміній, $\rho = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) має діаметр 0,3 мм.

Відповідь: $q = 42{,}7$ мкКл.

3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

3.1 Мета заняття

Засвоїти фізичні величини та рівняння, що характеризують електромагнітні коливання (вільні, загасаючі, вимушені) та хвилі. Оволодіти методами розв'язання задач.

3.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом або підручником [1, розд. 9, 10; 3, § 88-92, 104-109; 5, розд. 7]. Засвоїти фізичні принципи утворення вільних незгасаючих, загасаючих та вимушених коливань, а також випромінювання, розповсюдження та прийому електромагнітних хвиль. Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язування задач, що наведені у прикладах.

3.3 Основні закони і формули

1. Вільні незгасаючі електромагнітні коливання:

− диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань заряду в електромагнітному контурі

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0;$$

− розв'язок диференціального рівняння $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

де q_0 – амплітуда заряду; φ_0 – початкова фаза коливань;

− $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – власна частота коливань контуру, L – індуктивність контуру; C – його електроємність;

− період власних коливань, формула Томсона

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC};$$

− сила струму у коливальному контурі

$$I = dq/dt = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = q_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2);$$

− напруга на обкладках конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $U_0 = q_0/C$ – амплітуда напруги на конденсаторі.

2. Загасаючі електромагнітні коливання:

− диференціальне рівняння загасаючих коливань

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0;$$

де $\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коефіцієнт загасання, ω_0 – власна частота коливань контуру, R – активний опір.

- розв'язок диференціального рівняння

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_1\right);$$

- частота загасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2};$$

- період загасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}}.$$

3. Величини, що характеризують загасання:

- час релаксації τ – час, за який амплітуда зменшується в е разів;
- коефіцієнт загасання $\beta = 1/\tau$;
- логарифмічний декремент загасання

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e},$$

де A – амплітуда коливань, N_e – кількість коливань за час, протягом якого амплітуда зменшиться в *e* разів;

- добротність коливального контуру

$$Q \approx 2\pi\frac{W}{\delta W},$$

де W – енергія, яку має контур у визначений час, δW – зменшення енергії за період коливань.

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e.$$

4. Вимушені коливання:

- диференціальне рівняння коливань заряду у контурі

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t,$$

де $\varepsilon = \varepsilon_0\cos\omega t$ – змінна ЕРС;

- розв'язок диференціального рівняння $q = q_0\cos\left(\omega t - \psi\right)$,

де $q_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}}$, $tg\psi = \dfrac{R}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}$.

5. Резонансна частота для заряду та напруги

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}};$$

для сили струму

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

6. Змінний струм $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$,

де $I_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$ – амплітуда сили струму, φ – фазовий зсув між напругою і струмом , $tg\varphi = (\omega L - 1/\omega C)/R$.

7. Повний опір або імпеданс

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

8. Індуктивний опір $X_L = \omega L$, ємнісний опір $X_C = 1/\omega C$, реактивний опір $X = X_L - X_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$.

9. Потужність, що виділяється у колі змінного струму $P = I_д U_д \cos\varphi$, де $I_д = I_0/\sqrt{2}$, $U_д = U_0/\sqrt{2}$ – діючі значення сили струму та напруги, φ – фазовий зсув між напругою і струмом.

10. Зв'язок довжини електромагнітної хвилі λ з періодом T і частотою ν коливань

$$\lambda = cT \quad \text{або} \quad \lambda = c/\nu,$$

де c – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

11. Фазова швидкість (швидкість поширення у середовищі фази монохроматичної хвилі)

$$\upsilon = c/n = c/\sqrt{\varepsilon\mu},$$

де n – абсолютний показник заломлення, ε – відносна діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність.

12. Хвильові рівняння електромагнітної хвилі

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

13. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$
$$H = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

де ω – частота хвилі, $k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, α_1 і α_2 – початкові фази коливань.

14. Зв'язок між миттєвими значеннями напруженостей електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів в електромагнітній хвилі

$$E\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}.$$

15. Зв'язок між амплітудними значеннями векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$

$$E_0\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0\sqrt{\mu_0 \mu}.$$

16. Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} EH = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} EH.$$

17. Вектор Умова-Пойнтінга (вектор густини потоку енергії хвилі)

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right].$$

18. Модуль густини потоку енергії

$$S = wv = EH.$$

3.4 Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть рівняння вільних незгасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв'язок воно має?
2. Чому дорівнюють період й частота вільних незгасаючих коливань?
3. Запишіть рівняння загасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв'язок воно має?
4. За яких умов електричні коливання у коливальному контурі є незгасаючими, а за яких загасаючими?
5. Чому дорівнюють період та частота загасаючих коливань?
6. Назвіть величини, що характеризують загасання електромагнітних коливань.
7. Що таке логарифмічний декремент загасання та добротність?

8. Запишіть рівняння вимушених коливань в електричному контурі. Який розв'язок воно має?

9. Чому дорівнюють індуктивний, ємнісний, реактивний та повний опори кола?

10. Сформулюйте закон Ома для електричного кола змінного струму.

11. Що таке діючі значення сили струму та напруги? Чому вони дорівнюють?

12. Що таке електромагнітна хвиля? Яка швидкість її поширення у вакуумі та у середовищі?

13. Запишіть хвильові рівняння для $\vec{E}$ і $\vec{H}$ електромагнітної хвилі.

14. Запишіть рівняння плоскої електромагнітної хвилі.

15. Чому дорівнює густина енергії електромагнітної хвилі?

16. Чому дорівнює і який фізичний зміст вектора Умова-Пойнтінга?

3.4 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Коливальний контур складається з конденсатора з двома пластинами площею $S = 10\,\text{см}^2$ кожна, які знаходяться на відстані $d = 0,7\,\text{мм}$ одна від одної, і котушки індуктивністю $L = 1\,\text{мкГн}$. Простір між пластинами конденсатора заповнений діелектриком. Коливальний контур має резонанс на довжині хвилі $\lambda = 17,73\,\text{м}$. Визначити діелектричну проникність ε середовища, яке заповнює конденсатор.

Дані: $S = 10\,\text{см}^2$, $d = 0,7\,\text{мм}$, $L = 1\,\text{мкГн}$, $\lambda = 17,73\,\text{м}$.

$\varepsilon - ?$

Аналіз і розв'язання

Електроємність плоского конденсатора дорівнює:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

Тоді діелектрична проникність середовища, яке заповнює конденсатор:

$$\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S}. \qquad (3.1)$$

Електроємність C конденсатора знайдемо з формули для резонансної частоти коливального контуру:

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC},$$

$$C = \frac{1}{\omega_p^2 L}. \qquad (3.2)$$

Щоб знайти резонансну частоту, скористаємось співвідношенням $\nu = c/\lambda$, яке пов'язує довжину хвилі λ, на якій резонує контур, з частотою; c – швидкість світла.

$$\omega_p = 2\pi \cdot c/\lambda. \qquad (3.3)$$

Підставивши (3.3) у (3.2), а потім електроємність C у формулу (3.1), отримаємо

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 LS}. \tag{3.4}$$

Виконавши обчислення, знаходимо $\varepsilon = 7$.

Задача 2. Визначити час t_0, за який амплітуда коливань сили струму у контурі з добротністю Q зменшиться у η разів, якщо частота загасаючих коливань дорівнює ω.

Дані: Q, ω, $A_0/A_1 = \eta$.

$t_0 - ?$

Аналіз розв'язання

Для загасаючих коливань сила струму змінюється з часом за законом:

$$I = I_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Тобто амплітуда зменшується з часом за законом $A = I_0 e^{-\beta t}$. У початковий момент часу $t = 0$ амплітуда $A_0 = I_0$, у момент часу t_0 амплітуда $A_1 = I_0 e^{-\beta t_0}$. Тоді час, за який амплітуда зменшиться у η разів, можна визначити з рівняння:

$$A_0/A_1 = \eta = e^{-\beta t_0},$$

звідки

$$t_0 = \frac{\ln\eta}{\beta} \tag{3.5}$$

Добротність Q пов'язана з коефіцієнтом загасання β:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta}, \tag{3.6}$$

беручи до уваги, що $T = 2\pi/\omega$.

З (3.5) та (3.6) одержимо

$$\beta = \frac{\omega}{2Q},\ t_0 = \frac{2Q}{\omega}\ln\eta.$$

Задача 3. Контур, який складається з резистора опором 100 Ом, конденсатора ємністю 35,4 мкФ і котушки індуктивністю 0,7 Гн, підключений до кола змінного струму з діючою напругою $U_\partial = 220$ В і частотою 50 Гц. Напишіть рівняння залежності від часу струму $I(t)$ і напруги $U(t)$. Знайдіть падіння напруги на резисторі, конденсаторі і котушці. Визначте частоту змінного струму, за якої у даному контурі спостерігатиметься резонанс, і потужність, що споживає контур.

Дані: $R = 100$ Ом, $C = 35{,}4$мкФ, $L = 0{,}7$Гн, $U_\partial = 220$В, $\nu = 50$Гц.

$I(t) - ?\ U(t) - ?\ U_R - ?\ U_C - ?\ U_L - ?\ \nu_p - ?\ P - ?$

Аналіз і розв'язання

Струм і напруга у колі змінюються за законом

$$I = I_0 \sin \omega t \ , \ U = U_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{3.7}$$

де φ – зсув фаз між струмом і напругою.

Амплітуду U_0 напруги знайдемо зі співвідношенням

$$U_0 = \sqrt{2} U_д , \ \omega = 2\pi\nu . \tag{3.8}$$

Амплітуди струму і напруги пов'язані законом Ома:

$$I_0 = U_0 / Z , \tag{3.9}$$

де $Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$ – повний опір кола змінного струму, $X_L = \omega L$, $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – індуктивний та ємнісний опори кола відповідно.

Зі співвідношень (3.8), (3.9) знайдемо:

$$I_0 = \frac{\sqrt{2} U_д}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} .$$

Розрахунки дають:

$$U_0 = 311 (\text{В}), \ I_0 = 1{,}9 \ (\text{А}), \ \omega = 100\pi (c^{-1}) .$$

Зсув фаз між коливаннями сили струму і зовнішньою напругою визначимо так:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} = 0{,}61; \ \varphi = 54^\circ = 0{,}3\pi .$$

Рівняння (3.7) з урахуванням розрахунків:

$$I\left(t\right) = 1{,}9 \sin 100\pi t ;$$

$$U\left(t\right) = 311 \sin\left(100\pi t + 0{,}3\pi\right).$$

Падіння напруги на елементах контуру дорівнює

$$U_R = I_д R ; \ U_C = I_д X_C ; \ U_L = I_д X_L ,$$

де $I_д = I_0 / \sqrt{2}$ – діюче значення сили струму.

Тоді

$$U_R = \frac{I_0 R}{\sqrt{2}} = 134 \ (\text{В}); \ U_C = \frac{I_0}{\sqrt{2}\omega C} = 121 \ (\text{В}); \ U_L = \frac{I_0 \omega L}{\sqrt{2}} = 295 \ (\text{В}).$$

Умова резонансу $X_L = X_C$. Зі співвідношення $\omega L = 1/\omega C$ отримаємо резонансну частоту:

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 32 \ (\text{Гц}).$$

Потужність, що споживається контуром:

$$P = I_д U_д \cos\varphi = \frac{I_0 U_0}{2} \cos\varphi = 180 \ (\text{Вт}).$$

Задача 4. Розрахувати енергію, яку перенесе за час $t = 1$ хв плоска синусоїдальна електромагнітна хвиля, що розповсюджується у вакуумі, через площину $S_0 = 10$ см^2, розташовану перпендикулярно напрямку поширення хвилі. Амплітуда напруженості електричної хвилі $E_0 = 1{,}0$ мВ/м. Період хвилі $T << t$.

Дані: $t = 1$ хв, $S_0 = 10$ см^2, $E_0 = 1{,}0$ мВ/м , $T << t$.

$W - ?$

Аналіз і розв'язання

Енергія, яку перенесе електромагнітна хвиля за одиницю часу через одиницю поверхні, перпендикулярної напрямку розповсюдження хвилі, визначається вектором Пойнтинга $\vec{S}$. Беручи до уваги, що $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$, а в електромагнітній хвилі $\vec{E} \perp \vec{H}$, отримаємо для модуля вектора $\vec{\Pi}$

$$S = EH . \tag{3.10}$$

Величини $\vec{E}$ та $\vec{H}$ змінюються за гармонічним законом і мають однакову фазу, тоді з (3.10):

$$S = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t , \tag{3.11}$$

тобто S залежить від часу. Тоді вектор $\vec{S}$ можна пов'язати з модулем густини потоку енергії:

$$S = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{S_0} .$$

Звідки енергія, яка переноситься хвилею через площу S за час dt, з урахуванням (3.11)

$$dW = SS_0 dt = E_0 H_0 S \sin^2 \omega t dt . \tag{3.12}$$

Амплітудні значення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ пов'язані між собою виразом:

$$E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu} . \tag{3.13}$$

Якщо $\mu = \varepsilon = 1$, то з (3.13) одержимо:

$$H_0 = E_0 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} .$$

Тоді рівняння (3.12) має вигляд:

$$dW = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_0^2 S_0 \sin^2 \omega t dt .$$

Повна енергія, яка переноситься хвилею за час t

$$W = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \cdot E_0^2 S_0 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right). \tag{3.14}$$

Частота ω невідома за умовою задачі, тому скористаємося умовою $T << t$ для оцінки значення $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$. Беручи до уваги, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$, маємо:

$$\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{1}{8\pi} T \sin \frac{4\pi t}{T} \le \frac{T}{8\pi} .$$

Внаслідок умови $T << t$ членом $\frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$ у формулі (3.14) можна знехтувати.

Тоді одержимо

$$W = 1/2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \cdot E_0^2 S_0 t,$$

$$W = 8 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)}.$$

3.5 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Котушка з індуктивністю $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн з'єднана послідовно з плоским конденсатором, площа пластин якого $S = 100$ см^2, відстань між ними $d = 0{,}1$ мм. Чому дорівнює діелектрична проникність середовища між пластинами, якщо контур резонує на довжину хвилі 750 м?

Відповідь: $\varepsilon = 6$.

Задача 2. Період коливань контуру, який складається з котушки і конденсатора, що з'єднані паралельно, дорівнює $T = 33{,}2$ нс. Повітряний конденсатор являє собою дві круглі пластини діаметром $D = 20$ см, які знаходяться на відстані $d = 1$ см. Визначити індуктивність котушки.

Відповідь: $L = 1$ мкГн.

Задача 3. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 1$ мГн і конденсатора змінної ємності. Діапазон довжин електромагнітних хвиль, які можуть викликати резонанс у цьому контурі, складає від $\lambda_1 = 200$ м до $\lambda_2 = 600$ м. Визначити, в яких межах змінюється ємність конденсатора. Активним опором контуру знехтувати.

Відповідь: від $C_1 = 11{,}3$ пФ до $C_2 = 101{,}4$ пФ.

Задача 4. Знайти період коливань контуру, який складається з котушки довжиною $l = 50$ см, площею поперечного перерізу $S_1 = 2$ см^2 і кількістю витків $N = 1000$ та конденсатора з двома пластинами площею $S = 50$ см^2 кожна, розташованими на відстані $d = 2$ мм одна від одної. Простір між пластинами конденсатора заповнений парафіном ($\varepsilon = 2$).

Відповідь: $T = 0{,}93$ мкс.

Задача 5. Коливальний контур складається з ємності $C = 0{,}025$ мкФ та індуктивності $L = 1{,}015$ Гн. Омічний опір відсутній. Конденсатор заряджений зарядом $q = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Написати для цього коливального контуру рівняння, яке описує залежність напруги на конденсаторі і сили струму у колі від часу. Знайти напругу на конденсаторі і силу струму у колі у моменти часу $T/8$, $T/4$, $T/2$ (T – період коливань).

Відповідь:

1) $U = 100\cos\left(2\pi \cdot 10^3 \cdot t\right)$ В, $I = -15{,}7\sin\left(2\pi \cdot 10^3 \cdot t\right)$ мА,

2) $U_1 = 70{,}7$ В, $I_1 = -11{,}1$ мА; $U_2 = 0$, $I_2 = -15{,}7$ мА; $U_3 = -100$ В, $I_3 = 0$.

Задача 6. Рівняння, яке визначає залежність напруги на конденсаторі від часу у коливальному контурі, має вигляд $U = 50\cos\left(10^4 \cdot \pi \cdot t\right)$ В, ємність конденсатора $C = 10^{-7}$ Ф. Визначити: 1) період коливань; 2) індуктивність контуру; 3) закон зміни сили струму в контурі від часу; 4) довжину хвилі, яка відповідає цьому контуру.

Відповідь: 1) $T = 2 \cdot 10^{-4}$с; 2) $L = 10{,}15$ мГн; 3) $I = -157\sin(10^{-4}\pi \cdot t)$ мА; 4) $\lambda = 6 \cdot 10^4$м.

Задача 7. Сила струму у коливальному контурі, що складається з котушки індуктивністю $L = 0{,}1$ Гн та конденсатора, змінюється з часом згідно з виразом $I = -0{,}1\sin(200\pi \cdot t)$ А. Визначити: 1) період коливань; 2) ємність конденсатора; 3) максимальну напругу на обкладках конденсатора; 4) максимальну енергію магнітного та електричного полів.

Відповідь: 1) $T = 10$ мс; 2) $C = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$ Ф; 3) $U_m = 6{,}29$ В; 4) $W_{\max}^m$ =0,5 мДж; $W_{\max}^e$ =0,5 мДж;.

Задача 8. У коливальному контурі спостерігаються вільні незгасаючі коливання з енергією 0,5 мДж. Частота власних коливань у контурі збільшилась у 2,5 рази при повільному розсуванні пластин конденсатора. Знайти роботу, здійснену проти сил електростатичного поля.

Відповідь: $A = 2{,}63$ мДж.

Задача 9. Коливальний контур має конденсатор ємністю $C = 2$ мкФ і котушку індуктивності $L = 0{,}1$ мГн із загальною кількістю витків 500. Максимальна напруга на обкладках конденсатора дорівнює 300 В. Визначте максимальний магнітний потік, що пронизує котушку.

Відповідь: $\Phi = 8{,}5$ мкВб.

Задача 10. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 7$ мкФ, індуктивності $L = 0{,}23$ Гн і опору $R = 40$ Ом. Конденсатор заряджений зарядом $q = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ Кл. Знайти період коливань контуру, логарифмічний декремент загасання. Написати рівняння залежності зміни напруги на конденсаторі від часу. Знайти напругу на конденсаторі у моменти часу $T/2$, T, $3/2T$ і $2T$ (T – період коливань).

Відповідь: 1) $T = 8 \cdot 10^{-3}$с; 2) $\lambda = 0{,}7$; 3) $U = 80e^{-87t}\cos\left(250 \cdot \pi \cdot t\right)$ В; 4) $U_1 = -56{,}5$ В; $U_2 = 40$ В; $U_3 = -28$ В; $U_4 = 20$ В.

Задача 11. Котушка коливального контуру має індуктивність $L = 1$ Гн. Який активний опір має контур, якщо амплітуда вільних коливань у ньому за 0,05 с зменшується у 2,7 рази?

Відповідь: $R = 40$ Ом.

Задача 12. Індуктивність котушки коливального контуру $L = 5$ мГн, ємність конденсатора $C = 0{,}05$ мкФ, опір $R = 10$ Ом. Визначити кількість повних коливань, через яку амплітуда струму зменшиться в e разів.

Відповідь: 10.

Задача 13. Визначити, через скільки повних коливань енергія коливального контуру зменшиться у 16 разів, якщо логарифмічний декремент загасання $\lambda = 0{,}138$.

Відповідь: 10.

Задача 14. Добротність коливального контуру дорівнює 30, частота загасаючих коливань 600 кГц. Визначити час, за який амплітуда сили струму у цьому контурі зменшиться у 10 разів.

Відповідь: $t = 37$ мс.

Задача 15. Індуктивність котушки коливального контуру $L = 6$ мГн, а ємність конденсатора $C = 0{,}3$ мкФ. Знайти логарифмічний декремент загасання та опір контуру, якщо за час $t = 1$ мс різниця потенціалів на обкладках конденсатора зменшилась у 4 рази.

Відповідь: $\lambda = 0{,}358$; $R = 16{,}6$ Ом.

Задача 16. Коливальний контур має параметри: $L = 40$ мкГн і $R = 8$ Ом. Визначити час, протягом якого амплітуда вільних коливань зменшиться в e^2 разів.

Відповідь: $t = 4L/R = 20$ мкс.

Задача 17. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2 мкФ і котушки індуктивністю 5,07 мГн. При яких значеннях логарифмічного декремента загасання та опору різниця потенціалів на обкладках конденсатора за 0,001 с зменшується втричі?

Відповідь: $\lambda = 0{,}22$; $R = 11$ Ом.

Задача 18. Індуктивність $L = 2{,}26 \cdot 10^{-2}$ Гн та активний опір R увімкнуті паралельно у коло змінного струму частотою 50 Гц. Знайти величину опору R, якщо відомо, що зсув фаз між напругою і струмом дорівнює 60º.

Відповідь: $R = 12{,}3$ Ом.

Задача 19. Активний опір коливального контуру $R = 0{,}33$ Ом. Яку потужність потрібно надавати контуру, щоб у ньому існували незгасаючі коливання з амплітудою сили струму $I_0 = 30$ мА?

Відповідь: $P = \dfrac{RI_0^2}{2} = 0{,}15$ мВт.

Задача 20. Параметри коливального контуру $C = 10$ пФ, $L = 6{,}0$ мкГн, $R = 0{,}50$ Ом. Яку потужність потрібно надавати контуру, щоб у ньому існували незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_0 = 10$ В?

Відповідь: $P = 42$ мкВт.

Задача 21. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 4 мкФ і котушки індуктивністю 2 мГн та активним опором 10 Ом. Визначити відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора у момент часу, що відповідає максимуму сили струму у контурі.

Відповідь: $W_m / W_e = 5$.

Задача 22. Коливальний контур радіоприймача настроєний на довжину хвилі 1,5 м. У скільки разів потрібно змінити ємність конденсатора контуру, щоб настроїтися на частоту 100 МГц?

Відповідь: збільшити у 4 рази.

Задача 23. Визначити модуль напруженості електричного поля E плоскої хвилі через модуль вектора Умова-Пойтинга $\vec{S}$ і діелектричну проникність середовища ε. Припустити $\mu = 1$.

Відповідь: $E = \left(S / c\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon} \right)^{1/2}$.

Задача 24. Електромагнітна хвиля з частотою 3,0 МГц переходить з вакууму у немагнітне середовище з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. Визначити зміну довжини хвилі.

Відповідь: $\Delta\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) \frac{c}{\nu} = 50$ м.

Задача 25. Амплітуда напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі, що розповсюджується у немагнітному середовищі, діелектрична проникність якого $\varepsilon = 81$, дорівнює $H_0 = 0{,}05$ А/м. Визначити амплітуду напруженості електричного поля E_0 і швидкість розповсюдження хвилі у середовищі.

Відповідь: $E_0 = 2{,}09$ В/м; $\upsilon = 1{,}1 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 26. Плоска монохроматична електромагнітна хвиля поширюється вздовж осі x. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 5$ мВ/м, амплітуда напруженості магнітного поля хвилі $H_0 = 1$ мА/м. Визначити енергію, перенесену хвилею за час $t = 10$ хв через поверхню, розташовану перпендикулярно осі x, площа поверхні $S = 15$ см^2. Період хвилі $T << t$.

Відповідь: $W = \frac{1}{2} E_0 H_0 S t = 2{,}25$ мкДж.

Задача 27. Змінну напругу, діюче значення якої U_{∂} = 220 В, а частота ν=50 Гц, увімкнули послідовно з індуктивністю $L = 31{,}8$ мГн з активним опором $R = 10$ Ом. Знайти кількість тепла Q, що виділилося на активному опорі за 1 с. Як зміниться Q, якщо послідовно з індуктивністю і активним опором увімкнули конденсатор ємністю $C = 219$ мкФ?

Відповідь: $Q = 2{,}4$ кДж; збільшиться у два рази.

Задача 28. Власна частота коливань контуру ν_0=8 кГц, добротність $Q = 72$, у контурі виникають загасаючі коливання. Знайти закон зменшення енергії в опорі від часу. Яка частина початкової енергії збережеться у контурі за 1 мс?

Відповідь: $W = W_0 \exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{Q}\right)$, 50%.

Задача 29. На скільки процентів відрізняється частота вільних коливань реального контуру з добротністю $Q = 5$ від частоти вільних коливань такого самого ідеального контуру?

Відповідь: 5%.

Задача 30. Коло змінного струму складається з послідовно з'єднаних котушки, конденсатора та резистора. Амплітудне значення сумарної напруги на котушці та конденсаторі U_{LC_0}=173 В, а амплітудне значення напруги на резисторі U_{R_0} =100 В. Визначте зсув фаз між струмом та зовнішньою напругою.

Відповідь: 60º.

4 ХВИЛЬОВА ОПТИКА

4.1 Мета заняття

Засвоїти основні закони хвильової оптики. Навчитися використовувати на практиці основні співвідношення, що описують такі явища, як інтерференція, дифракція, поляризація, дисперсія та поглинання світла.

4.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для більш повного засвоєння матеріалу потрібно вивчити розділи «Інтерференція світла», «Дифракція світла» [1, розд. 12, 13; 3, §119-133; 5, розд. 8.3, 8.4], «Поляризація» й «Дисперсія та поглинання світла» [1, розд. 14; 3, §134-146; 5, розд. 8.5], а також використовувати конспект лекцій.

Під час вивчення розділу «Інтерференція світла» у першу чергу необхідно навчитися проводити розрахунок інтерференційної картини.

Задачі на інтерференцію можуть бути двох типів:

1) дослідження інтерференції світла від двох когерентних джерел випромінювання, при якому використовуються дзеркала Френеля, біпризма Френеля, дзеркало Ллойда, дослід Юнга тощо.

2) дослідження інтерференції в тонких плівках. Інтерференційні полоси рівного нахилу та рівної товщини.

Під час розгляду явища дифракції основною метою є розрахунок дифракційної картини, тобто знаходження розподілу інтенсивності світла у залежності від розмірів та форми неоднорідностей, які спричиняють дифракцію.

Необхідно розрізняти два види дифракції: дифракцію Фраунгофера (дифракція у паралельних променях) та дифракцію Френеля (дифракція променів, які сходяться).

При розгляді явища поляризації необхідно звернути увагу на такі поняття, як неполяризована, часткова чи повністю поляризована світлова хвиля, площина поляризації, поляризатор, аналізатор. Варто також ознайомитися з принципом дії призм Ніколя та згадати закони відбиття та заломлення світла.

Необхідно усвідомити зміст таких явищ як поглинання світла, розсіювання світла та дисперсія світла.

4.3 Основні закони і формули

Інтерференція світла

1. Швидкість світла у середовищі

$$\upsilon = c/n,$$

де c – швидкість світла у вакуумі, n – абсолютний показник заломлення середовища.

2. Закон відбиття світла: кут падіння променів дорівнює куту відбиття.

3. Закон заломлення світла

$$\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1 = n_{21},$$

де α і β – кути падіння і заломлення; n_1 і n_2 – абсолютні показники заломлення для першого і другого середовища; n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

4. Оптичний шлях світла у середовищі

$$L = \int n\,dS,$$

де S – геометричний шлях.

Якщо середовище однорідне, тобто $n = const$, то оптичний шлях дорівнює

$$L = nS.$$

5. Оптична різниця ходу двох світлових хвиль

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2S_2 - n_1S_1,$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення; S_1 і S_2 – шляхи відповідних хвиль.

6. Результуюча інтенсивність світла при накладанні двох монохроматичних хвиль однакової частоти

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta,$$

де $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$ – різниця фаз хвиль, Δ – оптична різниця ходу, λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

7. Умови інтерференційних

максимумів $\Delta = \pm m\lambda_0,\ m = 0, 1, 2, \ldots,$

і мінімумів $\Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda_0}{2},\ m = 0, 1, 2, \ldots$

8. При відбитті світла від середовища з оптично більшою густиною фаза хвилі стрибком змінюється на π, тобто оптичний шлях світлової хвилі змінюється на $\lambda/2$.

9. Різниця ходу світлових хвиль, відбитих від верхньої і нижньої поверхонь плоскопаралельної пластинки або плівки з показником заломлення n_2:

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha} + \lambda_0/2 = 2dn\cos\beta + \lambda_0/2,$$

де d – товщина пластинки (плівки), α – кут падіння променів на неї, β – кут заломлення, n_1 – показник заломлення оточуючого середовища. Другий доданок $(\lambda_0/2)$ враховує зміну оптичного шляху при відбитті світла від середовища з оптично більшою густиною. Для світла, що проходить крізь плівку, відбиття світлової хвилі відбувається від середовища з меншою оптичною густиною, тому додаткової різниці ходу світлових променів не спостерігається.

10. Радіуси кілець Ньютона у відбитому світлі

світлих $r_m = \sqrt{(m - 1/2)R\lambda_0},\ m = 1, 2, 3, \ldots,$

темних $r_m = \sqrt{mR\lambda_0}$,

де m – номер кільця (m=1, 2, 3,…), R – радіус кривизни лінзи.

Дифракція світла

11. Зовнішній радіус m-ї зони Френеля для сферичної хвилі

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де a – відстань від діафрагми з круглим отвором до точкового джерела світла, b – відстань від діафрагми до екрана, де спостерігається дифракційна картина, m – номер зони Френеля, λ – довжина хвилі.

Для плоскої хвилі

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

12. Кількість відкритих зон Френеля для дифракції Френеля від відкритого отвору радіуса r

$$m = \frac{r^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

де a – відстань від джерела до отвору, b – відстань від отвору до точки спостереження.

13. При дифракції Фраунгофера на щілині шириною a при нормальному падінні світла

– умова мінімумів інтенсивності світла

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

– умова максимумів інтенсивності

$$a\sin\varphi = \pm\left(2m+1\right)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

де φ – кут дифракції, m – номер максимуму.

14. При дифракції світла на дифракційній решітці з періодом $d = a + b$ (a – ширина щілини, b – відстань між щілинами).

– умова головних максимумів інтенсивності

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де m – порядок головного максимуму.

15. Роздільна сила дифракційної решітки

$$R = \lambda/\Delta\lambda = mN,$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній (λ і $\lambda + \Delta\lambda$), які можна розділити за допомогою цієї решітки, m – порядковий номер дифракційного максимуму, N – кількість щілин у решітці.

16. Кутова дисперсія дифракційної решітки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

17. Лінійна дисперсія дифракційної решітки

$$D_l = \delta l/\delta\lambda,$$

де $\delta\varphi$ – кутова відстань, δl – лінійна відстань меж спектральними лініями, які відрізняються за довжиною хвилі на $\delta\lambda$.

Для малих кутів дифракції

$$D_l \approx fD_\varphi \approx f\frac{m}{d},$$

де f – фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран.

18. Формула Вульфа-Брегга

$$2d\sin\theta = \pm m\lambda,\ \ m = 1, 2, 3, \ldots,$$

де d – відстань між атомними площинами кристала, θ – кут ковзання (кут між напрямком паралельних рентгенівських променів, що падають на кристал, і грані кристала), що визначає напрямок, в якому спостерігається дзеркальне відбиття випромінювання (дифракційний максимум).

Поляризація світла

19. Закон Брюстера

$$tg\varphi_Б = n_{21},$$

де $\varphi_Б$ – кут падіння, при якому відбита світлова хвиля повністю поляризована, $n_{21} = n_2/n_1$ – відносний показник заломлення двох середовищ.

20. Закон Малюса

$$I = I_0\cos^2\varphi,$$

де I – інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло крізь аналізатор, I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, що падає на аналізатор, φ – кут між напрямком коливань світлового вектора хвилі, що падає на аналізатор, та площиною пропускання аналізатора.

21. Ступінь поляризації світла

$$P = \left(I_{\max} - I_{\min}\right)/\left(I_{\max} + I_{\min}\right),$$

де $I_{\max}$, $I_{\min}$ – відповідно максимальна і мінімальна інтенсивність частково поляризованого світла, що пройшло через аналізатор.

Поглинання світла. Розсіювання світла. Дисперсія світла

22. Закон Бугера

$$I = I_0e^{-\alpha x},$$

де I_0 – значення інтенсивності світла на вході у шар середовища товщиною x, I – значення інтенсивності світла на виході з середовища, α – коефіцієнт поглинання середовища, який залежить від хімічної природи, стану середовища та від довжини хвилі λ.

23. Абсолютний показник заломлення середовища

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu},$$

де ε – діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність.

24. Дисперсія речовини показує, як швидко змінюється показник заломлення з довжиною хвилі

$$D = dn/d\lambda,$$

Якщо $dn/d\lambda < 0$ $\left(dn/d\omega > 0\right)$ – нормальна дисперсія.

Якщо $dn/d\lambda > 0$ $\left(dn/d\omega < 0\right)$ – аномальна дисперсія.

25. Групова швидкість

$$u = d\omega/dk\,,$$

де $\omega = \dfrac{2\pi\nu}{\lambda}$ – циклічна частота, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

26. Зв'язок між груповою та фазовою швидкістю

$$u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda},$$

де υ – фазова швидкість.

4.4 Контрольні запитання та завдання

1. Яке явище має назву інтерференції світла та які умови її спостереження?
2. Які хвилі називаються когерентними?
3. Що таке геометрична та оптична різниця ходу?
4. Запишіть умови мінімуму та максимуму інтенсивності при інтерференції світла.
5. Назвіть способи одержання когерентних джерел світла.
6. Що таке дифракція світла? Які види дифракції ви знаєте?
7. У чому полягає відмінність дифракції Френеля від дифракції Фраунгофера?
8. Визначте умови спостереження дифракції світла.
9. У чому полягає принцип побудови зон Френеля?
10. Запишіть умови дифракційних мінімумів та максимумів для однієї щілини, для дифракційної решітки.
11. Як визначається розподіл інтенсивності світла у випадку дифракції у паралельних променях на одній щілині і на дифракційній решітці?
12. Який вигляд має дифракційний спектр видимого світла? Чим він відрізняється від призматичного спектра?
13. Що таке лінійна, кутова дисперсія і роздільна сила дифракційної решітки?
14. Запишіть формулу Вульфа-Брегга. Яке практичне застосування вона має?
15. Яке явище має назву дисперсії світла? Чим відрізняється нормальна дисперсія від аномальної?
16. Яке світло називається природним, а яке – поляризованим та частково поляризованим?
17. Що називається ступенем поляризації світла? Чому дорівнює ступінь поляризації природного, плоскополяризованого світла?
18. Сформулюйте закон Малюса.
19. Під яким кутом світло має падати на межу розподілу двох прозорих діелектриків, щоб відбитий промінь був повністю поляризований?
20. Що називається поглинанням світла? Сформулюйте закон Бугера.

21. Який фізичний зміст поняття «коефіцієнт поглинання»? Від чого залежить цей коефіцієнт?

22. Чим відрізняються групова та фазова швидкості хвилі? Якою формулою вони пов'язані?

4.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Два когерентних джерела світла S' і S'' розташовані на відстані $d = 5$ мм одне від одного і на відстані $L = 6$ м від екрана (рис. 4.1). Довжина хвилі джерел у вакуумі $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Визначити на екрані місце розташування п'ятого максимуму і відстань між сусідніми максимумами. Припустивши, що джерела мають скінченні розміри, визначити якою має бути допустима ширина щілин d_0, щоб на екрані одержати виразну інтерференційну картину.

Дані: $d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м,

$L = 6$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

$x_5 - ?$ $\Delta x - ?$ $d_0 - ?$

Аналіз і розв'язання

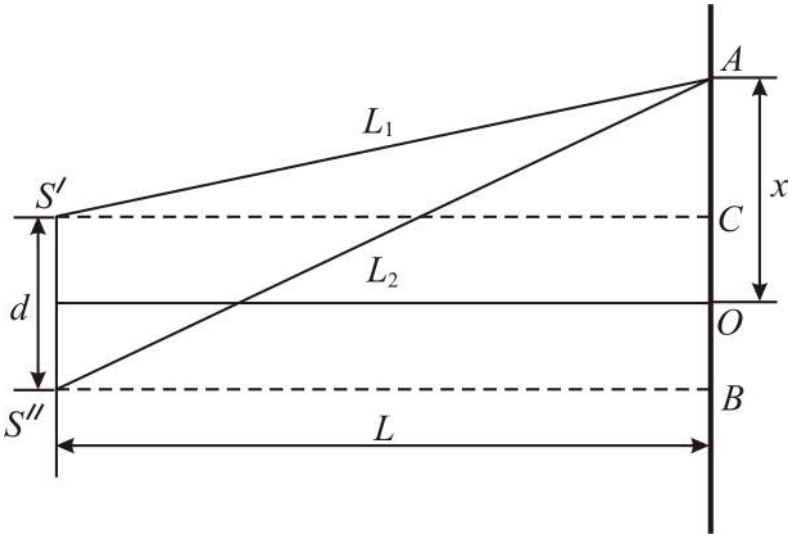


Рисунок 4.1

Хвилі від джерел S' і S'', які інтерферують у точці A, до зустрічі проходять різні геометричні шляхи L_1 і L_2. Маючи на увазі, що показник заломлення середовища, де розповсюджуються хвилі, дорівнює одиниці, можна записати оптичну різницю ходу двох променів:

$$\Delta = \left(L_2 - L_1\right) n = L_2 - L_1.$$

Умова максимуму інтенсивності

$$\Delta = m\lambda,$$

$$L_2 - L_1 = m\lambda, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{4.1}$$

Враховуючи це, для визначення положення максимуму потрібно зв'язати різницю ходу з координатою x точки A на екрані.

З $\Delta CS'A$ одержуємо:

$$L^2_1 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \left(CO = \frac{d}{2}\right), \tag{4.2}$$

а з $\Delta BS''A$ одержуємо:

$$L^2_2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \tag{4.3}$$

Віднімаючи від (4.3) співвідношення (4.2), маємо:

$$L^2_2 - L^2_1 = 2xd,$$

$$\left(L_2 - L_1\right)\left(L_2 + L_1\right) = 2xd. \tag{4.4}$$

Маючи на увазі, що відстань між джерелами набагато менша ніж відстані від джерел випромінювання до екрана, можна вважати $L_1 \approx L_2 \approx L$, тобто $L_2 + L_1 = 2L$, тоді з (4.4) виходить:

$$L_2 - L_1 = 2xd/2L = xd/L.$$

Використовуючи (4.1), визначаємо положення m-го максимуму:

$$x_m d/L = m\lambda,$$

$$x_m = \frac{m\lambda L}{d}.$$

Якщо середовище має показник заломлення n, то:

$$x_m = \pm\frac{m\lambda L}{nd}.$$

$x_5 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-3}$ (м) – положення п’ятого максимуму.

Відстань між сусідніми максимумами (а також і відстань між сусідніми мінімумами)

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{L}{d}\lambda,$$

$$\Delta x = \frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{(м)}.$$

Таким чином, відстань Δx не залежить від порядку інтерференції, тобто інтерференційна картина має вигляд світлих і темних смуг рівної ширини.

Якщо джерела випромінювання протяжні, то кожна точка щілини може вважатися точечним джерелом. Інтерференційна картина від крайніх точок щілини складатиметься з двох інтерференційних картин, зсунутих одна відносно іншої на відстань d_0. Якщо ця відстань менша за відстань між сусідніми світлою і темною смугами, яка дорівнює $L\lambda/2d$, то сумарна інтерференційна картина буде виразною. Це означає, що сумарна інтерференційна картина виразна, якщо виконується умова $d_0 \le L\lambda/2d$, тобто $d_0 \le \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 2. На плоскопаралельну плівку з показником заломлення 1,33 падає нормально паралельний пучок білого світла. При якій найменшій товщині плівки вона буда найбільш прозорою для світла з довжиною хвилі $\lambda_1 = 600$ нм? При якій найменшій товщині плівка одночасно буде найбільш прозорою для світла з довжинами хвиль $\lambda_1 = 600$ нм, $\lambda_2 = 500$ нм?

Дані: $n = 1{,}33$; $\lambda_1 = 600$ нм; $\lambda_2 = 500$ нм;

$d_1 - ?$ $d_2 - ?$

Аналіз і розв'язання

При падінні на плівку світло частково проходить, частково відбивається від її поверхні. У світлі, що проходить, інтерферують дві хвилі, одна з яких проходить крізь плівку без відбиття, а друга – після відбиття від обох поверхонь плівки (рис. 4.2, промені 1 і 2). Результат інтерференції залежить від оптичної різниці ходу, яка при нормальному падінні променів має вигляд:

$$\Delta = 2dn\,. \tag{4.5}$$

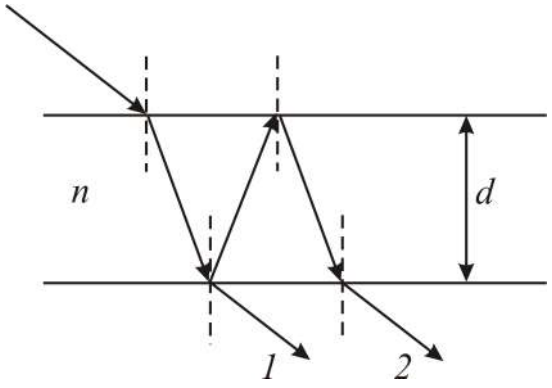


Рисунок 4.2

Плівка буде найбільш прозорою, якщо різниця ходу (4.5) дорівнює цілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = m\lambda\,,\ m = 1,2,3,\ldots \tag{4.6}$$

Прирівнюючи (4.5) та (4.6), одержимо:

$$2dn = m\lambda\,,$$

$$d = \frac{\lambda_1 m}{2n}\ (\text{для}\ \lambda_1). \tag{4.7}$$

Найменша товщина плівки відповідає $m = 1$, тобто

$$d = \lambda_1 / 2n = 0{,}23\ \text{мкм}.$$

Плівка буде найбільш прозорою для хвиль з довжинами λ_1 і λ_2 одночасно тоді, коли виконуються і умова (4.7), і умова

$$d = \frac{\lambda_2 k}{2n},\ k = 1,2,3,\ldots \tag{4.8}$$

Прирівнявши праві частини (4.7) та (4.8), знайдемо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k}{m}.$$

Це означає, що найбільша прозорість для двох заданих довжин хвиль одночасно можлива, якщо відношення цих довжин хвиль дорівнює відношенню двох цілих чисел.

За умовою

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\ldots,$$

тобто $k=6,\ m=5$ – мінімально можливі значення. Найменша товщина плівки, яка відповідає цим k і m, згідно з (4.7) та (4.8)

$$d=\frac{5\lambda_1}{2n}=\frac{6\lambda_2}{2n}=1{,}15\,(\text{мкм}).$$

Задача 3. Жовте світло натрію (якому відповідають довжини хвиль 589,00 нм та 589,59 нм) падає на дифракційну решітку, що має 7500 штрихів на сантиметр. Визначити: 1) максимум якого найбільшого порядку спостерігається для жовтого світла натрію; 2) кутову дисперсію дифракційної решітки; 3) ширину решітки, яка необхідна для розділення двох ліній натрію; 4) роздільну здатність дифракційної решітки у цьому випадку.

Дані: $\lambda_1=589{,}00$ нм; $\lambda_2=589{,}59$ нм; $N=7500$ штр/см.

$m_{\max}-?\ D_\varphi-?\ l-?\ R-?$

Аналіз і розв'язання

1) Згідно з умовою максимумів для дифракційної решітки

$$d\sin\varphi=m\lambda, \tag{4.9}$$

де d – стала (період) дифракційної решітки, λ – довжина хвилі, m – порядок дифракційного максимуму, φ – кут відхилення променів, які відповідають m-му дифракційному максимуму.

Зважаючи на те, що стала решітки d пов'язана з кількістю штрихів на одиницю довжини решітки N як $d=\frac{1}{N}$, маємо $d=\frac{10^{-2}}{7500}=1{,}33\cdot10^{-6}$ м.

Найбільший порядок максимуму для $\lambda_1=589{,}00$ нм, який можна спостерігати за допомогою цієї решітки, знайдемо з формули (4.9), беручи до уваги, що максимальний кут відхилення променів решіткою не може перевищувати 90°:

$$m\le\frac{d}{\lambda}\sin\varphi_{\max},$$

$$m\le\frac{1{,}33\cdot10^{-6}}{5{,}89\cdot10^{-7}}=2{,}25.$$

m – ціле число. Таким чином, максимальний порядок $m_{\max}=2$.

2) Кутова дисперсія дифракційної решітки

$$D_\varphi=\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}=\frac{m}{d\cos\varphi}.$$

Лінія натрію у спектрі другого порядку спостерігається при

$$\sin\varphi = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2\cdot 589\cdot 10^{-9}}{1{,}33\cdot 10^{-6}} = 0{,}886,$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = 0{,}464,$$

$$D_\varphi = \frac{2}{1{,}33\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}464} = 3{,}24\cdot 10^{-3}\,(\text{рад/нм}).$$

3) Для розділення двох ліній натрію необхідна роздільна здатність решітки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\cdot 10^{-9}}{0{,}59\cdot 10^{-9}} = 1000.$$

Щоб досягти такої роздільної здатності, повна кількість штрихів решітки, внаслідок $R = mN'$, має дорівнювати $N' = \frac{R}{m}$.

Ширина решітки $l = N'\cdot d = \frac{R}{m}d = \frac{1000}{2}\cdot 1{,}33\cdot 10^{-6} = 6{,}7\cdot 10^{-4}$ (м).

Задача 4. Який кут складають між собою головні площини поляризаторів, якщо інтенсивність природного світла, що пройшло крізь два поляризатори, зменшилась у 3,29 разів? При проходженні кожного з поляризаторів втрати на відбиття і поглинання світла дорівнюють $k = 10$ %.

Дані: $I_0/I_2 = 3{,}29$, $k = 10$ %.

$\varphi - ?$

Аналіз і розв'язання

Поляризатор пропускає коливання, паралельні головній площині поляризатора, тому інтенсивність природного світла після проходження ідеального поляризатора зменшується вдвічі. З урахуванням втрат при відбитті і поглинанні інтенсивність світла, що пройшло крізь перший поляризатор

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0(1-k),$$

де I_0 – інтенсивність природного світла, що падає на перший поляризатор.

Інтенсивність світла, що пройшло крізь другий поляризатор (аналізатор) з урахуванням втрат, знайдемо за законом Малюса

$$I_2 = I_1(1-k)\cos^2\varphi = \frac{1}{2}I_0(1-k)^2\cos^2\varphi.$$

Згідно з умовою задачі $I_0/I_2 = 3{,}29$, тоді

$$\cos\varphi = \frac{1}{1-k}\sqrt{\frac{2I_2}{I_0}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{1-k}\sqrt{\frac{2I_2}{I_0}}\right);\ \varphi = 30°.$$

Задача 5. Під яким кутом має падати пучок світла з повітря на поверхню води ($n = 1{,}33$), щоб при відбитті від дна скляної посудини ($n = 1{,}5$) світло було повністю поляризоване?

Дані: $n_1 = 1{,}33$; $n_2 = 1{,}5$.

$\alpha - ?$

Аналіз і розв'язання

На рис. 4.3 зображено явище проходження світла крізь межу розподілу двох діелектриків. На межі повітря-вода природне світло (промінь 1) частково відбивається (промінь 2), частково заломлюється (промінь 3) (рис. 4.3). Заломлений промінь 3 частково поляризований. Він частково відбивається від межі вода-скло (промінь 4).

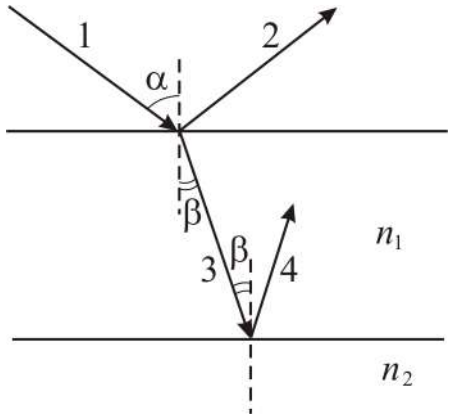


Рисунок 4.3

Для того, щоб відбитий промінь 4 був повністю поляризований, має виконуватись умова:

$$tg\beta = n_{21} = n_2/n_1,$$
$$\beta = arctg(n_2/n_1).$$

Щоб знайти кут падіння α, скористаємося законом заломлення світла:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n} = n_1,$$

де $n = 1$ – показник заломлення повітря.

У підсумку матимемо:

$$\alpha = \arcsin\left[n_1 \sin\left(arctg\frac{n_2}{n_1} \right) \right] = 84°.$$

Задача 6. Частково поляризоване світло проходить крізь ніколь. При повороті ніколя на 60° від положення, яке відповідає максимальній інтенсивності, інтенсивність світлового пучка зменшується у 2 рази. Знехтувавши поглинанням світла у ніколі, визначте: 1) відношення інтенсивностей природного та плоскополяризованого світла; 2) ступінь поляризації пучка.

Дані: $\alpha = 60°$; $I'/I'' = 2$.

$I_e/I_n - ?$ $P - ?$

Аналіз і розв'язання.

У першому положенні ніколь повністю пропустить лінійно поляризоване світло I_n, а також половину інтенсивності природного світла I_e.

Таким чином, інтенсивність світла, яке пройде

$$I' = I_n + 0{,}5I_e. \tag{4.10}$$

У другому положенні інтенсивність пропущеного поляризованого світла зміниться у відповідності із законом Малюса і сума матиме вигляд:

$$I'' = I_n \cos^2 \alpha + 0{,}5I_e. \tag{4.11}$$

Згідно з умовою задачі $I' = 2I''$. Використавши (4.10) та (4.11), матимемо

$$I_n + 0{,}5I_e = 2(I_n \cos^2 60^\circ + 0{,}5I_e),$$

$$I_n + 0{,}5I_e = 2\left(\frac{1}{4}I_n + 0{,}5I_e\right),$$

$$I_n = I_e.$$

Отже, відношення інтенсивностей природного та плоскополяризованого світла дорівнює одиниці.

Ступінь поляризації знаходиться за співвідношенням:

$$P = \left(I_{\max} - I_{\min}\right)\Big/\left(I_{\max} + I_{\min}\right).$$

Очевидно, що $I_{\max} = I' = I_n + 0{,}5I_e$, а $I_{\min} = 0{,}5I_e$.

Таким чином,

$$P = \frac{\left(I_n + 0{,}5I_e\right) - 0{,}5I_e}{\left(I_n + 0{,}5I_e\right) + 0{,}5I_e} = \frac{I_n}{I_n + I_e} = \frac{I_n}{2I_n} = 0{,}5.$$

4.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. На шляху світлової хвилі, що розповсюджується у повітрі, поставили скляну пластинку ($n = 1{,}5$) товщиною 1 мм. На скільки зміниться оптична довжина шляху, якщо хвиля падає на пластинку: 1) нормально, 2) під кутом 30°.

Відповідь: збільшиться 1) на 0,5 мм, 2) на 0,548 мм.

Задача 2. Відстань між двома щілинами у досліді Юнга $d = 0{,}5$ мм ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Знайти ширину Δx інтерференційних полос, якщо відстань L від щілин до екрана становить 1м.

Відповідь: $\Delta x = 1{,}2$ мм.

Задача 3. Знайти відстань між щілинами d у досліді Юнга, якщо відстань між третім і п'ятим інтерференційними мінімумами дорівнює $l = 0{,}8$ см, довжина хвилі $\lambda = 0{,}48$ мкм, екран розміщений на відстані $L = 5$ м від щілин.

Відповідь: $d = 0{,}6$ мм.

Задача 4. На мильну плівку ($n = 1{,}3$), яка розташована на повітрі, падає нормально пучок променів білого світла. При якій найменшій товщині плівки d відбите світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}55$ мкм виявиться максимально підсиленим внаслідок інтерференції.

Відповідь: $d = 0{,}1$ мкм.

Задача 5. Чому дорівнює товщина оптичного покриття d із MgF_9 ($n_1 = 1{,}38$), яке призначене для гасіння світла з довжиною хвилі $\lambda = 550$ нм при нормальному падінні на скло ($n_2 = 1{,}5$)?

Відповідь: $d = 99{,}6$ нм.

Задача 6. На тонкий скляний клин у напрямку нормалі до його поверхні падає монохроматичне світло ($\lambda = 600$ нм). Визначити кут α між поверхнями клина, якщо відстань між суміжними інтерференційними максимумами у відбитому світлі дорівнює 4 мм.

Відповідь: $\alpha = 10{,}3''$.

Задача 7. Поверхні скляного клина ($n = 1{,}5$) створюють між собою кут $\alpha = 0{,}2'$. На клин нормально до його поверхні падає пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}55$ мкм. Визначити ширину b інтерференційної смуги.

Відповідь: $b = \dfrac{\lambda}{2n\alpha} = 3{,}15$ мм.

Задача 8. Плосковипукла лінза опуклою стороною лежить на скляній пластині. Визначити товщину h шару повітря там, де у відбитому ($\lambda = 0{,}6$ мкм) спостерігається перше світле кільце Ньютона.

Відповідь: $h = 0{,}15$ мкм.

Задача 9. При спостереженні кілець Ньютона у жовтому світлі $\lambda = 0{,}58$ мкм, що проходить крізь установку, простір між лінзою і скляною пластиною заповнений водою ($n = 1{,}33$). Різниця радіусів шістнадцятого і четвертого кілець Ньютона $\Delta r_{16,4} = 1{,}32 \cdot 10^{-3}$ м. Визначити радіус кривизни лінзи R.

Відповідь: $R = 1$м.

Задача 10. Між точковим джерелом світла та екраном розташували діафрагму з круглим отвором, радіус якого R

$a = 100$ см і $b = 125$ см, відповідно. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості у центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при $R_1 = 1$ мм і наступний максимум при $R_2 = 1{,}29$ мм.

Відповідь: $\lambda = 0{,}6$ мкм.

Задача 11. Радіус четвертої зони Френеля для плоского хвильового фронту дорівнює 3 мм. Визначити радіус шостої зони Френеля.

Відповідь: $r_6 = 3{,}69$ мкм.

Задача 12. Плоска світлова хвиля ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падає нормально на діафрагму з круглим отвором діаметром $d = 1$ см. На якій відстані b від отвору має знаходитися точка спостереження, щоб отвір відкривав зони Френеля: 1) одну; 2) дві?

Відповідь: 1) $b = 50$ м; 2) $b = 25$ м.

Задача 13. На щілину шириною $a = 0{,}1$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0{,}5$ мкм). За щілиною розташована збираюча лінза, у фокальній площині якої розташований екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут φ дифракції дорівнює: 1) $17'$; 2) $43'$?

Відповідь: перший дифракційний мінімум; дифракційний максимум, що відповідає $m = 2$.

Задача 14. На дифракційну решітку, яка має $N = 400$ штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Знайти загальну кількість дифракційних максимумів, які має решітка. Визначити кут φ дифракції, який відповідає останньому максимуму.

Відповідь: $m_{\max} = 8$; $\varphi_{\max} = 74°$.

Задача 15. На дифракційну решітку, яка має 50 штрихів на 1 мм, падає паралельно пучок білого світла. Яка різниця кутів відхилення кінця першого і початку другого спектра? Довжину крайніх червоних і крайніх фіолетових хвиль прийняти рівними 760 і 400 нм.

Відповідь: $\Delta\varphi = 7'$.

Задача 16. На дифракційну решітку, яка має $N = 500$ штрихів на 1 мм, падає у напрямку нормалі до її поверхні біле світло. Спектр спроектований розташованою поблизу решітки лінзою на екран. Визначити ширину b спектра першого порядку на екрані, якщо відстань L лінзи до екрана дорівнює 3 м. Границя видимості спектра $\lambda_{черв} = 780$ нм, $\lambda_{фіол} = 400$ нм.

Відповідь: $b_1 = 66$ см.

Задача 17. При проходженні у речовині відстані 1,5 см інтенсивність світла зменшилась у 3 рази. Чому дорівнюватиме шлях x, на якому інтенсивність світла зменшиться у 9 разів?

Відповідь: $x = 3$ см.

Задача 18. При проходженні у деякій речовині шляху x інтенсивність світла зменшується у 2 рази. Як зміниться інтенсивність світла при проходженні втричі більшого шляху?

Відповідь: зменшиться у 8 разів.

Задача 19. Визначити, у скільки разів послабиться інтенсивність світла, що пройшло крізь два ніколя, розташованих так, що кут між головними площинами дорівнює 45°, а у кожному ніколі втрачається 5% інтенсивності падаючого на нього світла.

Відповідь: $I_0 / I_2 = 4{,}73$.

Задача 20. Визначити ступінь поляризації P світла, утвореного сумішшю природного світла з плоскополяризованим, якщо інтенсивність поляризованого світла у три рази більша за інтенсивність природного.

Відповідь: $P = 0{,}75$.

Задача 21. Кут між головними площинами аналізатора і поляризатора дорівнює 60°. У скільки разів збільшиться інтенсивність світла, що виходить з аналізатора, якщо кут зменшити до 45°?

Відповідь: $I_2 / I_1 = 2$.

Задача 22. Кут заломлення променя у рідині $\beta = 35°$. Визначити показник заломлення n рідини, якщо відомо, що відбитий пучок світла максимально поляризований.

Відповідь: $n = 1{,}43$.

Задача 23. Визначити кут повної поляризації при відбитті світла від скла, показник заломлення якого дорівнює 1,57.

Відповідь: $\varphi_n = 57° 30'$.

Задача 24. Граничний кут повного внутрішнього відбиття для деякої речовини дорівнює 45°. Чому дорівнює для цієї речовини кут повної поляризації?

Відповідь: $\varphi_n = 54° 44'$.

Задача 25. Чому дорівнює показник заломлення скла, якщо при відбитті від нього світла відбитий промінь буде повністю поляризований при куті заломлення 30°?

Відповідь: 1,73.

Задача 26. У досліді Юнга знайти відстань x між центральною смугою і четвертим інтерференційним максимумом, якщо відстань між щілинами $d = 0{,}5$ мм, екран розміщений на відстані $L = 3$ м від щілин, довжина хвилі $\lambda_0 = 0{,}58$ мкм.

Відповідь: $x = 14$ мм.

Задача 27. Пучок монохроматичних ($\lambda = 0{,}6$ мкм) світлових хвиль падає під кутом 30° на розташовану у повітрі мильну плівку ($n = 1{,}3$). При якій найменшій товщині плівки відбиті світлові хвилі будуть максимально послаблені інтерференцією, максимально підсилені?

Відповідь: $t_1 = 0{,}25$ мкм; $t_2 = 0{,}125$ мкм.

Задача 28. Між скляною пластинкою і розташованою на ній плоско-випуклою скляною лінзою налито рідину, показник заломлення якої менший за показник заломлення скла. Радіус r_8 восьмого темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі ($\lambda = 700$ нм) дорівнює 2 мм. Радіус R кривизни опуклої поверхні лінзи дорівнює 1 м. Знайти показник заломлення n рідини.

Відповідь: $h = 1{,}4$.

Задача 29. Паралельний пучок рентгенівського випромінювання падає на грань кристала. Під кутом $\theta = 65°$ до площини грані спостерігається максимум першого порядку. Відстань d між атомними площинами кристала 280 нм. Визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

Відповідь: λ=506 нм.

Задача 30. Ступінь поляризації частково поляризованого світла $P = 0{,}2$. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної складової I_n / I_{np}.

Відповідь: $I_n / I_{np} = 0{,}25$.

5 РІВНОВАЖНЕ ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

5.1 Мета заняття

Вивчення законів теплового випромінювання та оволодіння методикою розв'язування задач на основі цих законів.

5.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 1; 4, § 1-7; 5, розд. 9.1], засвоїти зміст фізичних величин, що характеризують теплове випромінювання, і законів теплового випромінювання (закон Кірхгофа, закон Стефана–Больцмана, закони Віна, закон Релея–Джинса, формула Планка), відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язування задач, що наведені у прикладах.

5.3 Основні закони і формули

1. Потік (потужність) випромінювання

$$\Phi = W/t,$$

де W – енергія випромінювання, t – час.

2. Інтегральна енергетична світність тіла (інтегральна випромінювальна здатність)

$$R_e = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{t \cdot S},$$

де S – площа тіла.

3. Спектральна енергетична світність (спектральна випромінювальна здатність, спектральна густина енергетичної світності) тіла

$$r(\nu, T) = dR_e/d\nu,$$

де R_e – енергетична світність;

ν – частота випромінювання.

4. Зв'язок між довжиною хвилі і частотою теплового випромінювання

$$\lambda = c/\nu,$$

де λ – довжина хвилі, c – швидкість світла.

5. Зв'язок між випромінювальною здатністю в частотному діапазоні $r(\nu, T)$ і діапазоні довжин хвиль $r(\lambda, T)$

$$r(\lambda, T) = r(\nu, T)\frac{c}{\lambda^2}.$$

6. Поглинальна здатність тіла

$$\alpha(\nu, T) = d\Phi'/d\Phi,$$

де $d\Phi$ – потік променевої енергії, що падає на елементарну площу поверхні, $d\Phi'$ – потік, який поглинається цією площею.

7. Закон Кірхгофа

$$r(\nu,T)/\alpha(\nu,T) = f(\nu,T),$$

де $f(\nu,T)$ – універсальна функція Кірхгофа.

8. Закон Стефана–Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

де R_e – інтегральна енергетична світність абсолютно чорного тіла,

T – термодинамічна температура,

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2·К^4 – стала Стефана–Больцмана.

9. Енергетична світність сірого тіла

$$R_e = \alpha(\nu,T)\sigma T^4.$$

10. Закон зміщення Віна

$$\lambda_{max} = b/T,$$

де $\lambda_{\max}$ – довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної енергетичної світності абсолютно чорного тіла;

$b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – стала Віна.

11. Залежність максимальної випромінювальної здатності від температури

$$r_{\max}(\lambda,T) = CT^5,$$

де C – стала ($C = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^3·К^5).

12. Формула Планка

$$r(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1},$$

$$r(\nu,T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1},$$

де $r(\lambda,T)$ і $r(\nu,T)$ – випромінювальні здатності абсолютно чорного тіла,

λ – довжина хвилі,

ν – частота,

c – швидкість світла у вакуумі,

k – стала Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К),

T – термодинамічна температура,

h – стала Планка ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

13. Енергія кванта

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = \hbar\omega,$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

5.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що називають тепловим випромінюванням?
2. Назвіть характеристики теплового випромінювання.

3. Яке тіло називають абсолютно чорним, сірим?
4. Яке випромінювання називається рівноважним?
5. Сформулюйте закони теплового випромінювання – закон Кірхгофа, закон Стефана–Больцмана, закон Віна.
6. Поясніть фізичний зміст універсальної функції Кірхгофа.
7. Що таке квант? Чому дорівнює енергія кванта?
8. Запишіть формулу Планка для теплового випромінювання.
9. Дайте визначення радіаційній, кольоровій та яскравісній температурі.

5.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Поверхня Сонця за своїми властивостями близька до абсолютно чорного тіла. Максимум емісійної здатності припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0{,}50$ мкм (у випромінюванні Сонця, що пройшло крізь атмосферу і досягло поверхні Землі, максимум припадає на $\lambda_m = 0{,}55$ мкм).

Визначити:

1) температуру T сонячної поверхні;

2) енергію W, що випромінюється Сонцем за 1 секунду у вигляді електромагнітних хвиль;

3) масу Δm, що губить Сонце за 1 секунду за рахунок випромінювання;

4) приблизний час τ, за який маса Сонця зменшилась би за рахунок випромінювання на 1%, якби температура Сонця залишалася сталою.

Дані: $\lambda_m = 0{,}50$ мкм; $t = 1$ с; $\frac{\Delta m_1}{M_c} = 0{,}01$; $M_c = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг (маса Сонця); $r_c = 6{,}95 \cdot 10^8$ м (радіус Сонця); $c = 3 \cdot 10^8$ м/с (швидкість світла);

$T - ?$ $W - ?$ $\Delta m - ?$ $\tau - ?$

Аналіз і розв'язання

Температуру T сонячної поверхні можна визначити за законом зміщення Віна:

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-3}\, м \cdot K}{0{,}50 \cdot 10^{-6}\, м} = 5{,}8 \text{ (кК)}. \qquad (5.1)$$

Енергія, що випромінюється Сонцем, дорівнює добутку потоку енергії на час, за який цей потік випромінюється, тобто:

$$W = \Phi \cdot t. \qquad (5.2)$$

Потік енергії Φ, що випромінюється Сонцем, дорівнює добутку випромінювальності (енергетичної світності) на площу S його поверхні:

$$\Phi = R_e \cdot S.$$

Енергетичну світність R_e знаходимо із закону Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4. \qquad (5.3)$$

Площа сонячної поверхні

$$S = 4\pi r_c^2. \qquad (5.4)$$

Підставляючи (5.1), (5.3), (5.4) у формулу (5.2), отримаємо

$$W = 4\pi r_c^2 \cdot \sigma b^4 t / \lambda^4 = 3{,}9 \cdot 10^{26} \text{ (Дж)}. \qquad (5.5)$$

Масу Δm, що губить Сонце кожної секунди за рахунок випромінювання електромагнітних хвиль, знайдемо з таких міркувань.

Оскільки маса Сонця зменшується кожної секунди на величину Δm, то при цьому виділяється енергія $\Delta E = (\Delta m)c^2$, де c – швидкість електромагнітного випромінювання.

Ця ж енергія електромагнітних хвиль, випромінюваних за час t, дорівнює добутку потоку енергії Φ (потужність випромінювання) на час t (5.2). Таким чином, $W = c^2 \Delta m$, звідки, з урахуванням (5.5):

$$\Delta m = \frac{W}{c^2} = \frac{4\pi r_c^2 \cdot \sigma b^4 \cdot t}{c^2 \cdot \lambda^4}.$$

Виконавши обчислення за цією формулою, отримаємо

$$\Delta m = 4{,}3 \text{ Гкг}.$$

Оскільки кожної секунди маса Сонця зменшується за рахунок випромінювання на $4{,}3\ Гкг$, то зменшення маси Сонця на 1% (тобто $\Delta m_1 = 0{,}01\, M_c$) відбудеться за час

$$\tau = \frac{0{,}01\, M_c}{\Delta m} = \frac{1{,}98 \cdot 10^{28}\ кг}{4{,}3 \cdot 10^9\ кг/с} \approx 10^{11} \text{ років}.$$

Задача 2. Внаслідок зміни температури абсолютно чорного тіла максимум спектральної густини випромінювальності $r_{\max}(\lambda, T)$ змістився з $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм на $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм. Як і у скільки разів змінилася випромінювальність R_e тіла і максимальна спектральна густина випромінювальності $r_{\max}(\lambda, T)$?

Дані: $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм; $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм;

$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} - ?$ $\frac{r_{\max 2}(\lambda, T)}{r_{\max 1}(\lambda, T)} - ?$

Аналіз і розв'язання

Випромінювальність (енергетичну світність) абсолютно чорного тіла знайдемо із закону Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4.$$

Для температури T_1, якій відповідає максимум спектральної випромінювальності $r(\lambda, T)$ на довжині хвилі $\lambda_1 = 2{,}4$ мкм випромінюваність $R_{e1} = \sigma T_1^4$. Для температури T_2, якій відповідає максимум спектральної випромінювальної здатності $r(\lambda, T)$ на довжині хвилі $\lambda_2 = 0{,}8$ мкм, відповідно знаходимо $R_{e2} = \sigma T_2^4$.

Тоді

$$R_{e2} / R_{e1} = T_2^4 / T_1^4. \qquad (5.6)$$

Температури T_1 і T_2 визначимо із закону зміщення Віна:

$$\lambda_m = b/T\,.$$

Тоді

$$T_1 = b/\lambda_1\,;\; T_2 = b/\lambda_2\,.$$

Підставивши T_1 і T_2 у формулу (5.6), отримаємо

$$R_{e2}/R_{e1} = \lambda_1^4/\lambda_2^4 = 81 \text{ раз.}$$

Максимальну спектральну випромінювальну здатність знаходимо з формули:

$$r_{\max}(\lambda,T) = CT^5\,,$$

тоді

$$r_{\max 2}(\lambda,T)/r_{\max 1}(\lambda,T) = T_2^5/T_1^5 = \lambda_1^5/\lambda_2^5 = 243 \text{ рази.}$$

5.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Визначити температуру T, за якої випромінювальність (енергетична світність) R_e абсолютно чорного тіла дорівнює 10 кВт/м^2.

Відповідь: 648 К.

Задача 2. Потік енергії Φ, що випромінюється з оглядового віконця плавильної печі, дорівнює 34 Вт. Визначити температуру T печі, якщо площа отвору S=6 см^2.

Відповідь: 1 кК.

Задача 3. Визначити енергію W, що випромінюється за час $t = 1$ хв. з оглядового віконця площею $S = 8$ см^2 плавильної печі, якщо її температура T=1,2 кК.

Відповідь: 5,65 кДж.

Задача 4. Вважаючи, що муфельна піч випромінює як абсолютно чорне тіло і розсіює стінками 70% потужності, визначити температуру її внутрішньої поверхні при відкритому оглядовому отворі площею $S = 20$ см^2, якщо потужність, яка споживається піччю, дорівнює P=1,4 кВт.

Відповідь: T=1386 К.

Задача 5. Термодинамічна температура абсолютно чорного тіла зросла у 3 рази. Визначити, у скільки разів збільшилась при цьому його інтегральна енергетична світність? У скільки разів і як змінилася довжина хвилі, яка відповідає максимуму його випромінювальної здатності?

Відповідь: 1) 81 раз; 2) зменшилась у 3 рази.

Задача 6. Енергія, що випромінюється за час $t = 2$ хв. з оглядового віконця площею $S = 10$ см^2 плавильної печі, дорівнює W=8 кДж. Визначити температуру печі.

Відповідь: T=1041К.

Задача 7. Температура T верхніх шарів зірки Сіріус дорівнює 10 кК. Визначити потік енергії Φ, що випромінюється з поверхні площею $S = 1$ км^2 цієї зірки.

Відповідь: 56,7 ГВт.

Задача 8. У скільки разів потрібно збільшити термодинамічну температуру абсолютно чорного тіла, щоб його інтегральна випромінювальна здатність зросла у два рази?

Відповідь: В 1,19 разів.

Задача 9. Визначити відносну зміну інтегральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $\Delta R_e / R_e$ при збільшенні його температури на 1%.

Відповідь: 4%.

Задача 10. Визначити температуру T зачерненої металевої пластинки, розташованої перпендикулярно сонячним променям поза земною атмосферою на середній відстані від Землі до Сонця ($1{,}49 \cdot 10^{11}$м). Сонячна стала $C = 1{,}4$ кДж/м^2·с.

Відповідь: 396 К.

Задача 11. Вважаючи, що коефіцієнт чорноти вугілля при температурі T=600 К дорівнює 0,8, визначити випромінювальну здатність вугілля R_e; енергію W, яка випромінюється з поверхні вугілля площею $S = 5$ см^2 за $t = 10$ хв.

Відповідь: R_e =5,88 кДж/м^2·с; W =1,76кДж.

Задача 12. З поверхні сажі площею $S = 2$ см^2 при температурі T=400 К за час $t = 5$ хвилин випромінюється енергія W=83 Дж. Визначити коефіцієнт чорноти сажі.

Відповідь: 0,953.

Задача 13. Можна умовно вважати, що Земля випромінює, як сіре тіло, що має температуру T=280 К. Визначити коефіцієнт чорноти Землі, якщо випромінювальна здатність R_e її поверхні дорівнює 325 кДж/м^2·с.

Відповідь: 0,26.

Задача 14. Потужність P випромінювання кулі радіусом $R = 10$ см при деякій сталій температурі T дорівнює 1 кВт. Знайти цю температуру, вважаючи кулю сірим тілом з коефіцієнтом чорноти 0,25.

Відповідь: $T = \left(\dfrac{P}{4\pi\alpha R^2 \sigma} \right)^{1/4} = 866$ К.

Задача 15. Муфельна піч споживає потужність $P = 1$ кВт. Температура її внутрішньої поверхні при відкритому отворі площею $S = 25\,\text{см}^2$ дорівнює 1,2 кК. Вважаючи, що отвір печі випромінює, як абсолютно чорне тіло, визначити, яка частка n потужності розсіюється.

Відповідь: $n = 1 - \sigma T^4 S / P \approx 0{,}71$.

Задача 16. Максимум спектральної густини випромінювальності $r_{\max}(\lambda, T)$ зірки Арктур припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 580\,\text{нм}$. Вважаючи, що зірка випромінює, як абсолютно чорне тіло, визначити температуру T поверхні зірки.

Відповідь: 4,98 кК.

Задача 17. Температура T верхніх шарів Сонця дорівнює 5,3 кК. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, визначити довжину хвилі λ_m, якій відповідає максимальна спектральна випромінювальна здатність $r_{\max}(\lambda, T)$ Сонця.

Відповідь: 547 нм.

Задача 18. При збільшенні термодинамічної температури T абсолютно чорного тіла у два рази довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності $r_{\max}(\lambda, T)$, зменшилась на $\Delta\lambda = 400\,\text{нм}$. Визначити початкову та кінцеву температури T_1 і T_2.

Відповідь: 3,62 кК; 7,24 кК.

Задача 19. Визначити температуру T абсолютно чорного тіла, при якій максимум спектральної випромінювальної здатності $r_{\max}(\lambda, T)$ припадає на червону границю видимого спектра $\lambda_1 = 750$ нм, на фіолетову $\lambda_2 = 380$ нм.

Відповідь: 3,8 кК; 7,6 кК.

Задача 20. При переході від температури T_1 до температури T_2 площа, яка обмежена графіком функції розподілу густини енергії рівноважного випромінювання по довжинах хвиль, збільшується у 16 разів. Як зміниться при цьому довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла?

Відповідь: λ_m зменшується у два рази.

Задача 21. Максимальна спектральна випромінювальна здатність $r_{\max}(\lambda, T)$ абсолютно чорного тіла дорівнює $4{,}16 \cdot 10^{11}$ Вт/м^3. На яку довжину хвилі λ_m вона припадає?

Відповідь: 1,45 мкм.

Задача 22. Куля радіусом $r = 8$ см випромінює, як сіре тіло. Потужність випромінювання при сталій температурі кулі T=1000 К дорівнює $P = 800$ Вт. Визначити коефіцієнт чорноти кулі.

Відповідь: 0,18.

Задача 23. Довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, збільшилася на $\Delta\lambda = 600$ нм при охолодженні абсолютно чорного тіла. Термодинамічна температура тіла при цьому зменшилася у три рази. Знайти початкову і кінцеву температури і довжини хвиль, на які припадають максимуми випромінювальної здатності на цих температурах. У скільки разів змінилась спектральна випромінювальна здатність?

Відповідь: 1) T_1=9,66 кК, T_2=3,22 кК; 2) λ_1=300 нм, λ_2=900 нм; 3) 243.

Задача 24. Довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, зменшилась у три рази при збільшенні його температури від T_1 до T_2. Визначити, у скільки разів і як зміниться площа, обмежена графіком функцій спектральної випромінювальної здатності тіла від довжини хвилі.

Відповідь: збільшиться у 81 раз.

Задача 25. Куб, ребра якого $a = 20$ см, нагрітий до певної сталої температури. Випромінювальна потужність куба $P = 2$ кВт, коефіцієнт чорноти α=0,2. Знайти температуру куба.

Відповідь: T=930 К.

Задача 26. До мідного циліндра довжиною $l = 4$ см і діаметром $d = 2$ см підводиться тепло потужністю $P = 0,2$ Вт. У результаті температура циліндра підтримується сталою і рівною $t = 17°C$. Визначити температуру простору, оточуючого циліндр. Поглинальна здатність міді 0,6.

Відповідь: $t_0 = -5°C$.

Задача 27. По дроту діаметром $d = 1$мм протікає струм $I = 5$А. Температура дроту підтримується сталою і рівною $t = 727°C$. Питомий опір дроту $\rho = 9,2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м. Температура оточуючого дріт середовища $t = 17°C$. Вважаючи поверхню дроту сірою, знайти його поглинальну здатність.

Відповідь: 0,165.

Задача 28. Зірка масою $m = 1,98 \cdot 10^{30}$ кг і радіусом $R = 6,95 \cdot 10^{8}$ м випромінює, як абсолютно чорне тіло. Максимум випромінювальної здатності зірки припадає на довжину хвилі $\lambda = 480$ нм. Знайти її максимальну випромінювальну здатність $r_{\max}(\lambda, T)$ і час t, за який зірка втратить свою масу внаслідок випромінювання електромагнітних хвиль.

Відповідь: 1) $r_{\max}(\lambda,T)=1{,}04\cdot10^{24}$ Вт/м. 2) $t=1{,}24\cdot10^{13}$ років.

Задача 29. Вважаючи, що Сонце має властивості абсолютно чорного тіла, визначити інтенсивність I сонячного випромінювання поблизу Землі за межами її атмосфери (ця інтенсивність має назву сонячної сталої). Температура сонячної поверхні T=5785 К.

Відповідь: $I=\sigma T^4\left(r/R\right)^2=1{,}37$ кВт/м^2 (r – радіус Сонця, R – відстань від Сонця до Землі).

Задача 30. Вважаючи, що Сонце випромінює, як абсолютно чорне тіло, обчислити інтегральну випромінювальну здатність і температуру його поверхні. Сонячний диск видно із Землі під кутом $\theta=32'$. Сонячна стала $C=1{,}4$ кДж/ м^2·с (сонячною сталою називається величина, що дорівнює поверхневій густині потоку енергії випромінювання Сонця поза земною атмосферою на середній відстані від Землі до Сонця).

Відповідь: R_e =64,7 МВт/м^2; $T=5{,}8$ кК.

6 КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ

6.1 Мета заняття

Ознайомитися з явищами, які свідчать про квантові властивості випромінювання – зовнішнім фотоефектом, тиском світла та ефектом Комптона. Навчитися розв'язувати задачі, користуючись рівнянням Ейнштейна, розраховувати енергію, масу, імпульс фотона, тиск світла, зміну довжини хвилі фотона при його розсіюванні на електроні.

6.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Користуючись конспектом лекцій та навчальними посібниками [2, розд. 2, 4, § 8-11; 5, розд. 9], ознайомитися з явищами, які свідчать про квантову природу випромінювання. Вивчити закони фотоефекту, рівняння Ейнштейна, формулу Комптона, співвідношення, що визначають енергію, масу, імпульс фотона, тиск світла. Відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв'язання завдань, наведених, як приклад.

6.3 Основні закони і формули

1. Енергія фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = \hbar\omega,$$

де h – стала Планка, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,

ν – частота випромінювання,

λ – довжина хвилі,

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},\ \hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с},$$

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла.

2. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + T_{\max},$$

або

$$\hbar\omega = A + T_{\max},$$

де $h\nu = \hbar\omega = \varepsilon$ – енергія фотона, який падає на поверхню металу,

A – робота виходу електрона з металу,

$T_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

3. Максимальна кінетична енергія фотоелектрона:

а) нерелятивістський фотон (енергія фотона набагато менша за енергію спокою електрона ($\varepsilon << E_0 = 0{,}51$ МеВ).

$$T_{\max} = m_0 \upsilon_{\max}^2 / 2,$$

де m_0 – маса спокою електрона.

б) релятивістський фотон (енергія фотона порівняна з енергією спокою електрона або більша за неї)

$$T_{\max} = (m - m_0)c^2,$$

де m – маса релятивістського електрона, або

$$T_{\max} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right).$$

4. Червона межа фотоефекту

$$\lambda_0 = hc/A,$$

$$\nu_0 = A/h,$$

де λ_0 – максимальна довжина хвилі випромінювань, ν_0 – мінімальна частота, при яких ще можливий фотоефект.

5. Тиск світла при нормальному падінні на поверхню

$$P = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho),$$

де $E_e = Nh\nu$ – енергія усіх фотонів, які падають на 1 м^2 за 1 с, тобто енергетична освітленість поверхні,

N – кількість фотонів,

$w = E_e/c$ – об'ємна густина енергії випромінювання,

ρ – коефіцієнт відбиття світла.

6. Маса та імпульс фотона

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda},$$

$$p = mc = h/\lambda = h\nu/c.$$

7. Формула Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \lambda_C (1 - \cos\theta),$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

де λ – довжина хвилі фотона, що падає на вільний або слабо зв'язаний електрон,

λ' – довжина хвилі фотона, який розсіявся на кут θ після зіткнення з електроном,

m_0 – маса спокою електрона.

8. Комптонівська довжина хвилі

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}.$$

(При розсіянні фотона на електроні $\lambda_C = 2{,}43$ пм).

6.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що називають явищем зовнішнього фотоефекту?
2. Поясніть рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту.
3. Сформулюйте закони зовнішнього фотоефекту.
4. Що таке «червона» межа фотоефекту? Від чого вона залежить?
5. Що таке робота виходу фотоелектрона?
6. Що називають напругою запирання при зовнішньому фотоефекті? Від чого вона залежить?
7. Чому дорівнює енергія, маса, імпульс фотона?
8. Від чого залежить тиск світла?
9. У чому полягає ефект Комптона?
10. Від чого залежить комптонівське збільшення довжини хвилі?

6.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, вибитих із поверхні натрію монохроматичним світлом із довжиною хвилі λ=300 нм, γ–випромінюванням (λ=1 пм). Робота виходу для натрію дорівнює $A = 2{,}5$ еВ.

Дані: λ_1=300 нм, λ_2=1 пм, $A = 2{,}5$ еВ $= 4 \cdot 10^{-19}$ Дж,

$\upsilon_{\max 1}$–? $\upsilon_{\max 2}$–?

Аналіз і розв'язання

Для визначення максимальної швидкості фотоелектронів скористаємось рівнянням Ейнштейна для фотоефекту:

$$\varepsilon = A + T_{\max} \tag{6.1}$$

Енергію фотона знаходимо за формулою $\varepsilon = hc/\lambda$.

Кінетичну енергію фотоелектронів у рівнянні Ейнштейна залежно від того, яка швидкість їм надається, знаходимо або за класичною формулою, якщо енергія фотона набагато менша від енергії спокою електрона ($\varepsilon << E_0 = 0{,}51$ МеВ), або за релятивістською формулою при енергії фотону, порівняній з енергією спокою електрона.

1. Обчислимо енергію фотона для монохроматичного світла (λ=300 нм):

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^{-9}} = 6{,}63 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4{,}15 \text{ (еВ)}.$$

Енергія фотона виявилася набагато меншою від енергії спокою електрона. Таким чином, максимальну кінетичну енергію фотоелектрона знаходимо за класичною формулою

$$T_{\max} = \frac{m_0 \upsilon_{\max}^2}{2}. \tag{6.2}$$

Підставляючи (6.2) у (6.1), маємо

$$\varepsilon_1 = A + \frac{1}{2} m_0 \upsilon_{\max}^2 .$$

Звідки

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A)}{m_0}} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}63 \cdot 10^{-19} - 4 \cdot 10^{-19}\right)}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}76 \text{ (Мм/с)}$$

2. Розглянемо тепер випадок, коли на поверхню натрію падає γ-випромінювання з довжиною хвилі λ_2=1 пм.

Обчислимо енергію фотона γ- випромінювання

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^{-12}} = 19{,}89 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 1{,}24 \text{ (МеВ)}.$$

Таким чином, енергія фотона перевищує масу спокою електрона більше ніж удвічі. Тому для визначення кінетичної енергії фотоелектрона скористаємося релятивістським виразом

$$T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right), \tag{6.3}$$

звідки

$$\upsilon_{\max} = \frac{\sqrt{T\left(T + 2E_0\right)}}{\left(T + E_0\right)} \cdot c\,. \tag{6.4}$$

Оскільки робота виходу електронів із натрію дуже мала порівняно з енергією γ-фотона, то нею можна знехтувати у формулі (6.1). Тому можна вважати, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії фотона:

$$T_{\max} = \varepsilon = 1{,}24 \text{ МеВ} = 19{,}89 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)}.$$

Підставляючи значення величин T, E_0, c в (6.4), отримаємо

$$\upsilon_{\max} = 2{,}85 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 285 \text{ (Мм/с)}.$$

Задача 2. Визначити червону межу λ_0 фотоефекта для цезію, якщо під час опромінення його поверхні фіолетовим світлом довжиною хвилі λ=400 нм максимальна швидкість фотоелектронів становить 0,65 Мм/с.

Дані: λ=400 нм, $\upsilon_{\max}$ =0,65 Мм/с,

λ_0 –?

Аналіз і розв'язання

Під час опромінення світлом, довжина хвилі λ_0 якого відповідає червоній межі фотоефекту, швидкість, а також кінетична енергія фотоелектрона дорівнює нулю. Тому рівняння Ейнштейна для фотоефекту $h\nu = A + T_{\max}$ у випадку червоної межі запишеться у вигляді $h\nu_0 = A$ або $hc/\lambda_0 = A$. Звідки

$$\lambda_0 = hc/A\,. \tag{6.5}$$

Роботу виходу для цезію знайдемо з рівняння Ейнштейна

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Підставивши значення A у формулу (6.5), знайдемо λ_0.

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 - m\upsilon^2\lambda/2hc} = 640 \text{ (нм)}.$$

Задача 3. Фотон з енергією $\varepsilon = 0,75$ МеВ розсіявся на вільному електроні під кутом $\theta = 60^\circ$. Вважаючи кінетичну енергію та імпульс електрона до зіткнення з фотоном достатньо малими, визначити:

1) енергію розсіяного фотона;
2) кінетичну енергію T електрона віддачі.

Дані: $\varepsilon = 0,75$ МеВ, $\theta = 60^\circ$,

$\varepsilon' - ?$, $T - ?$

Аналіз і розв'язання

Енергію розсіяного фотона знайдемо за допомогою формули Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Виразивши довжину хвиль λ' і λ через енергії відповідних фотонів, одержимо

$$\frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на $2\pi\hbar c$

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos\theta}{mc^2}.$$

Звідси

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon(1 - \cos\theta)}{mc^2} + 1} \approx 0,43 \text{ (МеВ)}.$$

Кінетична енергія електрона віддачі за законом збереження енергії дорівнює різниці між енергією ε фотона, що падає, і енергією ε' розсіяного фотона.

$$T = \varepsilon - \varepsilon',$$

$$T = 0,32 \text{ (МеВ)}.$$

Задача 4. Пучок монохроматичного світла падає нормально на плоску поверхню. Потік енергії $\Phi = 0,5$ Вт. Сила тиску на поверхню дорівнює $F = 3$ нН. Визначити коефіцієнт відбиття.

Дані: $\Phi = 0,5$ Вт, $F = 3$нН,

$\rho - ?$

Аналіз і розв'язання

Сила світлового тиску на поверхню дорівнює

$$F = PS, \tag{6.6}$$

де P – тиск світла, S – площина поверхні.

Тиск світла знаходимо за формулою

$$P = \frac{E_e}{c}(\rho + 1), \tag{6.7}$$

Підставляючи (6.7) у (6.6), отримаємо

$$F = \frac{E_e S(\rho + 1)}{c}.$$

Але $E_e S = \Phi$. Тоді

$$F = \frac{\Phi(\rho + 1)}{c}.$$

Звідси

$$\rho = \frac{cF}{\Phi} - 1 = 0{,}8.$$

6.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. На вольфрам падає світло з довжиною хвилі λ=200 нм. Визначити найменшу затримуючу напругу, при якій фотострум припиниться, якщо робота виходу з вольфраму $A = 4{,}52$ еВ.

Відповідь: U_3=1,695 В.

Задача 2. Затримуюча напруга для калієвої пластинки U_1=0,91 В. Робота виходу електронів із калію $A_1 = 2{,}2$ еВ. При тих самих умовах для іншої пластинки затримуюча напруга дорівнює U_2=3 В. Визначити роботу виходу з цієї пластинки.

Відповідь: $A = 0{,}113$ еВ.

Задача 3. Максимальна швидкість електронів, які вириваються з певного металу світлом із довжиною хвилі λ=500 нм, дорівнює υ_{max}=540 км/с. Визначити червону межу фотоефекту.

Відповідь: λ_0=750,5 нм.

Задача 4. На поверхню літію падає монохроматичне світло (λ=310 нм). Щоб припинити емісію електронів, потрібно подати затримуючу різницю потенціалів U не меншу 1,7 В. Знайти роботу виходу A.

Відповідь: $A = 2{,}3$ еВ.

Задача 5. Яка частина енергії фотона витрачена на роботу виривання фотоелектронів, якщо червона межа фотоефекту λ_0=307 нм, а максимальна кінетична енергія T_{max} фотоелектрона дорівнює 1 еВ?

Відповідь: 0,8.

Задача 6. Для припинення фотоефекту, викликаного опромінюванням ультрафіолетовим світлом платинової пластинки (робота виходу електронів із платини дорівнює 6,3 еВ), потрібно подати затримуючу різницю потенціалів U =3,7 В. Якщо платинову пластину замінити на іншу, то затримуючу різницю потенціалів доведеться збільшити до 6 В. Знайти роботу A виходу електронів із поверхні цієї пластини.

Відповідь: $A = 4$ еВ.

Задача 7. Знайти довжину хвилі ультрафіолетового випромінювання, що падає на поверхню деякого металу, при максимальній швидкості фотоелектронів 10 Мм/с. Роботою виходу електронів із металу знехтувати.

Відповідь: $\lambda = 4{,}36$ нм.

Задача 8. Поверхню металу по черзі опромінюють світлом із довжиною хвилі 400 нм і 800 нм. У другому випадку максимальна швидкість руху фотоелектронів у 1,5 рази менша, ніж у першому. Якою є робота виходу електронів із металу?

Відповідь: $A = 0{,}31$ еВ.

Задача 9. Максимальна швидкість υ_{max} фотоелектронів, що вилітають з металу під час опромінення його γ-фотонами, сягає 291 Мм/с. Визначити енергію ε γ-фотонів.

Відповідь: ε =1,59 МеВ.

Задача 10. Визначити максимальну швидкість υ_{max} фотоелектронів, що вилітають з металу під дією γ-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 3$ пм.

Відповідь: υ_{max} =249 Мм/с.

Задача 11. Робота виходу електронів зі срібла A=4,7 еВ. На пластинку зі срібла падає монохроматичне світло з довжиною хвилі λ=208 нм. Визначити максимальний імпульс, який передається поверхні срібла під час вилітання електрона.

Відповідь: $p = 6{,}09 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

Задача 12. На поверхню вольфраму (робота виходу A=4,52 еВ) падає γ-випромінювання з довжиною хвилі λ=1 пм. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, які вириваються з поверхні вольфраму.

Відповідь: υ_{max} =287 Мм/с.

Задача 13. Визначити енергію ε, масу m та імпульс p фотона, якому відповідає довжина хвилі λ=380 нм (фіолетова межа видимого спектра).

Відповідь: ε =3,27 еВ; $m = 5{,}8 \cdot 10^{-36}$ кг; $p = 1{,}74 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с.

Задача 14. Визначити довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона, що пройшов різницю потенціалів 9,8 В.

Відповідь: λ=392 пм.

Задача 15. Тиск p монохроматичного світла (λ=600 нм) на чорну поверхню, розташовану перпендикулярно падаючим променям, дорівнює 0,1 мкПа. Визначити кількість N фотонів, що падають за $t = 1$ с на поверхню площею $S = 1$ см^2.

Відповідь: N=$9 \cdot 10^{15}$.

Задача 16. Паралельний пучок світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм падає нормально на чорну поверхню і здійснює на неї тиск $p = 10$ мкПа. Визначити: концентрацію n фотонів у пучку; кількість n_1 фотонів, що падають на поверхню площею 1 м^2 за час 1 с.

Відповідь: $n = 2{,}52 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$; $n_1 = 7{,}56 \cdot 10^{22}$ м$^{-2}$с$^{-1}$.

Задача 17. На абсолютно чорну поверхню $S = 2$ м^2, яка розташована перпендикулярно падаючим променям монохроматичного світла, щосекунди падають $N = 8 \cdot 10^{19}$ фотонів. Тиск, який спричиняє світло на поверхню, дорівнює $p = 0{,}1$ мкПа. Визначити довжину хвилі світла.

Відповідь: $\lambda = 265{,}2$ нм.

Задача 18. Тиск монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 400$ нм на ідеально відбиваючу поверхню, розташовану нормально до випромінювання, що падає, дорівнює $p = 0{,}2$ мкПа. Визначити кількість фотонів, які падають на поверхню площею $S = 80$ см^2 за одну секунду.

Відповідь: $N = 4{,}85 \cdot 10^{17}$.

Задача 19. На абсолютно чорну поверхню $S = 2$ м^2, яка розташована перпендикулярно променям монохроматичного світла, що падають на неї, щосекунди потрапляють $N = 8 \cdot 10^{19}$ фотонів. Тиск, який спричиняє світло на поверхню, дорівнює $p = 0{,}1$ мкПа. Визначити довжину хвилі світла.

Відповідь: $\lambda = 265{,}2$ нм.

Задача 20. Довжина хвилі фотона дорівнює комптоновській довжині хвилі λ_C електрона. Визначити енергію та імпульс p фотона.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}511$ МеВ; $p = 2{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

Задача 21. Визначити кут θ розсіяння фотона, який зазнав зіткнення з вільним електроном, якщо зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ при розсіянні становить 3,62 пм.

Відповідь: 120° або 240°.

Задача 22. Визначити імпульс p електрона віддачі при ефекті Комптона, якщо фотон з енергією, однаковою з енергією спокою електрона, був розсіяний на кут $\theta = 180^\circ$.

Відповідь: $3{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

Задача 23. Яка частка енергії фотона при ефекті Комптона припадає на електрон віддачі, якщо фотон розсіявся на кут $\theta = 180^\circ$? Енергія ε фотона до розсіювання дорівнює $0{,}255$ меВ.

Відповідь: $0{,}5$.

Задача 24. При розсіюванні вузького пучка монохроматичного рентгенівського випромінювання на розсіюючій речовині виявилося, що довжини хвиль розсіяного під кутами $\theta_1 = 45°$ і $\theta_2 = 90°$ випромінювання відрізняються у два рази. Визначити довжину хвилі випромінювання, що падає, вважаючи, що розсіювання відбувається на вільних електронах.

Відповідь: $\lambda = 1{,}01$ пм.

Задача 25. У результаті ефекту Комптона фотон з енергією $\varepsilon = 0{,}5$ МеВ при зіткненні з вільним електроном розсіявся під кутом $\theta = 60^\circ$. Знайти енергію ε' розсіяного фотона.

Відповідь: ε' =0,335 МеВ.

Задача 26. На рисунку 6.1 наведено вольтамперну характеристику вакуумного фотоелемента, на катод якого діє світло з довжиною хвилі 450 нм. Визначити потужність діючого на катод проміння, вважаючи, що кожний сотий з падаючих фотонів вириває з катода електрон.

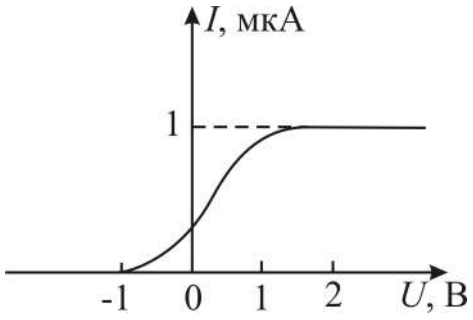


Рисунок 6.1

Відповідь: $27{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт.

Задача 27. Пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі λ=663 нм падає нормально на дзеркальну плоску поверхню. Потік енергії $\Phi = 0{,}6$ Вт. Визначити силу F тиску, якої зазнає ця поверхня, а також кількість фотонів, що падають на неї за час $t = 5$ с.

Відповідь: F =4 нН; $N = 10^{18}$.

Задача 28. Визначте тиск світла на стінки електричної лампочки потужністю 150 Вт, вважаючи, що вся потужність витрачається на випромінювання, а стінки лампочки відбивають 15 % світла, що падає на них. Вважайте лампочку сферою радіусом 4 см.

Відповідь: $p = 28{,}6$ мкПа.

Задача 29. Кут розсіювання θ фотона дорівнює 90°. Кут віддачі φ електрона дорівнює 30°. Визначити енергію ε фотона, що падає.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}37$ МеВ.

Задача 30. Фотон розсіявся на вільному електроні, який знаходився у стані спокою. В результаті цього довжина хвилі розсіяного фотона збільшилася на 15%, а кінетична енергія електрона віддачі становила 45 кеВ. Визначити енергію фотона до розсіювання на електроні.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}346$ МеВ.

7 ТЕОРІЯ БОРА АТОМА ВОДНЮ. ПОСТУЛАТИ БОРА

7.1 Мета заняття

Засвоїти теорію Бора атома водню. Навчитися застосовувати на практиці постулати Бора та формулу Бальмера для розрахунку спектра водню та воднеподібних іонів (He^{+}, Li^{++} та ін.).

7.2 Вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 5; 4, § 12-17; 5, розд. 10]. Звернути увагу на постулати Бора, квантування електронних орбіт та енергії атому водню, формулу Бальмера. Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

7.3 Основні закони і формули

1. Момент імпульсу електрона на стаціонарних орбітах атома водню за теорією Бора

$$L = m\upsilon r = n\hbar \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

де m – маса електрона,
r – радіус орбіти,
υ – швидкість електрона на орбіті,
n – головне квантове число;
$\hbar$ – стала Планка.

2. Радіус n-ї стаціонарної орбіти

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{ze^2 m} = a_0 n^2,$$

де a_0 – перший борівський радіус ($a_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$м), Z – порядковий номер атома у таблиці Менделєєва.

3. Енергія електрона в атомі водню

$$E_n = -\frac{mz^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

4. Енергія фотона, що випромінюється атомом водню при переході з одного стаціонарного стану в інший

$$\varepsilon = h\nu = E_n - E_m,$$

де E_n і E_m – відповідно до енергії стаціонарних станів атома до і після випромінювання (поглинання).

5. Узагальнена формула Бальмера

$$\nu = R\left(1/m^2 - 1/n^2\right),$$

де ν – частота спектральних ліній у спектрі атома водню;

$R = \dfrac{mz^2e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3} = 3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ – стала Рідберга;

m – визначає серію ($m = 1,\ 2,\ 3,\ldots$);

n – визначає окремі лінії відповідної серії ($n = m+1,\ m+2,\ m+3,\ldots$).

Або $$1/\lambda = R'\left(1/n^2 - 1/m^2\right),$$

де $R' = 1{,}1\cdot10^7$ м$^{-1}$.

7.4 Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постулати Бора.
2. У чому полягають недоліки планетарної моделі атома Резерфорда?
3. Покажіть різницю між моделями атома Резерфорда та Бора.
4. Запишіть вираз для радіусів борівських орбіт атома водню та воднеподібних іонів.
5. Запишіть вираз для енергії електронів в атомі водню.
6. Чому спектр атомарних газів лінійчатий?
7. Поясніть узагальнену формулу Бальмера.
8. У чому полягають недоліки теорії Бора?

7.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Обчислити потенціал іонізації і перший потенціал збудження атома водню.

Аналіз і розв'язання

Потенціал іонізації U_i - це та найменша різниця потенціалів, яку має пройти у прискорюючому полі електрон, щоб при зіткненні з даним незбудженим атомом іонізувати його. Робота з вилучення електрона з атома A_i дорівнює роботі сил електричного поля, яке прискорює електрон:

$$A_i = eU_i.$$

З іншого боку, робота іонізації A_i дорівнює кванту енергії $h\nu$, поглинутому атомом водню при переході електрона з першої боровської орбіти на нескінченно віддалену орбіту. З формули Бальмера

$$\nu = R\left(1/n^2 - 1/m^2\right)$$

при $n = 1;\ m = \infty$ одержимо

$$A_i = h\nu = hR\left(1/n^2 - 1/m^2\right) = hR$$

$$U_i = hR/e = 13{,}6 \text{ (В)}.$$

Перший потенціал збудження U_1 - це та найменша різниця потенціалів, яку має пройти у прискорюючому полі електрон, щоб при зіткненні з незбудженим атомом перевести його у перший збуджений стан. Для атома водню це відповідає переходу з першої Боровської орбіти на другу.

Якщо прийняти $n=1$, $m=2$, одержимо

$$eU_1 = hv = hR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{3}{4}hR$$

$$U_1 = \frac{3}{4}\frac{hR}{e} = \frac{3}{4}\cdot 13{,}6\ \hat{A} = 10{,}2\ \text{(В)}.$$

Задача 2. Обчислити у боровській моделі довжину хвилі світла, яка випромінюється атомом водню під час переходу з енергетичного рівня $m=6$ на рівень $n=2$.

Дані: $m=6$, $n=2$;

$\lambda - ?$

Аналіз і розв'язання

Використаємо формулу Бальмера для обчислення довжини хвилі переходу

$$1/\lambda = R'\left(1/n^2 - 1/m^2\right)$$

Звідки $\lambda = \dfrac{1}{R'\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)} = \dfrac{1}{1{,}1\cdot 10^7\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{6^2}\right)} \approx 4{,}1\cdot 10^{-7}$ м = 410 (нм).

Це четверта лінія у серії Бальмера (фіолетова).

Задача 3. Обчислити радіус п'ятої орбіти в атомі водню і визначити швидкість обертання електрона на цій орбіті.

Аналіз і розв'язання

Відповідно до теорії Бора умова стаціонарних орбіт в атомі водню визначається співвідношенням

$$m\upsilon_n r_n = n\hbar, \tag{7.1}$$

де m – маса електрона; υ_n – його швидкість; r_n – радіус орбіти; $\hbar$ – стала Планка; n – головне квантове число ($n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$), яке відповідає номеру орбіти.

Під час обертання електрона навколо ядра, сили взаємодії між електричними зарядами ядра і електрона надають останньому доцентрове прискорення. Згідно з другим законом Ньютона

$$\frac{m\upsilon_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \tag{7.2}$$

або

$$m\upsilon_n^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}. \tag{7.3}$$

З формули (7.1) знаходимо

$$\upsilon_n = n\hbar/mr_n. \tag{7.4}$$

Підставляємо (7.4) у (7.3) та знаходимо радіус n-ї орбіти

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}. \qquad (7.5)$$

Підставляючи у (7.5) числові значення величин, знаходимо

$$r_5 = 1{,}31\,(\text{нм}). \qquad (7.6)$$

Відповідно знаходимо за формулою (7.4) з урахуванням числового значення (7.6) швидкість електрона на п'ятій орбіті атома водню

$$\upsilon_5 = 0{,}45\ (\text{Мм/с}).$$

7.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Обчислити довжини хвиль перших трьох ліній серії Бальмера.
Відповідь: $\lambda_1 = 657$ нм; $\lambda_2 = 487$ нм; $\lambda_3 = 432$ нм.

Задача 2. Перші потенціали збудження Li та Na дорівнюють відповідно 1,84 В та 2,1 В. При якій температурі середня кінетична енергія частинок цих речовин дорівнює енергії збудження?
Відповідь: $T_1 = 1{,}43 \cdot 10^4$ К; $T_2 = 1{,}63 \cdot 10^4$ К.

Задача 3. На атом водню падає фотон і вибиває з нього електрон. Кінетична енергія електрона дорівнює 3,22 еВ. Чому дорівнює довжина хвилі такого світла, якщо атом знаходиться у першому збудженому стані?
Відповідь: $\lambda = 187{,}5$ нм.

Задача 4. На який енергетичний рівень перейшов електрон при збудженні іона гелію, якщо при переході у нормальний стан було послідовно зафіксовано два фотони з довжиною хвиль 108,5 нм та 30,4 нм?
Відповідь: на третій.

Задача 5. На скільки змінилася енергія електрона в атомі водню при випромінюванні атомом фотона з довжиною хвилі $\lambda =$ 486 нм?
Відповідь: 2,55 еВ.

Задача 6. Обчислити швидкість і частоту обертання електрона на другій орбіті атома водню.
Відповідь: $\upsilon = 1{,}09$ Мм/с; $\nu = 8{,}19 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 7. Обчислити енергію фотона, який випромінюється при переході електрона в атомі водню з третього енергетичного рівня на перший.
Відповідь: $E = 12{,}1$ еВ.

Задача 8. Фотон з енергією $E = 16,5$ еВ вибив електрон з незбудженого атома водню. Яку швидкість матиме електрон далеко від ядра атома?

Відповідь: $\upsilon = 1$ Мм/с.

Задача 9. Визначити найменшу $E_{\min}$ та найбільшу $E_{\max}$ енергії фотона в ультрафіолетовій серії спектра водню (серії Лаймана).

Відповідь: $E_{\min} = 10,2$ еВ; $E_{\max} = 13,6$ еВ.

Задача 10. Обчислити довжину хвилі λ, яку випромінює іон гелію He^+ при переході з другого енергетичного рівня на перший. Зробити такий же розрахунок для іона літію Li^{++}.

Відповідь: $\lambda_{He^+} = 30,3$ нм; $\lambda_{Li^{++}} = 13,5$ нм.

Задача 11. Визначити кутову швидкість обертання електрона на другій боровській орбіті атома He^+.

Відповідь: $2,07 \cdot 10^{16}$ рад/с.

Задача 12. Обчислити для атома водню та іона He^+: енергію зв'язку електрона в основному стані, потенціал іонізації, перший потенціал збудження і довжину хвилі головної лінії серії Лаймана.

Відповідь: $E_{зв} = \hbar R z^2$, $U_i = \dfrac{E_{зв}}{e}$; $U_1 = \dfrac{3\hbar R z^2}{4e}$, $\lambda = \dfrac{8\pi c}{3Rz^2}$.

Задача 13. Яку мінімальну енергію потрібно передати іону He^+, який перебуває в основному стані, щоб він зміг випромінити фотон, який відповідає головній лінії серії Бальмера?

Відповідь: $E_{\min} = \dfrac{8}{9}\hbar R z^2 = 48,5$ еВ.

Задача 14. Визначте довжину хвиль, що відповідає: 1) межі серії Лаймана; 2) межі серії Бальмера; 3) межі серії Пашена.

Відповідь: $\lambda_1 = 91$ нм, $\lambda_2 = 364$ нм, $\lambda_3 = 820$ нм,.

Задача 15. Якому елементу належить воднеподібний спектр, довжини хвиль ліній якого у чотири рази коротші, ніж в атомарного водню?

Відповідь: He^+.

Задача 16. У якого воднеподібного іону різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера та Лаймана дорівнює 59,3 нм?

Відповідь: Li^{++}.

Задача 17. Які лінії має спектр поглинання атомарного водню у діапазоні довжин хвиль від $94,5$ до $130,0$ нм.

Відповідь: $\lambda = 97,3$ нм; $102,6$ нм та $121,6$ нм.

Задача 18. Визначити сталу Рідберга, якщо відомо, що для іонів He^+ різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера та Лаймана $\Delta\lambda = 133,7$ нм.

Відповідь: $R' = 1,1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Задача 19. Обчислити енергію та потенціал іонізації іонів He^+ та Li^{++}.

Відповідь: He: 54 еВ, 54 В; Li: 122 еВ, 122 В.

Задача 20. Атом водню в основному стані поглинув квант світла з довжиною хвилі $\lambda = 121,5$ нм. Визначити радіус електронної орбіти збудженого атома водню.

Відповідь: $r = 212$ пм.

Задача 21. Знайти квантове число *n*, що відповідає збудженому стану іона He^+, якщо при переході в основний стан цей іон випромінює послідовно два фотони з довжинами хвиль 108,5 та 30,4 нм.

Відповідь: *n*=5.

Задача 22. Визначити швидкість і частоту обертання електрона на четвертій орбіті атома водню.

Відповідь: $\upsilon_4 = 0,55$ Мм/с; $\nu = 1,03 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 23. Визначити період обертання електрона на третій орбіті атома водню.

Відповідь: $4,1 \cdot 10^{-15}$ с.

Задача 24. Частота світла, яку випромінює атом водню під час переходу електрона на рівень з головним квантовим числом $n = 3$, дорівнює $\nu = 3,29 \cdot 10^{14}$ Гц. Визначити, у скільки разів змінився при цьому радіус орбіти електрона.

Відповідь: у 10 разів.

Задача 25. Електрон обертається в атомі водню з частотою $\nu = 8,22 \cdot 10^{14}$ Гц. Визначити, на якій орбіті знаходиться цей електрон.

Відповідь: $n = 2$.

Задача 26. Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 486$ нм. Визначити зміну орбітального механічного моменту електрона при переході зі збудженого стану в основний.

Відповідь: $\Delta L = 1,14 \cdot 10^{-35}$ Дж·с.

Задача 27. Електрон переходить зі збудженого стану в основний і випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 102,6$ нм. Визначити, на якій орбіті знаходився електрон. Обчислити радіус цієї орбіти та орбітальний механічний момент електрона, коли він знаходився на даній орбіті.

Відповідь: $n = 3$; $r_3 = 47,61$ нм; $L = 9,45 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 28. Скільки спектральних ліній випромінюватиме атомарний водень, який збуджують на n-й енергетичний рівень.

Відповідь: $N = n(n-1)/2$.

Задача 29. Використовуючи теорію Бора, визначити орбітальний магнітний момент електрона, що рухається по третій орбіті атома водню.

Відповідь: $2,8 \cdot 10^{-23}$ А·м^2.

Задача 30. Атом He^+, випромінює фотон, що відповідає головній лінії серії Лаймана. Цей фотон вибиває електрон з атома водню, що знаходився в основному стані. Знайти швидкість електрона.

Відповідь: $3,1 \cdot 10^6$ м/с.

8 ХВИЛІ ДЕ БРОЙЛЯ. СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

8.1 Мета заняття

Ознайомитись із гіпотезою де Бройля про універсальність корпускулярно-хвильового дуалізму. З'ясувати фізичний смисл співвідношення невизначеностей Гейзенберга та навчитися використовувати його для розв'язання задач.

8.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

При підготовці до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом або підручником [2, розд. 3.1, 3.4; 4, § 18-20; 5, розд. 11.1-11.3]. З'ясувати, що, за де Бройлем, між корпускулярними і хвильовими характеристиками електрона або іншої мікрочастинки існує такий зв'язок, як і між характеристиками фотона. Засвоїти співвідношення невизначеностей Гейзенберга для координат та імпульсу, для енергії та часу. Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язування задач, що наведені у прикладах.

8.3 Основні закони і формули

1. Довжина хвилі де Бройля

$$\lambda = h/p,$$

де p – імпульс частинки,

$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

а) у класичному наближенні (швидкість частинки набагато менша за швидкість світла $\upsilon << c$)

$$p = m_0\upsilon,$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon},$$

де υ – швидкість частинки,

m_0 – маса спокою.

б) в релятивістському випадку (швидкість частинки є близькою до швидкості світла у вакуумі)

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}.$$

2. Зв'язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією T частинки:

а) у класичному наближенні (кінетична енергія частинки набагато менша за її енергію спокою $T << E_0$, $E_0 = m_0 c^2$)

$$T = m_0 \upsilon^2 / 2,$$
$$\lambda = h / \sqrt{2 m_0 T}.$$

б) у релятивістському випадку (кінетична енергія частинки є порівняною з її енергією спокою $T \approx E_0$)

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} - 1 \right),$$
$$\lambda = hc / \sqrt{T\left(T + 2E_0\right)}.$$

3. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar,$$
$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar,$$
$$\Delta p_z \Delta z \geq \hbar,$$

де Δp_x, Δp_y, Δp_z – невизначеність проекцій імпульсу частинки на осі x, y, z відповідно; Δx, Δy, Δz – невизначеності її координат;

б) для енергії і часу

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔE – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи у цьому стані.

8.4 Контрольні запитання та завдання

1. Що таке корпускулярно-хвильовий дуалізм?
2. У чому зміст гіпотези де Бройля?
3. Що таке хвиля де Бройля? Чому дорівнює її довжина?
4. У чому полягають хвильові властивості мікрочастинок?
5. Як визначається групова та фазова швидкість хвиль де Бройля?
6. Запишіть співвідношення невизначеностей для координат та імпульсу.
7. Запишіть співвідношення невизначеностей для енергії та часу.
8. У чому полягає фізичний зміст співвідношення невизначеностей?

8.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Визначити довжину хвилі де Бройля, якщо кінетична енергія електрона дорівнює 0,5 кеВ.

Дані: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг ; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж ·с;

T = 0,5 кеВ = $0{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж

λ – ?

Аналіз і розв'язання

Кінетична енергія електрона T набагато менша за його енергію спокою $E_0 = m_0c^2 = 9{,}11\cdot10^{-31}\cdot9\cdot10^{16} = 8{,}2\cdot10^{-14}$ Дж=0,51МеВ.

Для визначення довжини хвилі де Бройля скористаємось формулою:

$$\lambda = h/m\upsilon . \tag{8.1}$$

З вираження для кінетичної енергії $T = m\upsilon^2/2$, знайдемо

$$\upsilon = \sqrt{2T/m} \tag{8.2}$$

Підставивши (8.2) у (8.1), отримаємо

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{2T/m}} = \frac{h}{\sqrt{2Tm}} = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot0{,}8\cdot10^{-19}\cdot9{,}11\cdot10^{-31}}} = 5{,}5\cdot10^{-10}\ \text{(м)}.$$

Задача 2. Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 212$ Мм/с. Визначити довжину хвилі де Бройля електрона. Порівняти її з комптонівською довжиною хвилі (λ_C=2,426 пм).

Дані: $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг ; $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж ·с;

υ=212 Мм/с = $2{,}12\cdot10^{8}$ м/с.

λ – ?

Аналіз і розв'язання

Швидкість електрона є порівняною зі швидкістю світла у вакуумі $c = 3\cdot10^8$ м/с. Скористаємось формулою для релятивістського імпульсу

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \tag{8.3}$$

де m_0 – маса спокою електрона.

Довжина хвилі де Бройля

$$\lambda = h/p . \tag{8.4}$$

Підставляючи (8.3) у (8.4), маємо

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} . \tag{8.5}$$

Підставляючи числові значення величин у (8.5), маємо

λ=2,426 (пм).

Таким чином, довжина хвилі де Бройля електрона дорівнює комптонівській довжині хвилі, тобто $\lambda = \lambda_C$.

Задача 3. Частинка рухається із швидкістю υ. Знайти вирази для фазової і групової швидкостей поширення хвиль де Бройля, пов'язаних із рухом частинки.

Дані: υ

$\upsilon_ф$ – ? u – ?

Аналіз і розв'язання

Як відомо, фазова швидкість визначається співвідношенням

$$\upsilon_{ф} = \omega/k\,,$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота; $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Перепишемо це співвідношення так

$$\upsilon_{ф} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = \frac{h\nu\lambda}{h} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{m\upsilon} = \frac{c^2}{\upsilon},$$

де $E = h\nu$, $p = h/\lambda$.

Оскільки $c > \upsilon$, то фазова швидкість хвиль де Бройля більша за швидкість світла у вакуумі.

Групова швидкість визначається за формулою

$$u = d\omega/dk\,.$$

Перепишемо цей вираз так

$$u = \frac{d(2\pi\nu)}{d(2\pi/\lambda)} = \frac{d(h\nu)}{d(h/\lambda)} = \frac{dE}{dp}.$$

Оскільки $E = \frac{p^2}{2m}$, то

$$dE/dp = p/m = m\upsilon/m = \upsilon.$$

Тобто $u = \upsilon$ – групова швидкість хвиль де Бройля дорівнює швидкості частинки.

Задача 4. Пучок електронів, які рухаються з однаковою швидкістю, падає нормально на вузьку щілину шириною $a = 1$ мкм. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, розташованому на відстані 20 см від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму складає Δx =48 мкм.

Дані: a =1 мкм =10^{-6}м; $l = 20$ см =0,2 м;

$\Delta x =$ 48мкм = $4{,}8\cdot10^{-5}$м; $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.

υ – ?

Аналіз і розв'язання

Ширина центрального дифракційного максимуму на екрані дорівнює відстані між двома першими дифракційними мінімумами (рис. 8.1).

Дифракційний мінімум спостерігається, якщо виконується умова

$$a\sin\varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2}.$$

Для першого дифракційного мінімуму k =1, тоді

$$a\sin\varphi = \lambda\,. \qquad (8.6)$$

З малюнку бачимо, що ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює

$$\Delta x = 2l\cdot tg\varphi\,. \qquad (8.7)$$

Якщо кут φ дуже малий, то $tg\varphi \approx \sin\varphi$.

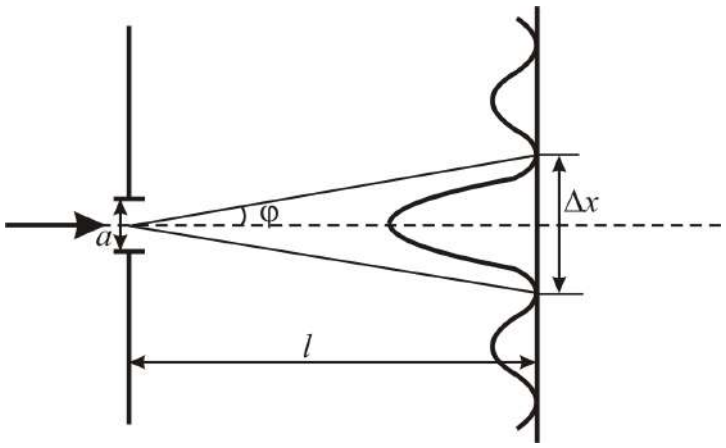


Рисунок 8.1

Скориставшись (8.6) та (8.7), знайдемо

$$\lambda = \frac{a\Delta x}{2l}. \tag{8.8}$$

За де Бройлем рух електрона зі швидкістю υ пов'язаний з певним хвильовим процесом, довжина хвиль якого визначається рівнянням

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon},$$

звідки

$$\upsilon = \frac{h}{m\lambda}.$$

Скориставшись (8.8), знайдемо

$$\upsilon = \frac{2hl}{ma\Delta x} = 6{,}1 \text{ (Мм/с)}.$$

Задача 5. Мінімальний діаметр атома водню $d_{\min}$=124 пм. Застосовуючи співвідношення невизначеностей, знайти кінетичну енергію електрона в атомі водню.

Дані: $d_{\min}$=124 пм =1,24·10^{-10}м; $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг.

$T - ?$

Аналіз і розв'язання

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга має вигляд

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar. \tag{8.9}$$

Якщо діаметр атома d, тоді електрон буде знаходитися в атомі у межах області з невизначеністю

$$\Delta x = d/2.$$

Тоді співвідношення (8.9) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{2}\Delta p \geq \hbar,$$

або

$$d \geq 2\hbar/\Delta p. \tag{8.10}$$

Невизначеність імпульсу не може перебільшувати значення самого імпульсу, тобто

$$\Delta p \le p .$$

Імпульс пов'язаний з кінетичною енергією електрона співвідношенням

$$p = \sqrt{2mT} .$$

Замінимо Δp значенням $\sqrt{2mT}$, а d на $d_{\min}$ і перейдемо від нерівності (8.10) до рівності. У результаті маємо

$$d_{min} = \frac{2\hbar}{\Delta p} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}} .$$

Звідси

$$T = \frac{2\hbar^2}{m d_{\min}^2} = 1{,}45 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 9{,}1 \text{ (еВ)}.$$

8.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Порівняти дебройлівську хвилю для маленької кульки маси $m = 1$ г, яка переміщується зі швидкістю $\upsilon = 100$ *м/с*, та електрона, який переміщується зі швидкістю $\upsilon = 10^6$ *м/с*.

Відповідь: $6{,}6 \cdot 10^{-24}$ нм; $0{,}67$ нм.

Задача 2. Знайти залежність дебройлівської довжини хвилі λ від кінетичної енергії: а) нерелятивістської частинки $(T << m_0 c^2)$; б) релятивістської частинки $(T \approx m_0 c^2)$.

Відповідь: а) $\lambda = h \big/ \sqrt{2 m_0 T}$; б) $\lambda = hc \big/ \sqrt{T\left(T + 2E_0\right)}$.

Задача 3. Знайти довжину хвилі де Бройля молекули водню, яка рухається із середньою квадратичною швидкістю при температурі 300 *К*. Маса молекули водню $3{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг.

Відповідь: $0{,}095$ нм.

Задача 4. Знайти дебройлівську довжину хвилі λ теплових нейтронів, яка відповідає найімовірнішій швидкості $\upsilon_{імов}$ при температурі $T = 300$ *К* ($m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг).

Відповідь: $\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ *м*.

Задача 5. Порівняти довжину хвиль де Бройля для електрона і протона, які мають однакову швидкість ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг).

Відповідь: $\lambda_e \big/ \lambda_p = m_p \big/ m_e = 1840$.

Задача 6. Яку прискорюючу різницю потенціалів потрібно пройти електрону, щоб довжина хвилі де Бройля дорівнювала 0,1 нм?

Відповідь: U =150 В.

Задача 7. Яку додаткову енергію потрібно надати електрону, щоб його довжина хвилі де Бройля зменшилась від 100 до 50 пм?

Відповідь: 0,45 кеВ.

Задача 8. Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, кінетична енергія якого дорівнює: 1) 10 кеВ 2) 1 МеВ.

Відповідь: 12,2 пм; 0,87 пм.

Задача 9. Знайти довжину хвилі де Бройля для електронів, які прискорені в електричному полі з різницею потенціалів: 1) 1 В; 2) 100 В.

Відповідь: 1,23 нм; 0,123 нм.

Задача 10. Визначити, при якому чисельному значенні швидкості довжина хвилі де Бройля для електрона дорівнює його комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $2{,}12\cdot10^{8}$ м/с.

Задача 11. Заряджена частинка, що прискорена різницею потенціалів U =500 В, має довжину хвилі де Бройля λ=1,282 нм. Знайдіть масу частинки, якщо її заряд дорівнює заряду електрона. Що це за частинка?

Відповідь: $1{,}672\cdot10^{-27}$ кг.

Задача 12. Визначити довжину хвилі де Бройля для електрона, що знаходиться в атомі водню на третій боровській орбіті.

Відповідь: λ=1 нм.

Задача 13. Визначити довжини хвиль де Бройля електрона, протона та атома урану, що мають однакову кінетичну енергію 100 еВ.

Відповідь: 123 пм, 2,86 пм, 0,186 пм.

Задача 14. Електрон рухається по колу радіусом 0,5 см в однорідному магнітному полі, індукція якого дорівнює 8 мТл. Визначити довжину хвилі де Бройля електрона.

Відповідь: 0,1 нм.

Задача 15. Протон, що рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом 1,4 м, має довжину хвилі де Бройля 0,197 пм. Визначити індукцію магнітного поля.

Відповідь: 15 мТл.

Задача 16. Знайти довжину хвилі де Бройля релятивістських електронів, що підлітають до антикатода рентгенівської трубки, якщо довжина хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра 10 пм.

Відповідь: 3,3 пм.

Задача 17. Визначити за допомогою співвідношення Гейзенберга мінімальну кінетичну енергію електрона, локалізованого в області розміром 0,2 нм.

Відповідь: 1 еВ.

Задача 18. Оцініть найменші помилки, з якими можна визначити швидкість електрона, протона та кульки масою 1 мг, якщо координати частинок та центра кульки встановлені з невизначеністю 1 мкм.

Відповідь: 10^4, 10, 10^{-20} см/с.

Задача 19. Вважаючи, що невизначеність координати частинки, що рухається, дорівнює довжині хвилі де Бройля, визначити відносну невизначеність $\Delta p/p$ імпульсу цієї частинки.

Відповідь: 16%.

Задача 20. Електрон рухається в атомі водню по першій Боровській орбіті. Приймаючи, що невизначеність швидкості складає 10% від її чисельного значення, визначити невизначеність координати електрона.

Відповідь: Δx =3,34 нм.

Задача 21. Пучок електронів виходить з електронної пушки під дією різниці потенціалів U =200 В. Чи можна одночасно визначити траєкторію електрона з точністю до 100 пм та його швидкість з точністю до 10%?

Відповідь: $\Delta p \Delta x = 7{,}64 \cdot 10^{-35}$ Дж $< \hbar$.

Задача 22. Визначити відношення невизначеностей швидкості електрона, якщо його координата визначена з точністю до 10^{-5} м, та частинки масою 10^{-12}кг, якщо її координата визначена з такою ж точністю.

Відповідь: $\Delta\upsilon_e/\Delta\upsilon_ч$ =1,1·10^{18}.

Задача 23. Електронний пучок прискорюється в електронно-променевій трубці різницею потенціалів U =1 кВ. Відомо, що невизначеність швидкості складає 0,1% від її чисельного значення. Визначити невизначеність координати електрона.

Відповідь: Δx =6,17 нм.

Задача 24. Використовуючи співвідношення невизначеностей Гейзенберга, визначити мінімальну кінетичну енергію електрона, який локалізований у просторі з розмірами: 1) $d \approx 10^{-10}$ м (атом); 2) $d \approx 10^{-15}$ м (атомне ядро).

Відповідь: $T_{\min} \approx 4$ еВ; $T_{\min} \approx 0{,}2$ ГеВ.

Задача 25. Електрон локалізований у просторі з розміром 10 мкм. Середнє значення його кінетичної енергії дорівнює 4 еВ. За допомогою співвідношення Гейзенберга визначити: 1) відносну невизначеність $\Delta\upsilon/\upsilon$ швидкості електрона; 2) невизначеність його кінетичної енергії T.

Відповідь: 10^{-4}; 0,4 МеВ.

Задача 26. Знайдіть залежність між довжиною хвилі де Бройля релятивістської частинки та її кінетичною енергією T.

Відповідь: $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$.

Задача 27. На грань певного кристалу під кутом 60° до її поверхні падає паралельний потік електронів, що рухаються з однаковою швидкістю. Визначити швидкість електронів, якщо вони зазнають інтерференційне відбиття першого порядку. Відстань між атомними площинами кристалу 0,2 нм.

Відповідь: 2,1 Мм/с.

Задача 28. Пучок електронів, які рухаються із однаковою швидкістю 1 Мм/с, потрапляє на діафрагму зі щілиною завширшки 1 мкм. Внаслідок руху електронів крізь щілину на екрані, який розташований на відстані 50 см від неї, з'являється дифракційна картина. Знайти відстань між першими дифракційними мінімумами.

Відповідь: 1,1 мм.

Задача 29. Паралельний пучок електронів потрапляє на діафрагму зі щілиною завширшки 1 мкм. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, що знаходиться на відстані 50 см від щілини, ширина дифракційного максимуму дорівнює 0,36 мм.

Відповідь: $2\cdot10^6$ м/с.

Задача 30. Паралельний потік електронів, прискорених різницею потенціалів 25 В, падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, відстань між якими 50 мкм. Визначити відстань між сусідніми максимумами інтерференційної картини на екрані, розташованому на відстані 100 см від щілин.

Відповідь: 4,9 мкм.

9 ХВИЛЬОВА ФУНКЦІЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

9.1 Мета заняття

Ознайомитись з рівнянням Шредінгера, усвідомити фізичний зміст хвильової функції. Навчитися розв'язувати прості задачі квантової механіки.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 3.2-3.3; 4, § 21-27, розд. 11.4-11.11]. З'ясувати, що у квантовій механіці стан мікрочастинки описується хвильовою функцією, фізичний зміст якої пов'язаний з імовірністю виявлення мікрочастинки, яку вона описує, у певному місці простору і у певний момент. Звернути увагу на те, що Ψ-функція може бути знайдена під час розв'язання рівняння Шредінгера. Відповісти на контрольні запитання, проаналізувати розв'язання задач, наведених, як приклади.

9.3 Основні закони і формули

1. Загальне рівняння Шредінгера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа,

Ψ – хвильова функція, яка описує стан частинки;
E – повна енергія;
U – потенціальна енергія частинки;
m – маса частинки;
$\hbar$ – стала Планка;
i – уявна одиниця.

2. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

3. Густина імовірності

$$dP/dV = |\psi|^2,$$

де dP – імовірність того, що частинка знаходиться у межах об'єму dV.

4. Імовірність знаходження частинки в об'ємі V.

$$P = \int_V dP = \int_V |\psi|^2 dV = \int_V \psi\psi^* dV,$$

де ψ^* – комплексно спряжена хвильова функція.

5. Умова нормування хвильової функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dV = 1 .$$

6. Коефіцієнт прозорості прямокутного потенціального бар'єра

$$D \approx \exp\left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right],$$

де U_0 – висота потенціального бар'єра,

E – енергія частинки,

l – висота потенціального бар'єра.

9.4 Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте рівняння Шредінгера у загальному вигляді і дайте визначення основних параметрів.
2. Сформулюйте стаціонарне рівняння Шредінгера і дайте визначення основних параметрів.
3. У чому полягає фізичний зміст ψ-функції?
4. Від чого залежить ймовірність виявлення частинки у даній точці простору?
5. Які умови має задовольняти ψ-функція?
6. Запишіть вираз для ψ-функції у загальному вигляді.
7. Запишіть умову нормування хвильової функції.
8. У чому полягає явище тунельного ефекту?
9. За допомогою яких фізичних характеристик описують проходження частинки крізь потенціальний бар'єр?
10. Чому дорівнює коефіцієнт прозорості прямокутного потенціального бар'єра?

9.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Протон знаходиться у нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною $l = 1$ Å у збудженому стані ($n = 5$). Знайти: 1) різницю енергій між рівнями $n = 6$ і $n = 5$; 2) нормувальний коефіцієнт хвильової функції, яка описує стан протона у потенціальній ямі.

Дані: $l = 1$ Å$=10^{-10}$ м,

$m_p = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг,

$n_1 = 5$, $n_2 = 6$.

ΔE – ? A – ?

Аналіз і розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 . \qquad (9.1)$$

У випадку одновимірної нескінченно глибокої потенціальної ями, в якій рухається протон, рівняння (9.1) набуває вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi=0. \qquad (9.2)$$

Потенціальна енергія U дорівнює нулю при $0\le x\le l$ і перетворюється у нескінченність при $x<0$ і $x>l$ (рис. 9.1).

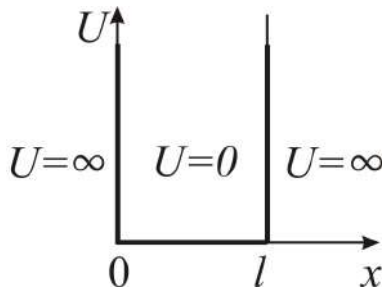


Рисунок 9.1

За межі потенціальної ями протон потрапити не може, тому імовірність виявлення його зовні дорівнює нулю. А з умови безперервності випливає, що хвильова функція ψ має дорівнювати нулю і на межах ями, тобто

$$\psi\left(0\right)=\psi\left(l\right)=0. \qquad (9.3)$$

Всередині ями ($0\le x\le l$, $U=0$) рівняння Шредінгера має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0. \qquad (9.4)$$

Позначимо

$$\frac{2m}{\hbar^2}E=k^2 \qquad (9.5)$$

і запишемо (9.4) у вигляді

$$\psi''+k^2\psi=0. \qquad (9.6)$$

Розв’язком рівняння (9.6) є

$$\psi(x)=A\sin(kx+\alpha). \qquad (9.7)$$

З граничних умов (9.3) знайдемо сталі k і α.

З умови $\psi\left(0\right)=0$ отримаємо

$$\psi\left(0\right)=A\sin\alpha=0,$$

звідки випливає, що $\alpha=0$.

З другої граничної умови $\psi\left(l\right)=0$ маємо

$$\Psi\left(l\right)=A\sin kl=0$$

і знаходимо, що це можливо лише при

$$kl=\pm n\pi \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots). \qquad (9.8)$$

З рівнянь (9.5) і (9.8) знаходимо

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

1. Знайдемо різницю енергії двох сусідніх рівнів із квантовими числами $n=6$ і $n=5$.

$$E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left[(n+1)^2 - n^2\right] = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1).$$

Підставляючи числові значення величин, знаходимо

$$\Delta E_{6,5} = 22{,}25 \text{ (еВ)}.$$

2. Для знаходження нормувального коефіцієнта A підставимо у (9.7) значення k, яке отримуємо з (9.8). У результаті маємо власні функції

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Скористаємось умовою нормування

$$\int\limits_V |\psi|^2\, dV = 1,$$

яку у даному випадку запишемо так

$$A^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = 1. \qquad (9.9)$$

Візьмемо інтеграл у лівій частині рівності (9.9)

$$\int\limits_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int\limits_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l dx - \frac{1}{2}\int\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^l - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_0^l\right] = \frac{1}{2}l. \qquad (9.10)$$

З урахуванням (9.10) умова нормування (9.9) набуває вигляду

$$A^2\frac{l}{2} = 1.$$

Звідки

$$A = \sqrt{2/l}.$$

Для даної ширини ями $l = 1$ Å$=10^{-10}$ м нормувальний коефіцієнт дорівнює

$$A = 1{,}45\cdot 10^5 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

Задача 2. Електрон знаходиться у нескінченно глибокій потенціальній ямі ширини l. Визначити ймовірність того, що електрон, який знаходиться у збудженому стані (n=2), буде виявлений у середній третині ями.

Дані: l, n=2, $l/3 \le x \le 2l/3$,

$P - ?$

Аналіз і розв'язання

Ймовірність того, що частинка буде виявлена у межах інтервалу $x_1 \le x \le x_2$ дорівнює

$$P = \int\limits_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \qquad (9.11)$$

де ψ_n – власна хвильова функція, що відповідає даному стану.

Для електрона у потенціальній ямі ця функція дорівнює

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x .$$

Для збудженого стану (n=2) :

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x \qquad (9.12)$$

Підставивши (9.12) у (9.11), отримаємо

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx . \qquad (9.13)$$

Межі інтегрування для середньої третини потенціальної ями дорівнюють $x_1 = l/3,\ x_2 = 2l/3$.

Підставимо ці межі у (9.13) та зробимо заміну $\sin^2 \frac{2\pi x}{l} = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x)$

$$P = \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi x}{l}\right) dx == \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} dx - \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} \cos \frac{4\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{x}{l} \Bigg|_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{l} x \Bigg|_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 0{,}195$$

Задача 3. Знайти ймовірність проходження мікрочастинки крізь потенціальний бар'єр прямокутної форми (рис. 9.2), якщо потенціальна енергія U_0 менша від повної енергії.

Дані: $U_0 < E$,

$P - ?$

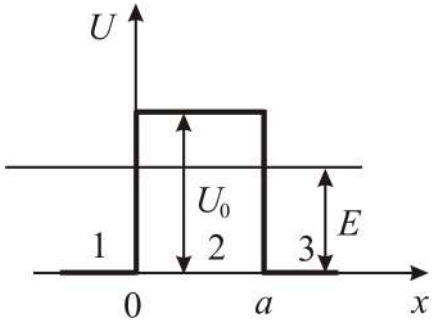


Рисунок 9.2

Аналіз і розв'язання

Для характеристики величини тунельного ефекту введемо коефіцієнт прозорості бар'єра, під яким розумітимемо модуль відношення густини потоку частинок, що пройшли крізь бар'єр, до густини потоку падаючих частинок. Нехай частинка рухається у додатному напрямі осі x. Хвиля де Бройля, яка відповідає руху частинки, пройде крізь нього і поширюватиметься в області $x > a$.

Рівняння Шредінгера у різних областях мають такий вигляд

$$\partial^2\psi_1/\partial x^2 + k_1^2\psi_1 = 0 \text{ – область 1,}$$
$$\partial^2\psi_2/\partial x^2 + k_2^2\psi_2 = 0 \text{ – область 2,}$$
$$\partial^2\psi_3/\partial x^2 + k_3^2\psi_3 = 0 \text{ – область 3,}$$

де $k_1 = k_3 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$.

В областях 1, 2 існує як падаюча, так і відбита хвиля

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \ (x \le 0),$$
$$\psi_2 = A_2 e^{-k_2 x} + B_2 e^{k_2 x} \ (0 \le x \le a).$$

В області 3 є лише хвиля, що рухається у додатному напрямі осі

$$\psi_3 = A_3 e^{ik_3 x} \ (x \ge a).$$

Скориставшись умовами безперервності хвильової функції та її похідної у точках $x = 0$, $x = a$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0),$$
$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0),$$
$$\psi_1(a) = \psi_2(a),$$
$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a),$$

можна знайти такі співвідношення між коефіцієнтами A_1, B_1, A_2, B_2, A_3:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \tag{9.14}$$
$$ik_1(A_1 - B_1) = k_2(B_2 - A_2), \tag{9.15}$$
$$A_2 e^{-k_2 a} + B_2 e^{k_2 a} = A_3 e^{ik_3 a}, \tag{9.16}$$
$$k_2\left(B_2 e^{k_2 a} - A_2 e^{-k_2 a}\right) = ik_3 A_3 e^{ik_3 a}. \tag{9.17}$$

З рівнянь (9.15) та (9.17) випливає, що

$$A_2 = \frac{1 - in}{2} A_3 e^{k_2 a}, \tag{9.18}$$
$$B_2 = \frac{1 + in}{2} A_3 e^{-k_2 a}, \tag{9.19}$$

де $n = k_1/k_2 = \sqrt{E/(U_0 - E)}$.

Оскільки $k_2 a >> 1$, то з (9.18) та (9.19) маємо, що $|A_2| >> |B_2|$. Тому можна вважати $B_2 = 0$.

Розв’язуючи рівняння (9.14) та (9.16), знаходимо

$$A_1 = \frac{1 - in}{2} \cdot \frac{i + n}{2n} A_3 e^{k_2 a},$$
$$B_1 = \frac{1 - in}{2} \cdot \frac{n - i}{2n} A_3 e^{-k_2 a}.$$

звідки коефіцієнт прозорості (дифузії) D матиме такий вигляд

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \approx \frac{16n^2}{\left(1+n^2\right)^2} e^{-2k_2 a}.$$

Введемо величину $D_0 = \frac{16n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$, тоді одержимо

$$D \approx D_0 e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}}.$$

9.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Частинка маси m знаходиться в одновимірній потенціальній ямі шириною l.

1. Запишіть рівняння Шредінгера для частинки для області $(0 \le x \le l)$.

2. Визначіть граничні умови та знайдіть власні значення хвильової функції.

3. Знайдіть нормувальний коефіцієнт для знайдених функцій і покажіть, що він не залежить від номера n.

Відповідь: 1) $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$; 2) $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\psi_n(x) = B\sin\frac{\pi n x}{l}$; 3) $B = \sqrt{2/l}$.

Задача 2. Користуючись рівнянням Шредінгера і функціями, які відповідають власним розв'язкам для частинки в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі, знайти спектр власних значень енергії E_n частинки.

Відповідь: $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$

Задача 3. Користуючись результатами задач № 1 та № 2, відобразити у масштабі графіки E_n, $\psi_n(x)$ та $\psi_n^2(x)$ у залежності від координати x частинки для $n = 1, 2, 3$. Усвідомити залежність кількості вузлів функції $\psi_n(x)$ від номера n.

Задача 4. Хвильова функція частинки має вигляд $\Psi = A\sin\frac{3\pi x}{l}$ і визначена в області $0 \le x \le l$. Знайти нормувальний коефіцієнт A.

Відповідь: $A = \sqrt{2/l}$.

Задача 5. Хвильова функція частинки має вигляд $\Psi(r) = \frac{A}{r}\sin kr$ r k – деяка стала величина. Визначити

нормувальний коефіцієнт A. Хвильова функція визначена лише в області $0 \le r \le R$, де R – радіус цієї області.

Відповідь: $A = 1 \Big/ \sqrt{2\pi\left(R - \frac{1}{2k}\sin 2kR\right)}$.

Задача 6. Хвильова функція частинки масою m для основного стану в одновимірному потенціальному полі $U(x) = kx^2/2$ має вигляд $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, де A – нормувальний коефіцієнт, α – позитивна стала. Знайти за допомогою рівняння Шредінгера сталу α та енергію частинки у цьому стані.

Відповідь: $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$, $E = \frac{\hbar\omega}{2}$, де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Задача 7. Електрон знаходиться в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l. Визначити імовірність виявлення електрона у першій чверті ями, якщо він знаходиться у збудженому стані ($n = 4$).

Відповідь: 0,25.

Задача 8. Визначити імовірність виявлення частинки у лівій третині одновимірної прямокутної нескінченно глибокої потенціальної ями шириною l. Частинка знаходиться в основному стані.

Відповідь: 0,195.

Задача 9. Визначити імовірність виявлення частинки у третій чверті одновимірної прямокутної нескінченно глибокої потенціальної ями шириною l. Частинка знаходиться у збудженому стані ($n = 2$).

Відповідь: 0,25.

Задача 10. Визначити, в яких точках одновимірної прямокутної нескінченно глибокої потенціальної ями шириною l густина імовірності виявлення частинки буде максимальною і мінімальною. Частинка знаходиться у збудженому стані ($n = 4$).

Відповідь: максимуми: $x = 3l/8;\ 5l/8;\ 7l/8$; мінімуми: $x = l/4;\ l/2;\ 3l/4$.

Задача 11. Визначити, у скільки разів зміниться відношення різниці енергій сусідніх енергетичних рівнів до енергії «нижнього» стану $\Delta E_{n-1,n} \big/ E_n$ частинки, яка знаходиться в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l при переході цієї частинки зі стану $n = 4$ у стан $n' = 10$.

Відповідь: зменшиться у 2,68 рази.

Задача 12. Електрон знаходиться у потенціальній ямі шириною l. В яких точках інтервалу $(0 < x < l)$ густина ймовірності знаходження електрона на першому та другому енергетичному рівнях однакова? Визначити густину ймовірності для цих точок.

Відповідь: $x_1 = l/3;\ x_2 = 2l/3;\ |\psi|^2 = 3/2l$.

Задача 13. Частинка у потенціальній ямі шириною l знаходиться в основному стані. Визначте ймовірність знаходження частинки у середній третині ями, у крайній третині.

Відповідь: 0,609; 0,195.

Задача 14. Визначити відношення ймовірностей P_1/P_2 знаходження електрона на першому та другому енергетичних рівнях в інтервалі $l/4$, рівновіддаленому від стінок одновимірної потенціальної ями шириною l.

Відповідь: 5,22.

Задача 15. Протон рухається в одновимірній прямокутній потенціальній ямі нескінченної глибини. Знайти ширину ями, якщо різниця енергій між четвертим і третім станами дорівнює 0,5 еВ.

Відповідь: l=53,3 пм.

Задача 16. Електрон з енергією 5 еВ рухається у додатному напрямку осі x, зустрічаючи на шляху прямокутний бар'єр висотою U=10 еВ та шириною l=0,1 нм. Визначіть коефіцієнт прозорості бар'єра.

Відповідь: D=0,1.

Задача 17. Прямокутний потенціальний бар'єр має ширину l=0,1 нм. Визначіть різницю енергій $U - E$, при якій ймовірність проходження електрона крізь бар'єр складає 0,5.

Відповідь: $U - E$=0,454 еВ.

Задача 18. Протон та електрон пройшли однакову прискорюючу різницю потенціалів 10 кВ. У скільки разів відрізняються коефіцієнти прозорості потенціального бар'єра для електрона та протона? Висота потенціального бар'єра дорівнює 20 кеВ, ширина 0,1 пм.

Відповідь: 74.

Задача 19. Протон з енергією 5 еВ рухається у додатному напрямку осі x, зустрічаючи на шляху прямокутний бар'єр висотою U=10 еВ та шириною l=0,1 нм. Визначіть у скільки разів потрібно звузити бар'єр, щоб ймовірність проходження його протоном була такою ж, як для електрона за тих самих умов?

Відповідь: $l_1/l_2 = 42{,}8$.

Задача 20. Прямокутний потенціальний бар'єр має ширину l=0,1 нм. Різниця між висотою потенціального бар'єра та енергією електрона, що рухається у додатному напрямку осі x $U-E$=5 еВ. Визначіть, як зміниться коефіцієнт прозорості бар'єра , якщо різниця $U-E$ зросте у 4 рази.

Відповідь: $D_1/D_2=10$.

Задача 21. Електрон з енергією 4,9 еВ рухається у додатному напрямку осі *x*. Висота потенціального бар'єра 5 еВ. При якій ширині потенціального бар'єра ймовірність проходження електрона крізь нього буде дорівнювати 0,2?

Відповідь: $4{,}93\cdot10^{-10}$м.

Задача 22. Частинка з енергією $E=10$ еВ рухається у додатному напрямку осі *x*, зустрічаючи на шляху широкий прямокутний бар'єр висотою U=5 еВ. Визначіть коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля на межі потенціального бар'єра.

Відповідь: $n=\lambda_1/\lambda_2=k_1/k_2=\sqrt{(E-U)/E}=0{,}707$.

Задача 23. Енергія електрона 10 еВ. Визначити у скільки разів зміняться його швидкість та довжина хвилі де Бройля при проходженні крізь потенціальний бар'єр (рис. 9.3) висотою U_0=6еВ.

Відповідь: 0,632; 1,58.

Задача 24. Електрон проходить через прямокутний потенціальний бар'єр шириною 0,5 нм. Висота бар'єра U більше енергії електрона E на 1%. Визначити коефіцієнт прозорості бар'єра, якщо енергія електрона 10 еВ, 100 еВ.

Відповідь: 0,2; $6{,}5\cdot10^{-3}$.

Задача 25. Визначіть коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля для протонів на межі потенціального бар'єра (рис. 9.4) Кінетична енергія протонів дорівнює 16 еВ, а висота потенціального бар'єра дорівнює 9 еВ.

Відповідь: $n=\sqrt{1+U_0/E_k}=1{,}25$.

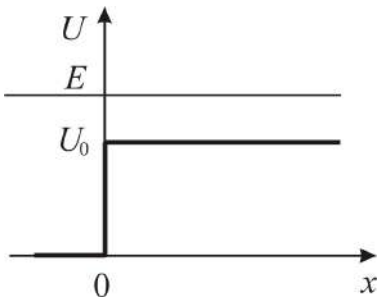


Рисунок 9.3

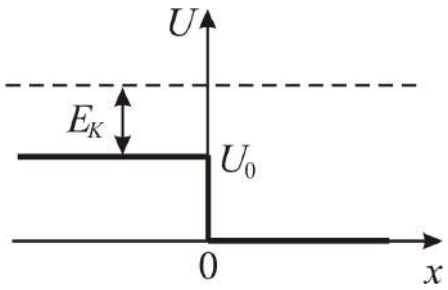


Рисунок 9.4

Задача 26. Визначити ψ-функції і значення енергії частинки маси m, яка знаходиться у двовимірній нескінченній потенціальній ямі, розміри якої $0 \le x \le a$ та $0 \le y \le b$.

Відповідь: $\psi_{n1,n2} = \sqrt{\frac{4}{ab}} \cdot \sin\frac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin\frac{\pi n_2 y}{b}$,

$E_{n1,n2} = \pi^2\hbar^2 / 2m \cdot \left(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2\right)$, $n_1, n_2 = 1,2,...$

Задача 27. Визначити ψ-функції і значення енергії частинки маси m, яка знаходиться у тривимірній глибокій потенціальній ямі, розміри якої $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

Відповідь: $\psi_{n1,n2,n3} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \cdot \sin\frac{\pi n_1 x}{a} \cdot \sin\frac{\pi n_2 y}{b} \cdot \sin\frac{\pi n_3 z}{c}$,

$E_{n1,n2,n3} = \pi^2\hbar^2 / 2m \cdot \left(n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2 + n_3^2/c^2\right)$, $n_1, n_2, n_3 = 1,2,3,...$

Задача 28. Частинка маси m рухається у додатному напрямку осі на потенціальний бар'єр висоти U_0 (рис. 9.3). Енергія частинки дорівнює E ($E > U_0$). Знайти коефіцієнт відбиття R та коефіцієнт прозорості D бар'єра.

Відповідь: $R = \left(k_1 - k_2\right)^2 / \left(k_1 + k_2\right)^2$, $D = 4k_1^2 / \left(k_1 + k_2\right)^2$, $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m\left(E - U_0\right)}/\hbar$.

Задача 29. При якому відношенні висоти потенціального бар'єра U_0 (рис. 9.3) та енергії E електрона, що падає на бар'єр, коефіцієнт відбиття дорівнюватиме 0,5?

Відповідь: 0,97.

Задача 30. Знайти ймовірність проходження електрона з енергією E крізь потенціальний бар'єр (рис. 9.5), якщо ширина основи бар'єра l, а висота U_0.

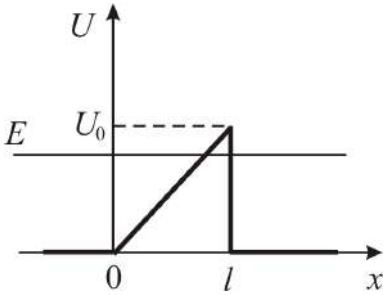


Рисунок 9.5

Відповідь: $P \approx \exp\left(-\frac{4\sqrt{2ml}}{3\hbar U_0}\left(U_0 - E\right)^{3/2}\right)$.

10 АТОМ ВОДНЮ З ТОЧКИ ЗОРУ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ. ПРИНЦИП ПАУЛІ. ЕЛЕКТРОННІ ШАРИ СКЛАДНИХ АТОМІВ

10.1 Мета заняття

Засвоїти основи квантово-механічної теорії атома водню, воднеподібних систем та багато електронних атомів.

10.2 Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Під час вивчення теоретичних положень за конспектом або підручником [2, розд. 6; 4, § 36-37; 5, розд. 12] потрібно звернути увагу на квантовий характер величин, які описують стан електрона в атомі, запам'ятати правила квантування цих величин та можливі значення квантових чисел для електрона та багатоелектронного атома. Після вивчення теорії відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

10.3 Основні закони і формули

1. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню та воднеподібних атомів:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа у декартовій системі координат;

$\psi = \psi(\vec{r})$ – хвильова функція, яка описує стан електрона;

E – повна енергія електрона;

$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ – потенціальна енергія електрона у воднеподібному атомі,

Z – зарядове число,

r – відстань між ядром та електроном,

e – заряд електрона,

m – маса електрона,

$\hbar$ – стала Планка.

2. Рівняння Шредінгера у сферичних координатах

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\cdot\psi = 0,$$

$$\psi = \psi(r,\varphi,\theta).$$

3. Умови нормування хвильової функції $\psi = \psi(\vec{r})$:

$$\int_G \left|\psi(\vec{r})\right|^2 dV = 1,$$

де G – область визначення хвильової функції $\psi = \psi(\vec{r})$,

$dV = dxdydz$ – диференціал об'єму у прямокутній декартовій системі координат, $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ – диференціал об'єму у сферичній системі координат.

4. Середнє значення функції $F(\vec{r})$:

$$\left\langle F \right\rangle = \int_G F(\vec{r}) \left|\psi(\vec{r})\right|^2 dV .$$

5. Квантові числа, що визначають стан електронів в атомі:

1) головне квантове число $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$;

2) орбітальне квантове число $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;

3) магнітне квантове число $m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$;

4) спінове магнітне квантове число $m_s = 1/2, -1/2$.

6. Орбітальний момент імпульсу та магнітний момент електрона:

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

$$\mu_l = \mu_Б \sqrt{l(l+1)},$$

де $\mu_Б$ – магнетон Бора, ($\mu_Б = \dfrac{e\hbar}{2m} = 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл).

7. Проекції орбітального моменту імпульсу та магнітного моменту на напрямок зовнішнього магнітного поля (що співпадає з віссю Oz)

$$L_{lz} = \hbar m_l, \ \mu_{lz} = \mu_Б m_l .$$

8. Спіновий момент імпульсу та магнітний момент електрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

$$\mu_s = 2\mu_Б \sqrt{s(s+1)},$$

де s – спінове квантове число (для електрона $s = 1/2$).

9. Проекції спінового моменту імпульсу та магнітного моменту електрона на напрямок зовнішнього магнітного поля (що співпадає з віссю Oz)

$$L_{sz} = \hbar m_s, \ \mu_{sz} = 2\mu_Б m_s .$$

10. Принцип Паулі: в атомі не може знаходитись два чи більше електрони, що характеризуються однаковим набором квантових чисел n, l, m_l, m_s.

11. Повний орбітальний момент атома

$$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)},$$

де L – повне орбітальне квантове число.

12. Повний спіновий момент атома

$$L_S = \hbar\sqrt{S(S+1)},$$

де S – повне спінове квантове число

13. Повний момент імпульсу атома:

$$L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)},$$

де J – квантове число повного моменту імпульсу,

$J = L+S, L+S-1, \ldots, |L-S|$.

14. Спектральне позначення термів:

$$^{2S+1}L_J,$$

де $2S+1$ – мультиплетність,

L=	0	1	2	3	4	5
	S	P	D	F	G	H

15. Правила відбору для квантових чисел

$$\Delta S = 0;\ \Delta m_S = 0;$$
$$\Delta L = \pm 1;\ \Delta m_L = 0, \pm 1;$$
$$\Delta J = 0, \pm 1;\ \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

10.4 Контрольні запитання та завдання

1. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню.
2. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів атома водню у сферичній системі координат.
3. Якими квантовими числами визначається стан електрона в атомі? Які значення можуть приймати квантові числа?
4. Квантування яких величин описують головне n, орбітальне l, магнітне m_l та спінове m_s квантові числа електрона в атомі?
5. Сформулюйте принцип Паулі.
6. Що таке електронна оболонка, підоболонка атома?
7. Що таке спін електрона?
8. Які формули визначають модуль орбітального, спінового та повного механічного моментів багатоелектронного атома?
9. Чому дорівнюють квантові числа L, S та J для багатоелектронного атома?
10. Як записати спектральний символ терма? Що таке мультиплетність?
11. Що означає виродження стану, як визначати кратність виродження?

10.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Використовуючи принцип Паулі, знайдіть максимальну кількість електронів в атомі, які мають одинакові квантові числа: 1) n, l, m_l, m_s; 2) n, l, m_l; 3) n, l; 4) n.

Дані: n, l, m_l, m_s;

$Z_{\max}$ –?

Аналіз і розв'язання

1. Відповідно до принципу Паулі в одному квантовому стані не може перебувати більше, ніж один електрон. Тому в атомі тільки один електрон має квантові числа n, l, m_l та m_s, $Z_{\max}=1$.

2. Однакові квантові числа n, l, m_l можуть мати електрони, для яких різними будуть квантові числа m_s. Спінове квантове число $m_s=\pm 1/2$, тому у даному випадку $Z_{\max}=2$.

3. Магнітне квантове число m_l дорівнює

$$m_l=-l,-l+1,...,+l,$$

отже разом $(2l+1)$ можливих значень. Крім того, кожний із цих станів електрона може відрізнятись від іншого за спіновим квантовим числом $m_s=\pm 1/2$.

Таким чином, однакові квантові числа n та l є у $Z_{\max}=2(2l+1)$ електронів.

4. У стані з даним квантовим числом n, яке визначає енергію електрона, можуть перебувати електрони, що відрізняються квантовими числами l, m_l, m_s. Орбітальне квантове число дорівнює $l=0,1,2,...,n-1$ (всього n можливих значень). Ці електрони можуть відрізнятись за квантовими числами m_l та m_s – всього $2(2l+1)$ значень.

Отже, максимальна кількість електронів, які мають дане значення головного квантового числа n, дорівнює $Z_{\max}=\sum\limits_{l=0}^{n-1}2(2l+1)=2n^2$.

Задача 2. Визначити хімічні елементи періодичної системи Менделєєва, електрони яких послідовно заповнюють оболонку з головним квантовим числом $n=2$. Записати для них основну електронну конфігурацію.

Дані: $n=2$, x – ?

Аналіз і розв'язання

Головне квантове число $n=2$ мають електрони, що перебувають на L-оболонці атома. Тоді K-оболонка ($n=1$) для хімічних елементів, які визначаємо, є заповненою. Якщо $n=2$, то l може мати максимальне значення $l_{\max}=n-1=1$. Тобто на L-оболонці перебувають s- та p-електрони. Літери s та p позначають стан електрона з $l=0,\ 1$ відповідно. На K-оболонці розташовані два s-електрони.

Перший з хімічних елементів, які ми визначаємо, має у таблиці Менделєєва порядковий номер 3 (це ${}_3Li$). Електронна конфігурація його така: два s-електрони на K-оболонці та один s-електрон на L-оболонці.

Скорочено цю конфігурацію записують так:

$$1s^2 2s\ ({}_3Li).$$

Наступний хімічний елемент – берилій $({}_4Be)$ має два $2s$-електрони, його електронна конфігурація

$$1s^2 2s^2\ ({}_4Be).$$

У бора $\left({}_5B\right)$ починається заповнення p-стану $\left(l=1\right)$. Всього 5 електронів: два s-електрони, для яких $n=1$, два s-електрони з $n=2$, та один p-електрон $\left(l=1\right)$ на енергетичному рівні $n=2$. Електронна конфігурація

$$1s^2 2s^2 2p \ \left({}_5B\right).$$

Наступні хімічні елементи:

$$1s^2 2s^2 2p^2 \left({}_6C\right),$$
$$1s^2 2s^2 2p^3 \left({}_7N\right),$$
$$1s^2 2s^2 2p^4 ({}_8O),$$
$$1s^2 2s^2 2p^5 \left({}_9F\right)$$

Всього на L-оболонці $\left(n=2\right)$ можуть міститися $2n^2$ електронів, тобто два s-електрони та шість p-електронів. Тоді останній з елементів, які визначаємо, має порядковий номер $2+2+6=10$. Це неон ${}_{10}Ne$. УВ нього повністю заповнені K - та L-оболонки:

$$1s^2 2s^2 2p^6 \left({}_{10}Ne\right).$$

Задача 3. Чому дорівнює максимально можливий повний механічний момент L_J атома літію, валентний електрон якого перебуває у стані з $n=3$? Запишіть символ терма відповідного стану.

Дані: $n=3$,

$L_J^{\max} - ?$ æ $X_J - ?$

Аналіз і розв'язання

Якщо $n=3$, то максимально можливе $L=n-1=2$. Один валентний електрон літію розташований на зовнішній електронній оболонці, тому спінове квантове число S визначається спіном цього електрона: $S=1/2$. Тоді максимально можливе значення J складає $J=L+S=5/2$, а механічний момент імпульсу атома дорівнює

$$L_J=\hbar\sqrt{J\left(J+1\right)}=\hbar\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}=\frac{\hbar}{2}\sqrt{35}.$$

Спектральний символ терма запишемо, знаючи квантові числа цього стану: $L=2$. Тоді це D-стан, мультиплетність стану дорівнює æ $=2S+1=2$. Спектральний символ терма ${}^2D_{5/2}$.

10.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Запишіть квантові числа, що визначають зовнішній, або валентний, електрон в основному стані атома натрію.

Відповідь: $n=3$; $l=0$; $m_l=0$; $m_s=\pm 1/2$.

Задача 2. Яку групу електронів в атомі називають оболонкою, підоболонкою? Визначити максимально можливу кількість електронів на оболонці та підоболонці.

Відповідь: Для підоболонки $Z_{\max}=2(2l-1)$; для оболонки $Z_{\max}=2n^2$.

Задача 3. Визначити можливі значення повних механічних моментів електронних оболонок атома у станах ${}^4P$ та ${}^5D$.

Відповідь: $L'_J=\hbar\sqrt{35/4}$; $\hbar\sqrt{15/4}$; $\hbar\sqrt{3/4}$;

$L''_J=\hbar\sqrt{20}$; $\hbar\sqrt{12}$; $\hbar\sqrt{6}$; $\hbar\sqrt{2}$; 0.

Задача 4. Визначити можливу мультиплетність терма $D_{3/2}$.

Відповідь: 2, 4, 6, 8.

Задача 5. Мультиплетність F-стану дорівнює 5. Напишіть терми, які визначають цей стан.

Відповідь: ${}^5F_1$; ${}^5F_2$; ${}^5F_3$; ${}^5F_4$; ${}^5F_5$.

Задача 6. Які з термів ${}^2S_1$; ${}^2P_1$; ${}^3P_{1/2}$; ${}^3P_3$; ${}^5D_0$; ${}^1F_0$; ${}^8F_{13/2}$ записані неправильно?

Відповідь: Перший, другий, третій, четвертий, шостий.

Задача 7. Записати символ терма, що відповідає стану, для якого механічний момент атома дорівнює $L_J=\hbar\sqrt{2}$, магнітний момент – нулю, а спінове квантове число $S=2$.

Відповідь: ${}^5F_1$.

Задача 8. Атом перебуває у стані, мультиплетність якого дорівнює 4, механічний момент $L_J=\hbar\dfrac{\sqrt{63}}{2}$. Які значення може мати квантове число L для цього стану?

Відповідь: $L=2, 3, 4, 5$.

Задача 9. Чому дорівнює повний механічний момент M_J атома, якщо магнітний момент дорівнює нулю, а орбітальне та спінове квантові числа мають значення $L=2$; $S=3/2$.

Відповідь: $L_J=\hbar\sqrt{3/4}$.

Задача 10. Електронна оболонка атома складається з s-, p- та d-електронів. Записати символ терма для стану, в якому атом має мінімальний для даної конфігурації повний механічний момент L_J.

Відповідь: ${}^2P_{1/2}$.

Задача 11. Визначити кратність виродження $3D$-стану атома літія. Який фізичний зміст цієї величини?

Відповідь: 10.

Задача 12. Записати спектральний символ терма, кратність виродження якого дорівнює семи, а квантові числа L та S зв'язані співвідношенням $L = 3S$.

Відповідь: ${}^3F_3$.

Задача 13. У якого елемента заповнені K-, L- та M-оболонки, $4S$-підоболонка та наполовину $4P$-підоболонка?

Відповідь: As.

Задача 14. Визначити, які з переходів заборонено правилами відбору: ${}^2D_{3/2} \to {}^2P_{1/2}$; ${}^2P_1 \to {}^2S_{1/2}$; ${}^3F_3 \to {}^3P_2$; ${}^4F_{7/2} \to {}^4D_{5/2}$.

Відповідь: Другий та третій.

Задача 15. У випадку чотирьох еквівалентних p-електронів принципу Паулі не суперечать терми ${}^1S_0$; ${}^3P_2$; ${}^3P_1$; ${}^3P_0$; ${}^1D_2$. Який з них є основним?

Відповідь: ${}^3P_2$.

Задача 16. D-терм складається з п'яти компонентів. Якою може бути мультиплетність цього терма?

Відповідь: $5, 6, 7, \ldots$.

Задача 17. Чому дорівнює квадрат орбітального моменту імпульсу L^2 електрона у станах $2p$; $3f$?

Відповідь: $L_1^2 = 2\hbar^2$; $L_2^2 = 12\hbar^2$.

Задача 18. Стан атома характеризується квантовими числами L та S, що дорівнюють 3 та 2; $\mathbf{1}$ та $3/2$. Знайти можливі значення квантового числа J.

Відповідь: $J_1 = 1, 2, 3, 4, 5$; $J_2 = 1/2, 3/2, 5/2$.

Задача 19. Зі скількох компонентів складаються терми ${}^1S$; ${}^2S$; ${}^2P$; ${}^4P$; ${}^5D$?

Відповідь: 1) з одного; 2) з одного; 3) з двох; 4) з трьох; 5) з п'яти.

Задача 20. Обчислити повну енергію, орбітальний момент імпульсу та магнітний момент електрона, що знаходиться у $2p$-стані в атомі водню.

Відповідь: –3,4 еВ; $1{,}5\cdot10^{-34}$ Дж·с; $1{,}31\cdot10^{-23}$ Дж/Тл.

Задача 21. Визначити, скільки різних хвильових функцій відповідає головному квантовому числу $n=3$.

Відповідь: 9.

Задача 22. Хвильова функція, що описує $1s$-стан електрона в атомі водню має вигляд $\psi(r)=Ce^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра, a – перший боровський радіус. Визначте нормовану хвильову функцію, що відповідає цьому стану.

Відповідь: $\psi_{100}(r)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$.

Задача 23. Атом перебуває у стані, мультиплетність якого дорівнює трьом, а повний механічний момент $L_J=\hbar\sqrt{6}$. Яким буде квантове число L для цього стану?

Відповідь: $L=3,4,5$.

Задача 24. $1s$-електрон, що поглинув фотон з енергією 12,1 еВ, перейшов у збуджений стан із максимально можливим орбітальним квантовим числом. Визначити зміну моменту імпульсу орбітального руху електрона ΔL_l.

Відповідь: $\Delta L_l=2{,}57\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Задача 25. Заповненій електронній оболонці відповідає головне квантове число $n=3$. Визначити число електронів на цій оболонці, що мають однакові квантові числа : 1) $m_s=-1/2$; 2) $m_l=0$; 3) $m_l=-1$, $m_s=1/2$.

Відповідь: 1) 9; 2) 6; 3) 2.

Задача 26. Певний атом, окрім заповнених оболонок, має три електрони (s-, p-, d-) та перебуває у стані з максимально можливим механічним моментом. Знайти у векторній моделі атома кут між спіновим і повним механічним моментом атома.

Відповідь: $\theta=31^\circ$.

Задача 27. Атом перебуває у стані, для якого спінове квантове число дорівнює $S=1$, а повний механічний момент $L_J=\hbar\sqrt{6}$. Для векторної моделі кут між спіновим та повним механічним моментом дорівнює $\theta=73{,}2^\circ$. Записати спектральний символ терма цього стану.

Відповідь: ${}^3D_2$.

Задача 28. Нормована хвильова функція, що описує $1s$-стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$, де a – перший боровський радіус. Визначте відстань електрона від ядра, на якій він може знаходитись з найбільшою ймовірністю.

Відповідь: $r=a=52{,}9\,\text{пм}$.

Задача 29. Враховуючи, що нормована хвильова функція, яка описує основний стан електрона в атомі водню має вигляд $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$, знайти середню відстань $< r >$ електрона від ядра.

Відповідь: $\langle r\rangle=\frac{3}{2}a$.

Задача 30. Нормована хвильова функція, що описує $1s$-стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$. Визначте середню потенціальну енергію електрона у полі ядра.

Відповідь: $< U >=-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

11 РЕНТГЕНІВСЬКЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ. МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ АТОМІВ

11.1 Мета заняття

Засвоїти закони, яким підпорядковуються основні характеристики гальмівного та характеристичного рентгенівського випромінювання, розглянути магнітні властивості атома. Навчитись розв'язувати задачі на основі цих законів.

11.2 Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Під час підготовки до практичного заняття вивчити теоретичний матеріал за конспектом лекцій або підручником [2, розд. 2.3, 6.6, 7.1; 4, § 8, 33-35, 38]. Рентгенівське випромінювання, що підтверджує квантову природу випромінювання, існує двох видів – гальмівне та характеристичне. Для того, щоб успішно розв'язувати задачі, перш за все потрібно зрозуміти фізичну природу та умови виникнення рентгенівського випромінювання, запам'ятати формулу для короткохвильової межі рентгенівського спектра та вивчити закон Мозлі.

При вивченні магнітних властивостей атома та теорії ефекту Зеємана потрібно звернути особливу увагу на квантову природу величин, які характеризують ці властивості.

Після теоретичної підготовки потрібно відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

11.3 Основні закони і формули

1. Короткохвильова межа $\lambda_{\min}$ суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{|e|U} = \frac{hc}{E_{\max}},$$

де e – заряд електрона,
U – різниця потенціалів, яка прикладена до рентгенівської трубки,
h – стала Планка,
c – швидкість світла,
$E_{\max}$ – максимальна кінетична енергія електронів.

2. Закон Мозлі у загальному випадку

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)^2,$$

де ω – частота ліній рентгенівського спектра,
Z – атомний номер елемента, який випромінює цей спектр,
σ – стала екранування,
C – стала.

3. Закон Мозлі для K_α – ліній:

$$\omega_{K_\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}(Z-1)^2 R,$$

або $$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}=\frac{3}{4}(Z-1)^2 R',$$

де $R = 2{,}07\cdot10^{16}$ с$^{-1}$ $R' = 1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$– стала Ридберга.

4. Магнітний момент атома

$$\mu_J = g\mu_Б\sqrt{J(J+1)},$$

де $\mu_Б$ – магнетон Бора,

g – множник (або фактор) Ланде.

5. Множник (або фактор) Ланде

$$g = 1+\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)},$$

де J – квантове число повного моменту імпульсу,
($J = L+S, L+S-1,\ldots,|L-S|$);

S – повне спінове квантове число;

L – повне орбітальне квантове число.

6. Проекція магнітного моменту атома на напрямок зовнішнього магнітного поля

$$\mu_{Jz} = g\mu_Б m_J,$$

де m_J – повне магнітне квантове число ($m_J = -J, -J+1, ..., J-1, J$).

7. Сила, що діє на атом у неоднорідному магнітному полі

$$F_z = \frac{\partial B}{\partial z}\mu_{Jz},$$

де $\partial B/\partial z$ – градієнт магнітної індукції.

8. Енергія атома у магнітному полі з індукцією B

$$E = -\mu_{Jz}B.$$

9. Частота ларморової прецесії

$$\omega_L = \frac{eB}{2m},$$

де m – маса електрона,

B – індукція магнітного поля.

10. Величина розщеплення спектральної лінії при ефекті Зеємана

а) аномальному

$$\Delta\omega = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\omega_L,$$

де m_i, g_i – магнітні квантові числа та множники Ланде термів, між якими відбувається перехід.

б) нормальному

$$\Delta\omega = 0,\ \pm\omega_L.$$

11. Правила відбору для квантових чисел

$$\Delta S = 0;\ \Delta m_S = 0;$$
$$\Delta L = \pm 1;\ \Delta m_L = 0, \pm 1;$$
$$\Delta J = 0, \pm 1;\ \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

11.4 Контрольні запитання та завдання

1. Яке рентгенівське випромінювання називається гальмівним? Сформулюйте умови його виникнення.
2. Яке рентгенівське випромінювання називається характеристичним? Сформулюйте умови його виникнення.
3. Сформулюйте закон Мозлі.
4. Чому дорівнює магнітний момент електрона? Які квантові числа визначають цю величину?
5. Як визначити магнітний момент багатоелектронного атома?
6. Чому дорівнює фактор Ланде?
7. Чому дорівнює проекція магнітного моменту атома на напрямок зовнішнього магнітного поля?
8. Які значення може мати квантове число m_J, що визначає проекцію магнітного моменту атома на вісь Oz?
9. Чому дорівнює сила, яка діє на атом у магнітному полі?
10. Як визначити зміщення спектральних ліній у випадку нормального ефекту Зеємана?
11. Яка формула визначає зміщення спектральних ліній для аномального ефекту Зеємана?
12. Сформулюйте правила відбору для квантових чисел.

11.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Яку напругу прикладено до рентгенівської трубки з нікелевим антикатодом, якщо різниця довжини хвиль K_α-лінії та короткохвильової межі суцільного спектра дорівнює 84 пм?

Дані: $\Delta\lambda = 84\,\text{пм} = 84 \cdot 10^{-12}$ м; $Z = 28$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·С; $R' = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$;

$U - ?$

Аналіз і розв'язання

Гальмівне рентгенівське випромінювання виникає внаслідок гальмування електронів антикатодом. Тому енергія рентгенівського фотона не може бути більшою за енергію електрона $h\nu \le eU$, або $h\dfrac{c}{\lambda} \le eU$.

Внаслідок цього найменша довжина хвилі рентгенівського випромінювання (короткохвильова межа гальмівного рентгенівського випромінювання) дорівнює:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}. \tag{11.1}$$

Запишемо закон Мозлі для частоти K_α-ліній характеристичного рентгенівського випромінювання:

$$\omega_{k\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

Звідси знайдемо довжину хвилі K_α-лінії:

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R'(Z-1)^2. \tag{11.2}$$

Тут Z – порядковий номер елемента, який випромінює характеристичне рентгенівське випромінювання (у даній задачі це нікель).

Використовуючи (11.1) та (11.2), запишемо

$$\Delta\lambda = \lambda_{K_\alpha} - \lambda_{\min} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \frac{hc}{eU},$$

$$\frac{4}{3R'(Z-1)^2} - \Delta\lambda = \frac{hc}{eU},$$

$$U = \frac{hc}{e\left(\dfrac{4}{3R'(z-1)^2} - \Delta\lambda\right)} = 1{,}5\cdot 10^4\,(\text{В}).$$

Задача 2. Найменша напруга на рентгенівській трубці, при якій з'являються K_α-лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання, дорівнює $U_{\min} = 8$ кВ. Визначити, з якого матеріалу виготовлений антикатод цієї трубки. Обчислити частоту ν та енергію фотона, який належить до K_α-лінії у спектрі характеристичного випромінювання матеріалу антикатода.

Дані: $U_{\min} = 8$ кВ $= 8\cdot 10^3$ В; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл; $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}$ Дж·с;

Z–? ν–? ε–?

Аналіз і розв'язання

Рентгенівське випромінювання з'являється при бомбардуванні антикатода трубки електронами, які випромінюються катодом, за рахунок енергії, що губиться при гальмуванні електроном. Величина кванта $\hbar\omega$ не може перебільшувати енергію електрона. Тому квант випромінювання з'явиться тоді, коли його енергія дорівнюватиме мінімальній енергії електрона, який бомбардує антикатод.

Отже,

$$\hbar\omega = eU_{\min},$$

де e – заряд електрона.

Звідси

$$U_{\min} = \frac{\hbar\omega}{e}. \qquad (11.3)$$

Якщо енергія електрона достатня, щоб проникнути у глибину електронної оболонки атома, то він здатний вибити електрони, які належать електронним шарам атома. При цьому на фоні суцільного рентгенівського спектра з'являються лінії характеристичного випромінювання.

Частота лінії K_α-серії підпорядковується закону Мозлі

$$\omega_{K_\alpha} = \frac{3}{4}R(Z-1)^2, \qquad (11.4)$$

де $R = 2{,}07 \cdot 10^{16}\ \text{с}^{-1}$ – стала Ридберга, Z – атомний номер елемента, який випромінює цей спектр.

Якщо підставити в (11.3) частоту K_α-серії (11.4), отримаємо:

$$U_{\min} = \frac{3\hbar}{4e}R(Z-1)^2.$$

Звідси отримаємо

$$Z = 1 + 2\sqrt{\frac{eU_{\min}}{3\hbar R}}. \qquad (11.5)$$

Підставляючи числові значення величин у формулу (11.5), знаходимо, що $Z = 29$. Отже, матеріалом антикатода є мідь.

Енергію фотона знайдемо за формулою

$$\varepsilon_{K_\alpha} = \hbar\omega = \frac{3}{4}\hbar R(Z-1)^2. \qquad (11.6)$$

Якщо підставити до (11.6) числові значення величин, маємо

$$\varepsilon_{K_\alpha} = 8{,}01 \text{ (кеВ)}.$$

Частота фотона $\nu = \varepsilon/h$, де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Розрахунок дає ν=19,3 (фГц).

Задача 3. Валентний електрон атома натрію перебуває у стані, що характеризується головним квантовим числом $n = 4$. Інші квантові числа такі, що атом має найбільший із можливих механічний момент L_J. Визначити магнітний момент μ_J атома у цьому стані.

Дані: $n = 4$; $\mu_Б = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл;

$\mu_J - ?$

Аналіз і розв'язання

Магнітний момент атома дорівнює

$$\mu_J = g\mu_Б\sqrt{J(J+1)},$$

де $\mu_Б = \frac{e\hbar}{2m}$ – магнетон Бора,

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$ – фактор Ланде,

$$J = L + S, L + S - 1, ..., |L - S| \ .$$

Для того, щоб визначити μ, необхідно знати, чому дорівнюють квантові числа J, L та S. Знайдемо ці квантові числа, користуючись умовою задачі. Механічний момент атома дорівнює $L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$.

Найбільшим він буде тоді, коли J має найбільше можливе значення, тобто $J = L + S$.

Для даної задачі найбільшим буде $L = 3$, тому що $n = 4$ за умовою. Для атомів натрію (та інших лужних металів) квантове число S співпадає зі спіновим числом валентного електрона на зовнішній електронній оболонці $S = 1/2$. Тоді $J = L + S = 7/2$, а $g = 8/7$.

Знаходимо магнітний момент атома.

$$\mu_J = \frac{7}{8}\mu_Б\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}} = \frac{4}{7}\sqrt{63}\mu_Б .$$

Задача 4. Вузький пучок атомів ванадію в основному стані $^4F_{3/2}$ пропускають по методу Штерна та Герлаха через поперечне неоднорідне магнітне поле довжиною $l_1 = 5{,}0$ см. Розщеплення пучка спостерігають на екрані, який знаходиться на відстані $l_2 = 15$ см від магніту. Кінетична енергія атомів $T = 22$ МеВ. Чому дорівнює градієнт індукції магнітного поля, якщо відстань між крайніми компонентами розщепленого пучка на екрані дорівнює $x = 2{,}0$ мм?

Дані: $l_1 = 5\,\text{см} = 5\cdot10^{-2}$ м; $l_2 = 15\,\text{см} = 15\cdot10^{-2}$ м; $T = 22\,\text{МеВ} = 3{,}52\cdot10^{-13}$ Дж; $\mu_Б = 9{,}27\cdot10^{-24}$ Дж/Тл; $x = 2{,}0\,\text{мм} = 2{,}0\cdot10^{-3}$ м;

$\partial B/\partial x$ – ?

Аналіз і розв'язання

Атоми ванадію перебувають у стані $^4F_{3/2}$. Цьому стану відповідають квантові числа $L = 3$; $J = 3/2$.

Квантове число S знайдемо зі співвідношення $2S + 1 = 4$:

$$S = 3/2$$

Якщо атом рухається у неоднорідному магнітному полі, то на нього діє сила

$$F_x = \frac{\partial B}{\partial x}\mu_{JZ} = \frac{\partial B}{\partial x} g\mu_Б m_J, \qquad (11.7)$$

де $m_J = J, J-1, ..., -J$ – повне магнітне квантове число; g – фактор Ланде.

Якщо $J = 3/2$, то m_J дорівнює $3/2$; $1/2$; $-1/2$; $-3/2$.

Відповідно до цього пучок атомів ванадію у неоднорідному магнітному полі розщеплюється на чотири компоненти. Для крайніх компонент розщепленого пучка $m_J = 3/2;\ -3/2$; або $|m_J| = J$.

Із формули (11.7) можна знайти градієнт індукції магнітного поля $\partial B/\partial x$, для цього потрібно знати F_x. Розглянемо рух атомів у системі координат xOy. Вісь Oy напрямлена перпендикулярно до екрана, а вісь Ox – паралельно до екрана, на якому спостерігають розщеплення пучка (рис. 11.1). У напрямі осі Ox на атоми діє сила F_x, тому атоми рухаються з прискоренням $a_x = F_x/m$, а проекція швидкості атомів υ_x змінюється від 0 до $\upsilon_x = a_x t_1$, де t_1 – час руху атомів у магнітному полі. Проекція швидкості υ_y залишається сталою під час руху атомів у магнітному полі та дорівнює $\upsilon_y = \sqrt{2T/m}$ (T – кінетична енергія атомів). Зміщення атомів у магнітному полі можна знайти з формули

$$x_1 = \frac{a_x t_1^2}{2}, \tag{11.8}$$

де $t_1 = \dfrac{l_1}{\upsilon_y};\ a_x = \dfrac{F_x}{m}$.

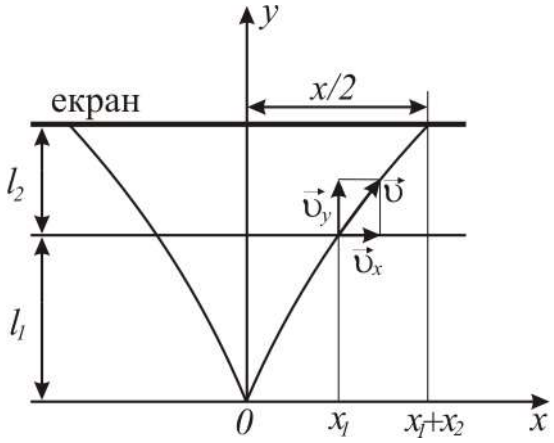


Рисунок 11.1

Використовуючи формули (11.7) та (11.8), визначимо

$$x_1 = \frac{F_x}{2m} t_1^2 = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{g\mu_Б J}{2m} \cdot \frac{l_1^2 m}{2T} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{g\mu_Б}{4T} l_1^2 J.$$

Після вильоту з області неоднорідного магнітного поля атоми рухаються зі сталою швидкістю υ, проекції якої дорівнюють $\upsilon_x = a_x t_1,\ \upsilon_y = \sqrt{2T/m} = l_1/t_1$. Якщо t_2 – час руху атомів до екрана після вильоту з магнітного поля, а x_2 – зміщення атомів за цей час, то

$$l_2 = \upsilon_y t_2,$$

$$x_2 = \upsilon_x t_2 = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} l_2 = \frac{a_x t_1^2 l_2}{l_1} = 2x_l \frac{l_2}{l_1}.$$

З рис. 11.1 зрозуміло, що $x/2 = x_1 + x_2$, тому

$$x = 2(x_1 + 2x_1 \frac{l_2}{l_1}),$$

$$x = \frac{(l_1 + 2l_2) g\mu_Б J l_1}{2T} \cdot \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{2Tx}{g\mu_Б J l_1 (l_1 + 2l_2)} \approx 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ (Тл/м)}.$$

Задача 5. Нарисуйте схему можливих переходів між термами $^2P_{3/2}$ та $^2S_{1/2}$ у слабкому магнітному полі.

Дані: $^2P_{3/2}$; $^2S_{1/2}$.

Аналіз і розв'язання

Квантове число, яке визначає проекцію магнітного моменту атома на напрям магнітного поля, дорівнює $m_J = J, J-1, ..., -J$ – (всього $2J+1$ можливих значень). Тому у магнітному полі енергетичні рівні атома розщеплюються на $2J+1$ рівні. Так терм $^2P_{3/2}$ $(J_1 = 3/2)$ розщепиться на 4 рівні, що відповідають значенням $m_J = 3/2;\ 1/2;\ -1/2;\ -3/2$. Терм $^2S_{1/2}$ $(J_1 = 1/2)$ розщепиться на 2 рівня, що відповідають значенням $m_J = 1/2;\ -1/2$.

Схему можливих шести переходів між рівнями зображено на рис. 11.2. Тут враховано, що правила відбору дозволяють переходи між станами, для яких $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

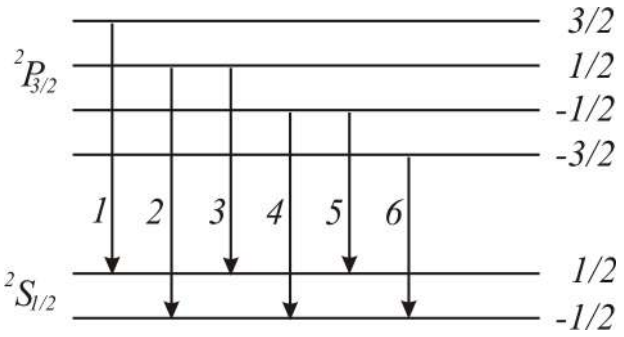


Рисунок 11.2

11.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти максимальну швидкість електронів, що долітають до антикатода рентгенівської труби, якщо короткохвильова межа рентгенівського спектра 2 нм.

Відповідь: $\upsilon = 1{,}48 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 2. Визначити зміну довжини хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра при зміні напруги на трубці від 16 до 24 кВ, а також відносну зміну довжини хвилі.

Відповідь: $\Delta\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; $\Delta\lambda/\lambda_1 = 33\%$.

Задача 3. Визначити довжину хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра, якщо при збільшенні напруги на рентгенівській трубці у два рази вона зменшилась на 50 пм.

Відповідь: 100 пм.

Задача 4. Знайти довжину хвилі короткохвильової межі рентгенівського спектра, а також прискорюючу різницю потенціалів, якщо швидкість електронів, які підлітають до антикатода, становить $0{,}3\ c$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 1{,}24 \cdot 10^{-11}$ м; $U = 100$ кВ.

Задача 5. У рентгенівській трубці антикатод зроблений з ніобію ${}_{41}Nb$. Визначити довжину хвилі та енергію кванта для K_α-лінії. При якій найменшій різниці потенціалів збуджується K-серія?

Відповідь: $\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; $E = 16{,}25$ кеВ; $U = 16$ кВ.

Задача 6. При дослідженні лінійчатого рентгенівського спектра деякого елемента було знайдено, що довжина хвилі K_α-лінії становить 22 пм. Який це елемент?

Відповідь: $Z = 74$, вольфрам.

Задача 7. В атомі вольфраму ($Z = 74$) електрон перейшов з M-шару на L-шар. Приймаючи сталу екранування $\sigma = 5{,}5$, визначити довжину хвилі фотона, що випромінюється.

Відповідь: 0,14 нм.

Задача 8. Визначити довжину хвилі K_α та K_β-лінії характеристичного рентгенівського спектра, одержаного у трубці з молібденовим антикатодом $(Z = 42)$. Чи можна спостерігати ці лінії при напрузі 12 кВ?

Відповідь: $\lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-11}$ м; $\lambda_\beta = 6{,}1 \cdot 10^{-11}$ м; неможливо.

Задача 9. Довжина хвилі лінії L_α у вольфраму $(Z = 74)$ дорівнює 0,1476 нм, а свинцю $(Z = 82)$ 0,1175 нм. Виходячи з цих даних, знайти значення констант C та σ у законі Мозлі: $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$.

Відповідь: $C = 5{,}398 \cdot 10^7\ c^{-1/2}\,\text{с}^{-1/2}$; $\sigma = 7{,}8$.

Задача 10. За допомогою закону Мозлі:

1) визначити довжину хвилі та енергію кванта, що відповідає K_α -лінії срібла;

2) визначити яким елементам належать наступні K_α-лінії: 193,5; 178,7; 165,6; 143,4 пм.

Відповідь: 1) 57,5 пм; 2) залізо, кобальт, нікель, цинк.

Задача 11. Мінімальна довжина рентгенівських променів, отриманих за допомогою трубки, що працює при напрузі U=60 кВ, дорівнює 20,7 пм. Визначити за цими даними сталу Планка.

Відповідь: $6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Задача 12. Визначити сталу екранування для L-серії рентгенівського випромінювання, якщо при переході електрона в атомі вольфраму з M-оболонки на L-оболонку довжина хвилі фотона, що випромінюється, складає 140 пм.

Відповідь: 5,63.

Задача 13. Визначити фактор Ланде для атомів з одним валентним електроном у станах S та P.

Відповідь: $g_1 = 2$; $g_2 = 2/3$; $3/4$.

Задача 14. Визначити в магнетонах Бора магнітний момент атома у 1) ^1F -стані; 2) в стані $^2D_{3/2}$.

Відповідь: 1) $\sqrt{12}\mu_Б$; 2) $\sqrt{3/5}\mu_Б$.

Задача 15. Визначити спіновий момент атома у стані D_2, якщо максимальне значення проекції магнітного моменту дорівнює чотирьом магнетонам Бора.

Відповідь: $L_S = 2\sqrt{3}\hbar$.

Задача 16. Атом вуглецю з електронною конфігурацією $1s^2 2s^2 2p3d$ має максимально можливий повний механічний момент. Чому дорівнює (у магнетонах Бора) магнітний момент атома у цьому стані?

Відповідь: $\mu = (\mu_Б/2)\sqrt{125}$.

Задача 17. Знайти три найпростіші терми, для яких множник Ланде $g = 0$.

Відповідь: $^4D_{1/2}$; $^5F_1$; $^7H_2$.

Задача 18. На скільки компонентів розщепиться у досліді, аналогічному досліду Штерна та Герлаха, пучок атомів, які перебувають у стані: $^2P_{3/2}$; $^3D_1$; $^7H_1$.

Відповідь: $N = 4; 3; 9$.

Задача 19. Максимальне значення проекції магнітного моменту атома, що перебуває у стані D_2, дорівнює чотирьом магнетонам Бора. Визначити мультиплетність цього терма.

Відповідь: æ = 7.

Задача 20. Атом знаходиться у магнітному полі з індукцією $B = 1{,}00$ Тл. Знайти повне розщеплення ΔE термів ${}^1S$, ${}^1P$, ${}^1D_{5/2}$.

Відповідь: $\Delta E = 0$ еВ; $1{,}16 \cdot 10^{-4}$ еВ; $3{,}48 \cdot 10^{-4}$ еВ.

Задача 21. Знайти числове значення нормального (лоренцевого) зміщення (при простому ефекті Зеємана) $\Delta\omega_0$, що відповідає $B = 1{,}00$ Тл.

Відповідь: $\Delta\omega_0 = 0{,}879 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$.

Задача 22. Побудувати схему можливих енергетичних переходів у магнітному полі між станами атома, що визначаються такими термами: 1) ${}^2P_{1/2} \to {}^2S$; 2) ${}^2P_{3/2} \to {}^2S$; 3) ${}^2D_{3/2} \to {}^2P_{3/2}$.

Задача 23. Який ефект Зеємана (простий чи складний) спостерігають при розщепленні у слабкому магнітному полі спектральної лінії, відповідної переходу: ${}^1P_1 \to {}^1S_0$; ${}^1P \to {}^1S_0$; ${}^2P_{3/2} \to {}^2S_{3/2}$?

Відповідь: Простий; складний; складний.

Задача 24. Навести схему можливих переходів у магнітному полі між станами ${}^1P \to {}^1S_0$ та ${}^1F \to {}^1D$. Скільки компонентів має спектральна лінія, яка відповідає кожному з цих переходів?

Відповідь: В обох випадках три компоненти.

Задача 25. Визначити можливі значення квантового числа m_J та зобразити на схемі розщеплення енергетичних рівнів атома у магнітному полі для станів: 1) ${}^2S$, 2) ${}^2P_{3/2}$, 3) ${}^2D_{5/2}$, 4) ${}^1F$.

Відповідь: 1) $-1/2, 1/2$, 2) $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$,
3) $-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$, 4) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Задача 26. Визначити кінетичну енергію електронів, що вириваються з K-оболонки атомів молібдену K_α-випромінюванням срібла. Сталу σ у законі Мозлі вважати рівною одиниці.

Відповідь: 1,54 кеВ.

Задача 27. Атом водню у нормальному стані знаходиться на відстані $r = 2{,}5$ см від довгого прямого провідника зі струмом $I = 10$ А. Знайти силу, що діє на атом.

Відповідь: $F = 3 \cdot 10^{-26}$ Н.

Задача 28. Інтервал між крайніми компонентами спектральної лінії $\lambda = 525$ нм при простому ефекті Зеємана дорівнює $\Delta\lambda = 22$ пм. Знайти інтервал (в електронвольтах) між сусідніми рівнями зеєманівського розщеплення відповідних термів.

Відповідь: $\Delta E = \dfrac{\pi c \hbar \Delta\lambda}{\lambda^2} = 5 \cdot 10^{-5}$ еВ.

Задача 29. Вузький пучок атомарного водню пропускається у досліді Штерна та Герлаха через поперечне неоднорідне магнітне поле $\partial B/\partial z$=2кТл/м. Всі атоми водню знаходяться в основному стані, довжина шляху атомів у магнітному полі 8 см, швидкість 4 км/с. Визначити відстань між компонентами розщепленого пучка атомів на виході з магнітного поля.

Відповідь: 4,46 мм.

Задача 30. Вузький пучок атомів рубідію в основному стані пропускається через поперечне неоднорідне магнітне поле довжиною 10 см. На екрані, який розташовано на відстані 10 см від магніту, спостерігають розщеплення пучка на два компоненти. Визначте силу, що діє на атоми рубідію, якщо відстань між компонентами розщепленого пучка на екрані дорівнює 4 мм, а швидкість атомів складає 0,5 км/с.

Відповідь: $2{,}86 \cdot 10^{-21}$Н.

12 БУДОВА АТОМНИХ ЯДЕР. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ. РАДІОАКТИВНІСТЬ

12.1 Мета заняття

Навчитися розв'язувати задачі, користуючись основними законами ядерної фізики, записувати схеми радіоактивного перетворення одних атомних ядер в інші при всіх видах розпаду і рівняння ядерних реакцій.

12.2 Методичні вказівки щодо організації самостійної роботи студентів

Вивчити відповідний теоретичний матеріал за конспектом лекцій та підручником [2, розд. 10, 11; 4, § 66-73; 5, розд. 14], звернути особливу увагу на засвоєння основних понять фізики атомного ядра – зарядового числа та масового числа, поняття дефекта маси, енергії зв'язку, основних характеристик радіоактивної речовини – сталої радіоактивного розпаду, періоду піврозпаду, часу життя радіоактивного ядра, активності препарату. Розібратися в усіх радіоактивних процесах (α -розпад, β -розпад, γ -випромінювання, спонтанний поділ важких ядер, протонна радіоактивність). Засвоїти закон радіоактивного розпаду.

Відповісти на контрольні запитання, ретельно розібрати розв'язання задач, що наведені у прикладах.

12.3 Основні закони і формули

1. Ядра атомів складаються з протонів та нейтронів. Загальна назва протона й нейтрона – нуклон. Нейтральний атом та його ядра позначаються одним і тим же символом:

$$ {}^{A}_{Z}X , $$

де X – символ хімічного елемента; Z – атомний номер (кількість протонів у ядрі); A – масове число (кількість нуклонів у ядрі). Кількість N нейтронів у ядрі дорівнює різниці $A–Z$.

2. Згідно з релятивістською механікою, маса спокою m стійкої системи взаємопов'язаних частинок менша за суму мас спокою $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ тих же частинок, взятих у вільному стані. Різниця:

$$ \Delta m = (m_1 + m_2 + \ldots + m_k) - m $$

називається дефектом маси системи частинок.

3. Енергія зв'язку прямо пропорційна дефекту маси системи частинок:

$$ E_{зв} = c^2 \Delta m , $$

де c – швидкість світла у вакуумі ($c^2 = 8{,}987 \cdot 10^{16}$ м^2/с^2=$8{,}989 \cdot 10^{16}$ Дж/кг).

Якщо енергія виражена у мегаелектронвольтах, а маса в атомних одиницях маси, то $c^2 = 931{,}4$ МеВ/а.о.м.

4. Дефект маси Δm атомного ядра є різницею між сумою мас вільних протонів та нейтронів та масою ядра, що з них утворилося:

$$\Delta m = \left(Zm_p + Nm_н \right) - m_я ,$$

де Z – кількість протонів у ядрі, N – кількість нейтронів ($N = A - Z$), m_p та m_n – маси вільних протона та нейтрона відповідно, $m_я$ – маса ядра.

Якщо врахувати, що $m_я = m_a - Zm_e$; $m_p + m_e = m_{{}^1_1H}$, де m_a, m_e, $m_{{}^1_1H}$ – маса атома, електрона та атома водню відповідно, а A – масове число (кількість нуклонів в ядрі), то дефект маси можна записати у вигляді

$$\Delta m = Zm_{{}^1_1H} + \left(A - Z \right) m_н - m_a .$$

5. Питома енергія зв'язку (енергія зв'язку на один нуклон):

$$E_{пит} = E_{зв} / A .$$

6. Основний закон радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} ,$$

де N – кількість атомів, що не розпалися у момент часу t; N_0 – кількість атомів, що не розпалися у момент часу, прийнятий за початковий (при $t = 0$), e – основа натуральних логарифмів; λ – стала радіоактивного розпаду.

7. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ – проміжок часу, за який кількість атомів, що не розпалися, зменшується у два рази. Період напіврозпаду пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} .$$

8. Кількість атомів, що розпадалися за час t:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) .$$

Якщо проміжок часу $\Delta t << T_{1/2}$, то для визначення числа кількості атомів, що розпалися, можна використовувати наближену формулу:

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t .$$

9. Середній час життя τ радіоактивного ядра – проміжок часу, за який кількість ядер, що не розпалися, зменшується в e раз:

$$\tau = 1/\lambda .$$

10. Кількість атомів, що міститься у радіоактивній речовині:

$$N = \frac{m}{M} N_A ,$$

де m – маса речовини, M – її молярна маса, N_A – стала Авогадро.

11. Активність A нукліду у радіоактивному джерелі (активність ізотопу) – величина, що дорівнює відношенню кількості dN ядер, що розпалися в ізотопі, до проміжку часу dt, за який відбувся розпад. Активність визначається за формулою:

$$A = -dN / dt = \lambda N ,$$

або

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} .$$

Активність джерела у початковий момент часу ($t = 0$):

$$A = \lambda N_0 .$$

Активність ізотопу змінюється з часом за тим же законом, що і кількість ядер, які не розпалися:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} .$$

а.Контрольні запитання та завдання

1. З чого складається атомне ядро?
2. Які характеристики атомного ядра ви знаєте?
3. Дайте визначення ізотопів, ізобарів, ізотонів та ізомерів.
4. Чому дорівнює енергія зв'язку ядра?
5. Дайте визначення питомої енергії зв'язку ядра.
6. Чому міцність ядер зменшується при переході до важких елементів?
7. Запишіть формулу дефекту маси.
8. Що називається ядерними силами? Назвіть їх основні властивості.
9. У чому суть оболонкової моделі ядра, і які явища вона пояснює?
10. У чому суть крапельної моделі ядра, і які явища вона пояснює?
11. Що таке радіоактивність? Назвіть види радіоактивних випромінювань.
12. Чи зміниться хімічна природа елемента при випроміненні його ядром γ-кванта?
13. Які явища супроводжують проходження γ-випромінювання через речовину і в чому їхня суть?
14. Що називається радіоактивним розпадом?
15. Сформулюйте закон радіоактивного розпаду.
16. Що називається періодом напіврозпаду речовини?
17. Що таке час життя радіоактивного ядра? Як ця величина пов'язана зі сталою радіоактивного розпаду?
18. Що називається активністю нукліду? За яким законом змінюється активність з часом?
19. Що називається ядерними реакціями?
20. За якими ознаками можна класифікувати ядерні реакції?

12.5 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Водень збагачений дейтерієм. Визначити масові частинки w_1 протія і w_2 дейтерія, якщо відносна атомна маса такого водню дорівнює 1,122.

Дані: $A_r = 1,222$;

$w_1 - ?$ $w_2 - ?$

Аналіз та розв'язання

Масові частки w_1 протію і w_2 дейтерію можна виразити співвідношеннями

$$w_1 = m_1/(m_1 + m_2),\ w_2 = m_2/(m_1 + m_2),$$

де m_1 і m_2 – маси відповідно протію і дейтерію у суміші.

Виразимо з цих рівнянь маси m_1 і m_2

$$m_1 = w_1\left(m_1 + m_2\right);\ m_2 = w_2\left(m_1 + m_2\right)$$

і підставимо їх у знаменник формули, яка визначає молярну масу M суміші

$$M = \left(m_1 + m_2\right)\Big/\left(m_1/M_1 + m_2/M_2\right),$$

де M_1 і M_2 – молярні маси компонентів суміші. Після такої підстановки і простих перетворювань одержимо

$$M = M_1 M_2\Big/\left(w_1 M_1 + w_2 M_2\right). \qquad (12.1)$$

Оскільки молярні маси протію і дейтерію пропорційні їх відносним атомним масам, то рівняння (12.1) можна переписати у вигляді

$$A_r = A_{r_1} A_{r_2}\Big/\left(w_1 A_{r_2} + w_2 A_{r_1}\right),$$

де A_{r_1} і A_{r_2} – відносні атомні маси, відповідно, протію і дейтерію. Відзначимо далі, що сума масових часток усіх компонентів має бути рівною одиниці, тобто

$$w_1 + w_2 = 1.$$

Розв'язавши спільно рівняння (12.2) і (12.3), знайдемо

$$w_1 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r\left(A_{r_2} - A_{r_1}\right)}, \qquad (12.2)$$

$$w_2 = \frac{A_{r_1} A_{r_2} - A_r A_{r_1}}{A_r\left(A_{r_1} - A_{r_2}\right)}. \qquad (12.3)$$

Із фізичних таблиць знаходимо $A_{r_1} = 1{,}00783$, $A_{r_2} = 2{,}01410$.

Підставивши числові значення величин у (12.2) та (12.3), одержимо

$$w_1 = 0{,}796 \text{ і } w_2 = 0{,}204.$$

Задача 2. Розрахувати дефект маси Δm, енергію зв'язку $E_{зв}$ ядра ${}^{11}_{5}B$.

Дані: ${}^{11}_{5}B$;

$\Delta m - ?\ E_{зв} - ?$

Аналіз та розв'язання

Дефект маси ядра визначимо за формулою

$$\Delta m = Z m_{{}^{1}_{1}H} + \left(A - Z\right) m_н - m_a \qquad (12.4)$$

Обчислення дефекту маси виконаємо у несистемних одиницях *а.о.м.* Для ядра ${}^{11}_{5}B$: $Z = 5$, $A = 11$. Маси нейтральних атомів водню ${}^{1}_{1}H$ і бору ${}^{11}_{5}B$, а також нейтрона n знайдемо у фізичних таблицях. Підставимо значення мас у формулу (12.4)

$$\Delta m = \left[5 \cdot 1{,}00783 + \left(11 - 5\right) \cdot 1{,}00867 - 11{,}00931\right]$$

$$\Delta m = 0{,}08186 \text{ } а.о.м. \qquad (12.5)$$

Енергія зв'язку ядра визначається співвідношенням

$$E_{зв} = \Delta m \cdot c^2 .$$

Енергію зв'язку також знайдемо у МеВ.

Для цього дефект маси підставимо у співвідношення (12.5) в *а.о.м.*, а коефіцієнт пропорційності $c^2 = 931,4$ МеВ/а.о.м., тобто

$$E_{зв} = 931,4 \cdot 0,08186 = 76,24 \text{ МеВ}.$$

Задача 3. Визначити енергію E, яку потрібно затратити для відриву нейтрона від ядра $^{23}_{11}Na$.

Дані: $^{23}_{11}Na$;

$E - ?$

Аналіз та розв'язання

Після відриву нейтрона число нуклонів A в ядрі зменшиться на одиницю. А кількість протонів Z залишиться без зміни; одержимо ядро ^{23}Na, що утворилось у результаті захоплення вільного нейтрона ядром ^{22}Na. Енергія відриву нейтрона від ядра ^{23}Na дорівнює енергії зв'язку нейтрона з ядром ^{22}Na $\left(E = E_{зв}\right)$.

Виразивши енергію зв'язку нейтрона через дефект маси системи, одержимо

$$E = E_{зв} = c^2 \Delta m = c^2 \left(m_{^{22}Na} + m_н - m_{^{23}Na} \right). \qquad (12.6)$$

При підстановці числових значень у (12.6) замінюємо маси ядер масами нейтральних атомів. Зважаючи на те, що кількість електронів в оболонках атомів ^{22}Na і ^{23}Na однакова, різниця мас атомів ^{23}Na, ^{22}Na від такої заміни не зміниться.

$$E = 931,4 \quad 0,01334 \ = 12,42 \text{ МеВ}.$$

Задача 4. Радіоізотоп A_1 зі сталою розпаду λ_1 перетворюється у радіоізотоп A_2 зі сталою розпаду λ_2. Вважаючи, що у початковий момент препарат мав лише ядра ізотопу A_1, знайти, через який час активність радіоізотопу A_2 досягне максимуму?

Дані: A_1, λ_1, A_2, λ_2; $t_{a\ \max} - ?$

Аналіз та розв'язання

Активність препарату пропорційна кількості існуючих ядер

$$a = -dN/dt = \lambda N .$$

Отже, максимальна активність радіоізотопу A_2 відповідатиме максимальній кількості ядер N_2. Закон зміни N_2 з часом має вигляд

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right), \qquad (12.6)$$

де $N_1(0)$ – кількість ядер радіоізотопу A_1 у момент часу $t = 0$.

Щоб знайти час t, якому відповідає максимум функції $N_2(t)$, продиференціюємо вираз (12.6) за часом і прирівняємо до нуля похідну

$$N_2'(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right) = 0, \qquad (12.7)$$

з формули (12.7)

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Звідки маємо

$$t_{a\ \max} = \frac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Задача 5. Визначити, скільки ядер радіоізотопу церію $^{141}_{51}Ce$ масою $m_0 = 2$ мг розпадаються протягом таких проміжків часу: $\Delta t_1 = 10$ с; $\Delta t_2 = 1$ рік. Період піврозпаду церію $T = 285$ діб.

Дані: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $m_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ кг, $\Delta t_1 = 10$ с, $\Delta t_2 = 1$ рік, $T = 285$ діб; $\mu = 0{,}144$ кг/моль.

ΔN – ?

Аналіз та розв'язання.

1. Кількість ядер ΔN, що не розпалися, знайдемо із закону радіоактивного розпаду

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

де

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \qquad (12.8)$$

Звідси

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Delta t. \qquad (12.9)$$

Початкову кількість ядер (атомів) визначимо як

$$N_0 = N_A \cdot \nu = N_A \frac{m_0}{\mu}, \qquad (12.10)$$

де ν – кількість молів, що міститься у препараті, m_0 – початкова маса препарату, N_A – число Авогадро, μ – молярна маса ізотопу.

Підставивши (12.10) у (12.9), отримаємо

$$\Delta N = \frac{\ln 2 \cdot N_A \cdot m_0 \cdot \Delta t}{T\mu} = 2{,}4 \cdot 10^{12}.$$

2. У другому випадку $\Delta t = T$. Тому можна скористатися інтегральною формою закону радіоактивного розпаду

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right). \qquad (12.11)$$

Підставивши у (12.11) значення N_0 і λ з (12.10) і (12.8), отримаємо

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{t\cdot\ln 2}{T}}\right).$$

Оскільки $e^{\ln 2} = 2$, то $\Delta N = \frac{N_A \cdot m_0}{\mu}\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) = 5\cdot 10^{18}$.

Задача 6. Визначити енергію реакції ${}^{10}B(n,\alpha)\ {}^{7}\to Li$, що відбувається внаслідок взаємодії повільних нейтронів з ядрами бору, що перебувають у спокої. Знайти також кінетичні енергії T продуктів реакції.

Дані: m_{Li}; m_{He}; m_n; c;

$Q - ?\ T - ?$

Аналіз та розв'язання.

Ядерна реакція має такий вигляд

$$^{10}_{5}B + {}^{1}_{0}n \to {}^{11}_{5}B \to {}^{7}_{3}Li + {}^{4}_{2}He. \qquad (12.12)$$

Як видно з (12.12), ядро бору, що поглинуло повільний нейтрон, перетворюється у проміжне ядро ${}^{11}_{5}B$. Останнє переходить у збуджений стан, після якого випромінює α-частинку (ядро гелію ${}^{4}_{2}He$) і перетворюється у ${}^{7}_{3}Li$, тобто ядро літію.

Знайдемо енергію реакції

$$Q = c^2\left(\sum m - \sum m'\right). \qquad (12.13)$$

$\sum m$ і $\sum m'$ – суми мас спокою частинок до і після реакції, відповідно.

Перепишемо (12.13) у такому вигляді

$$Q = c^2\left[\left(m_{^{10}B} + m_n\right) - \left(m_{^{7}Li} + m_{^{4}He}\right)\right]$$

де m_n – маса нейтрона.

Замінимо маси спокою ядер атомів на маси спокою власне атомів $\left(m = m_0, m' = m'_0\right)$.

Тоді $Q = 2{,}8$ МеВ.

Знайдемо кінетичні енергії продуктів реакції, тобто ядра літію ${}^{7}_{3}Li$ і α-частинки. Закон збереження релятивістської енергії у цьому випадку має такий вигляд

$$\sum m_0 c^2 + \sum E_к = \sum m'_0 c^2 + \sum E'_к,$$

$$c^2\left(\sum m_0 - \sum m'_0\right) + \sum E_к = \sum E'_к. \qquad (12.14)$$

В останньому співвідношенні врахуємо (12.13) і отримаємо

$$Q + \sum E_к = \sum E'_к.$$

Нейтрони мають малу швидкість, тому $\sum E_к = 0$. Суму кінетичних енергій продуктів реакції можна подати як

$$E_{кLi} + E_{кHe} = Q. \qquad (12.15)$$

Сумарний імпульс частинок до реакції дорівнював нулю. Згідно із законом збереження імпульсу і після реакції сумарний імпульс має дорівнювати нулю

$$\vec{p}_{Li} + \vec{p}_{He} = 0.$$

Звідки модулі імпульсів

$$\left|\vec{p}_{Li}\right| = \left|\vec{p}_{He}\right|.$$

Від імпульсів частинок реакції перейдемо до їх кінетичних енергій. Оскільки для класичної частинки

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

звідси

$$p = \sqrt{2mE_к},$$

тоді

$$\sqrt{2m_{Li}E_{кLi}} = \sqrt{2m_{He}E_{кHe}},$$

або

$$m_{Li}E_{кLi} = m_{He}E_{кHe}. \qquad (12.16)$$

З рівнянь (12.15) і (12.16), отримаємо

$$E_{кLi} = \frac{Qm_{He}}{m_{Li} + m_{He}};\ E_{кHe} = \frac{Qm_{Li}}{m_{Li} + m_{He}}.$$

Підставивши значення m_{He}, m_{Li}, отримаємо

$$E_{кLi} = \frac{4Q}{11} = 1{,}02\ \text{МеВ},\ E_{кHe} = \frac{7Q}{11} = 1{,}78\ \text{МеВ}.$$

12.6 Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Хлор являє собою суміш двох ізотопів із відносними атомними масами $A_{r_1} = 34{,}969$ і $A_{r_2} = 36{,}966$. Обчислити відносну атомну масу A_r хлору, якщо масові частки w_1 і w_2 першого і другого ізотопів відповідно дорівнюють 0,754 і 0,246.

Відповідь: $A_r = 35{,}439$.

Задача 2. Бор являє собою суміш ізотопів із відносними атомними масами $A_{r_1} = 10{,}013$ і $A_{r_2} = 11{,}009$. Визначити масові частки w_1 і w_2 першого і другого ізотопів у природному борі. Відносна атомна маса A_r бора дорівнює 10,811.

Відповідь: $w_1 = 0{,}186;\ w_2 = 0{,}184$.

Задача 3. Визначити масу ядра літію, якщо маса нейтрального атома літію дорівнює 7,01601 *а.о.м.*

Відповідь: $m_{я\,Li} = 7{,}01436$ *а.о.м.*

Задача 4. Визначити атомні номери, масові числа і хімічні символи дзеркальних ядер, які отримуються, якщо в ядрах ${}_2^3He$, ${}_4^7Be$, ${}_8^{15}O$ протони замінити нейтронами, а нейтрони – протонами. Навести символічний запис отриманих ядер.

Відповідь: ${}_1^3H$, ${}_3^7Li$, ${}_7^{15}N$.

Задача 5. Два ядра гелію ${}_2^4He$ злиплися в одне ядро. Процес супроводжувався викидом протона. Визначити, ядро якого елемента утворилося у результаті перетворення (наведіть символічний запис ядра).

Відповідь: ${}_3^7Li$.

Задача 6. В ядрі ізотопу кремнія ${}_{14}^{27}Si$ один із протонів перетворився у нейтрон (β^+-розпад). Яке ядро отрималось у результаті такого перетворення?

Відповідь: ${}_{13}^{27}Al$.

Задача 7. Ядро плутонія ${}_{94}^{238}Pu$ випробувало шість послідовних α-розпадів. Написати ланцюжок перетворень із зазначенням хімічних символів, масових і зарядових чисел проміжних ядер і кінцевого ядра.

Відповідь: ${}_{94}^{238}Pu \to {}_{92}^{234}U \to {}_{90}^{230}Th \to {}_{88}^{226}Ra \to {}_{86}^{222}Rn \to {}_{84}^{218}Po \to {}_{82}^{214}Pb$.

Задача 8. Визначити дефект маси Δm та енергію зв'язку ядра атома важкого водню.

Відповідь: $\Delta m = 0,00240$ *а.о.м.*; $E_{зв} = 2,23$ МеВ.

Задача 9. Визначити енергію $E_{зв}$, яка звільнилася при з'єднанні одного протона і двох нейтронів в атомне ядро.

Відповідь: $E_{зв} = 8,49$ МеВ.

Задача 10. Енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра, яке складається з двох протонів і одного нейтрона, дорівнює $7,72$ МеВ. Визначити масу m_a нейтрального атома, що має це ядро.

Відповідь: $m_a = 3,01604$ *а.о.м.*

Задача 11. Визначити масу m_a нейтрального атома, якщо ядро цього атома складається з трьох протонів і двох нейтронів й енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра дорівнює $26,3$ МеВ.

Відповідь: $m_a = 5,01258$ *а.о.м.* (атом літію ${}_3^5Li$).

Задача 12. Визначити енергію E, яка звільняється при створенні із протонів і нейтронів ядер гелія ${}_2^4He$ масою $m = 1$ г.

Відповідь: $E = 682$ ГДж.

Задача 13. Знайти мінімальну енергію $E_{\min}$, необхідну для виривання одного протона з ядра азоту $^{14}_{7}N$.

Відповідь: $E_{\min} = 7{,}55$ МеВ.

Задача 14. Енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра кисню $^{18}_{8}O$ дорівнює 139,8 МеВ, ядра фтору $^{19}_{9}F$ – 147,8 МеВ. Визначити, яку мінімальну енергію E потрібно затратити, щоб відірвати один протон від ядра фтору.

Відповідь: $E_{\min} = 8{,}0$ МеВ.

Задача 15. Яку найменшу енергію зв'язку $E_{\min}$ необхідно затратити, щоб розділити ядро $^{4}_{2}He$ на дві однакові частинки?

Відповідь: $E_{\min} = 23{,}8$ МеВ.

Задача 16. Визначити найменшу енергію $E_{\min}$, необхідну для розділення ядра вуглецю $^{12}_{6}C$ на три однакові частинки.

Відповідь: $E_{\min} = 7{,}26$ МеВ.

Задача 17. Яка частина початкової кількості атомів радіоактивного актинію ^{225}Ac залишиться через 5 діб, 15 діб? Період напіврозпаду актинію 10 діб.

Відповідь: $0{,}71$; $0{,}36$.

Задача 18. Ядро ізотопу кобальту $^{60}_{27}Co$ викинуло негативно заряджену β-частинку. В яке ядро перетворилося ядро кобальту?

Відповідь: $^{60}_{28}Ni$.

Задача 19. Визначити зарядове Z і масове A число ізотопу, який утворюється з торію $^{232}_{90}Th$ після трьох α і двох β-перетворень.

Відповідь: $Z = 86$; $A = 220$, $^{220}_{86}Rn$.

Задача 20. Визначити сталі розпаду λ ізотопів радію $^{219}_{88}Ra$ і $^{226}_{88}Ra$. Їх періоди напівроспаду – 10^{-3}с та $1{,}62 \cdot 10^{3}$ років.

Відповідь: $700\,\text{с}^{-1}$; $13{,}6$ пс$^{-1}$.

Задача 21. Стала розпаду λ рубідію ^{89}Rb дорівнює $0{,}00077$ с$^{-1}$. Визначити його період напіврозпаду $T_{1/2}$.

Відповідь: 15 хв.

Задача 22. Якщо період напіврозпаду радію 1600 років, то яка частка зразка радію розпадеться після того, як мине 3200 років?

Відповідь: $3/4$.

Задача 23. Визначити енергію Q α-розпаду ядра полонію $^{210}_{84}Po$.

Відповідь: $Q = 5{,}41$ МеВ.

Задача 24. За один рік початкова кількість радіоактивного ізотопу зменшилася у три рази. У скільки разів вона зменшиться за два роки?

Відповідь: У 9 разів.

Задача 25. Знайти енергію *E*, яка вивільнюється при поділі всіх ядер, що містяться в урані-235 масою *m*=1 *г*.

Відповідь: $E = 82$ ГДж.

Задача 26. Ядро радону $^{220}_{86}Rn$, що знаходилося у стані спокою, викинуло α-частинку зі швидкістю $\upsilon = 16$ Мм/с. В яке ядро перетворилося ядро радону? Яку швидкість υ_1 воно здобуло внаслідок віддачі?

Відповідь: $^{216}_{84}Po$, $\upsilon_1 = 29$ Мм/с.

Задача 27. Ядро вуглецю $^{14}_{6}C$ викинуло від'ємно заряджену β-частинку та антинейтрино. Визначити повну енергію Q β-розпаду ядра.

Відповідь: $Q = 0{,}156$ МеВ.

Задача 28. Ядро атома радію $^{226}_{88}Ra$, що вільно покоїться, зазнає α-розпаду. Енергія зв'язку ядра дорівнює 1731,6 Ме*В*, ядра $^{222}_{86}Rn$ – 1708,2 *МеВ*, α-частинки – 28,3*МеВ*. Вважаючи, що дочірнє ядро радона $^{222}_{86}Rn$ утворюється у незбудженому стані, знайти: а) швидкість υ_α частинки, що утворилась; б) швидкість дочірнього атома.

Відповідь: а) $\upsilon_\alpha = 1{,}5 \cdot 10^7$ м/с; б) $\upsilon = 2{,}7 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 29. Скільки ядер урану-235 має ділитися за t = 1*с*, щоб теплова потужність *P* ядерного реактора дорівнювала 1 Вт?

Відповідь: $N = 3{,}1 \cdot 10^{10}$.

Задача 30. Знайти потужність *P* атомної електростанції, яка витрачає 0,1 кг урану-235 за добу, якщо ККД η станції дорівнює 16%.

Відповідь: $P = 15$ МВт.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: Навч. посібник / Упор. Українець М.І. та ін. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 164 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: Наука, 1987. – Т.2. – 318 с.
3. Квантова та ядерна фізика: Навч. посібник / Упор. Українець М.І. та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 124 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. – М.: Наука, 1987. – Т.3. – 318 с.
5. Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів / В.В. Кармазін, В.В. Семенець – К.: Кондор, 2009. – 786 с.
6. Чертов А.Г., Воробьев А.В. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981. – 496 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1982. – 420 с.
9. Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
10. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высшая школа, 1978. – 452 с.
11. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Курс общей физики: – М.: Высшая школа, 1972. – 534 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з фізики
(частина 2)
для студентів усіх спеціальностей і форм навчання

Упорядники: СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна
МАРЧЕНКО Семен Федорович
КІБЕЦЬ Інна Миколаївна
ОРЕЛ Роман Петрович
МАЛИК Світлана Борисівна

Відповідальний випусковий В.О. Стороженко
Редактор О.С. Бєлянінова
Комп'ютерна верстка Л.Ю. Свєтайло

План 2011 (перше півріччя), поз. 44
Підп. до друку 12.01.2011. Формат 60x84 1/16. Спосіб друку – ризографія.
Умов.друк.арк. 8,2. Облік. вид.арк. 7,8 Тираж 200 прим.
Ціна договірна Зам №1-70

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна, 14

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ

«ФІЗИКА»

ЧАСТИНА 2

(Електрика та Магнетизм)

Харків 2018

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «ФІЗИКА». Частина 2 (Електрика та Магнетизм) для студентів усіх спеціальностей і форм навчання / Упоряд.: Р. П. Орел, О. М. Коваленко, В. О. Стороженко та інші – Харків: ХНУРЕ, 2018. – 112 с.

Упорядники: Р. П. Орел,
О. М. Коваленко,
В. О. Стороженко,
А. І. Рибалка,
А. І. Козарь,
С. М. Мешков,
В. В. Калінін,
А. А. Онищенко,
О. В. Мягкий,
С. Г. Кравченко,
Т. Г. Божко,
О. В. Моісеєнко,

ЗМІСТ

Загальні положення 4
1 Ознайомлення з приладами для вимірювання електричних величин 6
2 Осцилографування фізичних процесів 14
3 Дослідження електричного поля 21
4 Визначення ємності конденсатора 28
5 Визначення електричних властивостей сегнетоелектриків 33
6 Вимірювання опорів методом мостової схеми 38
7 Дослідження процесів зарядження та розрядження конденсаторів 43
8 Вивчення магнітного поля короткого соленоїда та системи двох соленоїдів 49
9 Вивчення електромагнітних явищ на основі довгого соленоїда 54
10 Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона 60
11 Визначення відношення заряду електрона до його маси методом фокусування пучка електронів подовжнім магнітним полем 65
12 Дослідження явища самоіндукції 70
13 Дослідження явища взаємоіндукції 75
14 Визначення магнітних властивостей феромагнетиків 82
15 Дослідження повного послідовного кола змінного струму 89
16 Дослідження струму зміщення 94
Додаток А. Електронні прибори лабораторного практикуму 99
Додаток Б. Зразок оформлення звіту 106
Рекомендована література 110

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дане видання містить методичні вказівки до виконання робіт фізичного практикуму, створеного на кафедрі фізики університету. Воно призначене для студентів, що виконують лабораторні роботи з електромагнетизму (друга частина курсу фізики).

Мета лабораторного практикуму:

– наочне підтвердження фізичних законів;
– набуття елементарних навичок наукового дослідження;
– ознайомлення студентів із сучасною вимірювальною апаратурою;
– освоєння студентами методів обробки і оцінки достовірності експериментальних результатів;
– забезпечення зв'язку практикуму з лекційним курсом і практичними заняттями з фізики.

Виконання лабораторного завдання складається із попередньої підготовки, проведення лабораторного експерименту і складання звіту про результати роботи.

Лабораторні роботи виконуються відповідно до семестрового графіка, який знаходиться на стенді в лабораторії, тому кожен студент має можливість підготуватися до них заздалегідь.

Підготовка до роботи має проводитися в наступній послідовності. Перш за все, потрібно ознайомитися з описом роботи і вивчити її теоретичний вступ, звернувши особливу увагу на виведення розрахункових формул. Для більш повного з'ясування деяких питань теорії слід звернутися до рекомендованої літератури, а також до конспекту лекцій.

Готовність кожного студента до виконання роботи перевіряється викладачем перед початком роботи опитуванням (письмово чи усно). Питання для опитування вибираються викладачем з такого переліку:

– назва та мета роботи;
– порядок виконання роботи;
– прилади і обладнання, що використовуються в лабораторній роботі;
– схема досліду;
– фізичні величини, що вивчаються та досліджуються в даній лабораторній роботі, їх розмірність;
– загальний вигляд законів та залежностей, що планується використати в ході виконання лабораторної роботи;
– прямі вимірювання, які проводяться в даній лабораторній роботі;
– непрямі вимірювання, які проводяться в даній лабораторній роботі;
– формули для розрахунків похибок прямих та непрямих вимірювань.

Під час роботи в лабораторії мають точно виконуватися правила внутрішнього розпорядку та техніки безпеки, основні з яких полягають в наступному:

– складання і розбирання схем, під'єднання додаткових приладів, їх часткове від'єднання і заміну робити лише при вимкненому джерелі живлення;

– під’єднувати схему до джерела електричного струму лише після перевірки схеми викладачем;

– у випадку будь-яких перез’єднань перед підключенням до джерела струму схему перевіряє викладач;

– забороняється залишати без нагляду схеми і прилади під напругою;

– у випадку виходу із ладу приладу відразу відключити схему і повідомити про це викладача.

Перед початком роботи необхідно ознайомитися з короткими інструкціями до приладів, які використовуються, наведеними у додатку А.

Проведення лабораторного експерименту виконується відповідно до вказівок розділу «Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання». Для отримання правильних результатів дослідження рекомендується всі вимірювання проводити не менше трьох разів. Отримані результати заносять до таблиці.

Звіт з кожної лабораторної роботи має містити назву та мету роботи, схему (рисунок) лабораторної установки, результати вимірювань (у вигляді таблиць), робочу формулу та результати розрахунків у вигляді графіків (або таблиць), формулу для розрахунку похибок та результат цього розрахунку, висновки з результатів, що одержані в роботі. Зразок оформлення звіту наведений у додатку Б.

Захист оформлених звітів проводять у вигляді здачі циклу лабораторних робот (3–4 роботи) на підсумковому занятті згідно з графіком.

Для здачі циклу допускають студентів, які виконали лабораторні роботи і оформили звіт. Захист робот проводиться у формі опитування по змісту виконаних лабораторних робот. Перелік контрольних запитань та завдань наведений у кінці опису кожної роботи і у методичних вказівках [1].

1 ОЗНАЙОМЛЕННЯ З ПРИЛАДАМИ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН

1.1 Мета роботи

Вивчити найважливіші елементи електричного кола і деяких вимірювальних приладів (стрілочних і цифрових). Метою експериментальної частини роботи є опанування способів вимірювання сили струму і напруги, градуювання амперметра та вольтметра і знаходження похибок вимірювання.

1.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

1.2.1 Джерела струму

Джерела струму – це перетворювачі різних видів енергії неелектричної природи (хімічної, фізичної) в електричну. Джерела струму розрізняються за природою сторонніх сил. Головні параметри джерел струму – електрорушійна сила (ЕРС), внутрішній опір, максимальна сила струму, яка забезпечується джерелом. Існують джерела постійного і змінного струмів. В лабораторних роботах з електромагнетизму використовуються спеціальні блоки живлення, які базуються на перетворенні змінної напруги в постійну або в змінну низьковольтну напругу. Клеми цих джерел розташовані ліворуч та праворуч панелі столу та позначаються: $\overline{\overline{\overline{}}}U$ для постійного струму, $\sim U$ для змінного струму. Вмикаються джерела живлення тумблером, що розташований в нижній частині краю панелі.

1.2.2 Реостати та потенціометри

Задля зміни режиму роботи електричного кола широко використовуються змінні резистори. Змінний резистор – це реостат з контактом, що ковзає, який дозволяє вмикати до кола частину резистора *RP* (рис. 1.1). Основні характеристики такого резистора – повний опір та максимальна розсіювана потужність (або максимально припустимий струм – для дротяних реостатів) вказуються на корпусі резистора.

Існують два способи вмикання змінного резистора в електричне коло.

Для регулювання струму в колі резистор *RP* вмикається реостатом (рис. 1.2). При цьому використовуються тільки дві клеми реостата (1 та 3). Перед вмиканням схеми з реостатом, розташування рухомого контакту повинно відповідати повному максимальному значенню опору $(R_{13} = R)$.

Для регулювання напруги в електричному колі резистор *RP* вмикається потенціометром (рис. 1.3). При цьому використовуються всі три клеми реостата.

Напруга U_2, яка знімається з частини резистора 1–3, пов'язана з прикладеною напругою U_2 співвідношенням

$$U_2 = \frac{R_{13}}{R} U_1, \qquad (1.1)$$

де R – повний опір резистора RP.

Резистор може бути використаний як потенціометр, якщо виконується умова: $R_H >> R >> r$, де R_H – опір навантаження, r – внутрішній опір джерела струму.

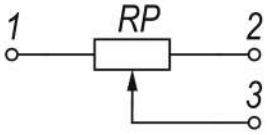


Рисунок 1.1

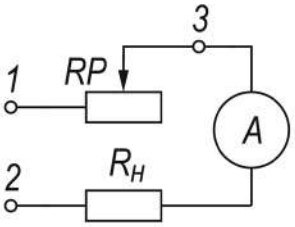


Рисунок 1.2

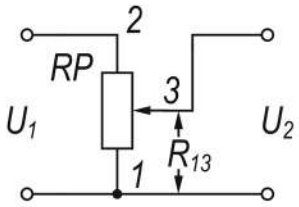


Рисунок 1.3

Перед підключенням схеми, яка містить потенціометри, до джерела струму повзунок потенціометра повинен знаходитися в нульовому положенні ($R_{13} = 0$).

1.2.3 Електровимірювальні прилади

Вимірювання полягає в порівнянні вимірюваної фізичної величини з певним її значенням, прийнятим за одиницю. Електричні вимірювання проводяться двома способами:

1. Використовуючи прилади порівняння (компенсаційні та мостові прилади), в яких відбувається порівняння електричної величини з її еталоном;

2. Використовуючи прилади безпосередньої оцінки, показання яких дає чисельне значення вимірюваної величини.

В даній роботі використовуються прилади першого типу. Їх можна розділити на електромеханічні та електронні. За способом надання кінцевого результату електровимірювальні прилади розподіляються на аналогові та цифрові.

Показання аналогових приладів є безперервними функціями змін вимірюваної величини. В аналогових (наприклад, стрілочних) приладах безперервна вимірювана величина викликає безперервне відхилення стрілки по шкалі, тобто величина відхилення стрілки є відповідною вимірюваній величині.

В цифрових приладах безперервна вимірювана величина автоматично перетворюється в дискретну і результат вимірювання видається в цифровому вигляді. Слід враховувати, що електромеханічні прилади поступово заміняються електронними, а аналогові – цифровими.

Будь-який вимірювальний механізм електровимірювального приладу є перетворювачем вхідної електричної величини в інформаційний сигнал (наприклад, кількість поділок відхилення стрілки по градуйованій шкалі в електромеханічних приладах, тощо).

Для здійснення перетворення використовуються різноманітні фізичні явища. Так, в електровимірювальних приладах магнітоелектричної системи використовується взаємодія магнітного поля постійного магніту з котушкою, по якій протікає вимірюваний струм. При цьому виникає обертальний момент, прикладений до котушки, пропорційний силі струму, що проходить по ній: $M_1 \sim I$. Стрілка, яка тісно зв'язана з рухомою котушкою, повертається разом з нею. Але перетворення не обмежується лише цією взаємодією, бо при будь-якому струмі при відсутності сил опору поворот котушки здійснювався б на максимально можливий кут. Для усунення цього вісь котушки зв'язана з спіральними пружинами, які створюють протидіючий момент сил M_2 , пропорційний куту закручування $\alpha \sim M_2$. Рух стрілки по шкалі відбувається до того положення, поки момент сил M_2 не врівноважить M_1

$$M_2 = M_1. \tag{1.2}$$

Завдяки цьому досягається однозначність відповідності показань приладу і вхідної величини. Рівновага стрілки визначається умовою (1.2).

Електровимірювальні прилади інших систем базуються на інших явищах. Дія приладів електромагнітної системи, наприклад, ґрунтується на взаємодії магнітного поля котушки, по якій протікає вимірюваний струм, з рухомим залізним осердям.

До головних характеристик електровимірювальних приладів належать: рівняння перетворення (градуювальна характеристика, відображена шкалою приладу), чутливість, межа чутливості (ціна поділки), похибка показань приладу (клас точності). Рівняння перетворення $y = f(x)$ – функціональна залежність між вихідним сигналом y і вхідною величиною x. В стрілочних приладах – це залежність поділки шкали n від значення вимірюваної величини I:

$$n = f(I). \tag{1.3}$$

Рівняння (1.3), яке поєднує n та I , залежить від принципу дії і конструктивних особливостей приладу. Ідеальною функцією перетворення є лінійна.

Чутливість S характеризує здатність приладу реагувати на зміни вхідного сигналу, знаходиться із рівняння перетворення і є у випадку із стрілочними приладами відношенням числа поділок шкали Δn до зміни вимірюваної величини ΔI, що викликала це переміщення:

$$S = \frac{\Delta n}{\Delta I} \ . \tag{1.4}$$

Фізичний смисл чутливості – це кількість поділок шкали, що приходиться на одиницю вимірюваної величини.

При лінійному перетворенні: $S = \frac{n}{I}$.

Межа чутливості – така зміна вхідної величини, що викликає найменшу зміну вихідного сигналу, яку можна визначити за допомогою даного приладу. В

ε ціна поділки, що дорівнює значенню вимірюваної величини, яке викликає відхилення покажчика на одну поділку шкали. В приладах з лінійним рівнянням перетворення ціна поділки складає

$$C = \frac{x}{y} = \frac{I}{n} = \frac{1}{S}, \qquad (1.5)$$

Фізичний зміст ціни поділки – це кількість одиниць вимірюваної величини, яка приходиться на одну поділку шкали вимірювального приладу.

Будь-яке вимірювання проводиться з деякою помилкою. Для стрілочних приладів існують помилки двох типів:

1. Помилки, пов'язані з конструкцією приладу, що визначаються класом точності приладу ε_n. Клас точності приладу визначається як відносна похибка, виражена у відсотках: $\varepsilon_n = \frac{\Delta a_1}{a_{np}} 100\%$, звідки і знаходиться абсолютна похибка:

$$\Delta a_1 = \frac{\varepsilon_n}{100} \cdot a_{np},$$

де a_{np} – верхня межа вибраного діапазону (шкали приладу).

2. Помилки, пов'язані з точністю відліку положення стрілки на шкалі, яке визначають з точністю до половини ціни поділки шкали Δa_2.

Таким чином, абсолютна похибка вимірювань при врахуванні двох типів помилок складає величину

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2.$$

Для того, щоб вірно зробити відлік вимірюваної величини за допомогою стрілочного приладу, треба:

1. Перевірити нульову позицію стрілки приладу і, якщо це не обхідно, за допомогою регулювального гвинта встановити стрілку на нуль;

2. Для багатомежних приладів вибрати потрібну для відліку межу виміру і режим постійного чи змінного струму;

3. Зробити відлік, розміщуючи око по нормалі до шкали, а у випадку дзеркальної шкали – сумістити стрілку приладу з її зображенням на дзеркалі.

Основні характеристики та інструкції з використання цифрових приладів наведено в додаток А.

1.2.4 Шунти, додаткові опори та їх застосування

Шунтом називається опір, приєднаний паралельно амперметру (рис. 1.4), внаслідок чого через амперметр проходить лише частина вимірюваного струму. Шунти використовуються для розширення меж вимірювання амперметрів. Якщо необхідно виміряти амперметром струм у k разів більший максимально мож-

$R_ш$, який задовольняє рівності

$$R_ш = \frac{R_a}{k-1}, \tag{1.7}$$

де $k = I/I_a$ – коефіцієнт шунтування;

I – сила струму в колі;

I_a – сила струму, що проходить через амперметр;

R_a – опір амперметра.

Додатковими опорами називаються пристрої, які використовуються для розширення меж вимірювання вольтметрів. Вони являють собою визначені опори $R_д$, які вмикаються послідовно з вольтметром (рис. 1.5). Таке вмикання $R_д$ перетворює напругу U в силу струму (відповідно до закону Ома), а силу струму – в поділки стрілочного приладу $U \to I \to n$.

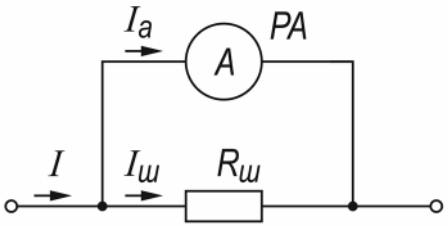


Рисунок 1.4

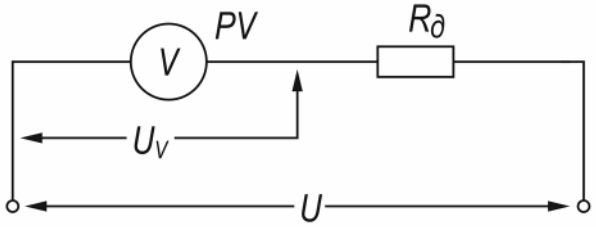


Рисунок 1.5

Для розширення меж вимірювання в k' разів додатковий резистор $R_д$ повинен мати опір

$$R_д = R_v(k'-1),$$

де $k' = \frac{U}{U_v} = \frac{R}{R_v}$;

R_v – опір вольтметра;

U_v – падіння напруги на вольтметрі;

R – спільний опір, $R = R_v + R_д$.

1.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з мікроамперметра, цифрового вольтметра, подільника напруги $R_1 + R'$, набору опорів R_2, $R_ш$, діоду Д-226.

1.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1.4.1 Ознайомлення з електровимірювальними приладами та іншими елементами електричних кіл

Вивчити прилади, які знаходяться на робочому місці, і записати головні характеристики приладів та інших елементів електричних кіл.

1.4.2 Шунтування і градуювання амперметра на постійному струмі

1. Скласти схему (рис. 1.6). Послідовно з навантаженням R_2 ввімкнути досліджуваний прилад P і зразковий PA. Схему підключають до джерела, клеми якого позначені на панелі $\overline{\overline{U}}$.

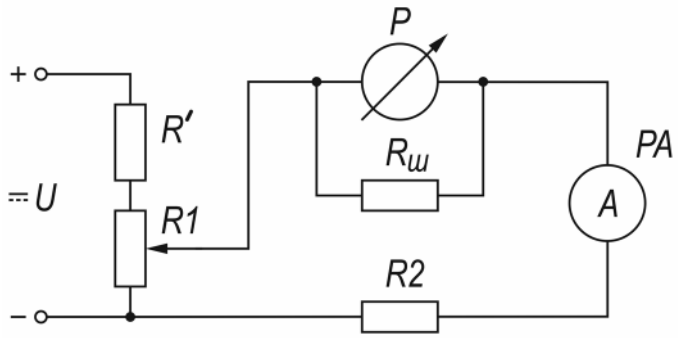


Рисунок 1.6

2. Зняти залежність кількості поділок шкали від сили струму $n = f(I)$. Побудувати графік $n = f(I)$. Нанести на графіку похибки вимірювань.

3. Визначити ціну поділки і чутливість приладу.

4. Виміряти за допомогою приладу В7–21А опори $R_ш$, R_2 і $R_1 + R'$.

5. Визначити коефіцієнт шунтування k і, знаючи опір шунта $R_ш$, обчислити внутрішній опір амперметра R_a.

1.4.3 Градуювання вольтметра за постійною напругою

В якості вольтметра використовується той самий стрілочний прилад, що й при виконанні попереднього завдання. До нього підключається додатковий резистор $R_д = R_2$.

1. Скласти схему, рис 1.7.

2. Зняти залежність кількості поділок приладу n від напруги $n = f(U)$ між точками a та b. Побудувати градуювальний графік.

3. Визначити ціну поділки і чутливість приладу.

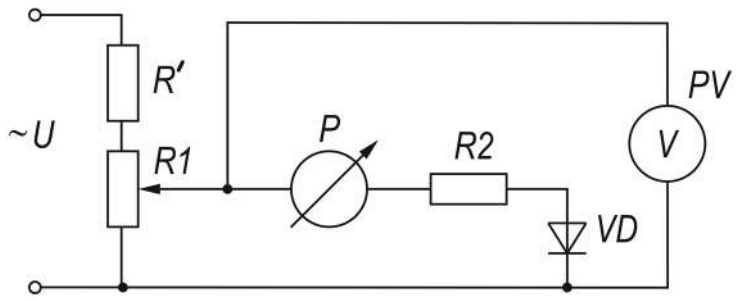


Рисунок 1.7

1.4.4 Градуювання вольтметра за змінною напругою

Для використання приладу постійного струму в колах змінного струму послідовно зі стрілочним приладом *P* на ділянці кола *ab* (рис. 1.7) вмикається діод *VD,* який перетворює змінний струм в постійний. Величина струму, що протікає через прилад в цьому випадку, пропорційна прикладеній змінній напрузі.

1. Для градуювання скласти схему (рис. 1.8), прилад *PV* – зразковий.

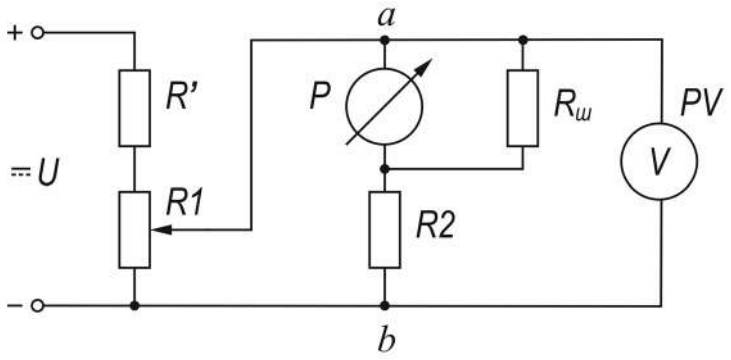


Рисунок 1.8

2. Зняти залежність числа поділок від напруги $n = f(U)$ і побудувати градуювальний графік.

3. Визначити ціну поділки і чутливість приладу.

1.4.5 Визначення сили змінного струму

За допомогою зразкового приладу *PA* визначити силу змінного струму, що протікає через подільник $R' + R_1$. Для цього ввімкнути прилад *PA* (В7–21А) послідовно з $R' + R_1$ і джерелом живлення $\sim U$, а потім визначити похибку вимірюваної величини.

1.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиць, графіки залежностей $n = f(I)$, $n = f(U)$, короткі висновки.

1.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає процес вимірювання фізичної величини?
2. Які призначення і способи вмикання змінного опору в електричне коло?
3. Чи є можливість виміряти силу струму в 2А за допомогою використаного в роботі стрілочного приладу? Якщо є, то які?
4. Що значить клас точності електровимірювального приладу?
5. Як визначити абсолютну похибку вимірювання стрілочного приладу ? Цифрового приладу ?
6. Які фізичні явища використовуються для перетворення сили струму в момент сили, моменту сили в переміщення стрілки, напруги в силу струму?
7. Що таке чутливість і ціна поділки приладу?
8. Які головні характеристики електровимірювальних приладів?
9. Які принципи дії приладів магнітоелектричної і електромагнітної систем?
10. Поясніть зміст умовних позначень на стрілочному приладі, що використовується для вимірювань?

2 ОСЦИЛОГРАФУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1 Мета роботи

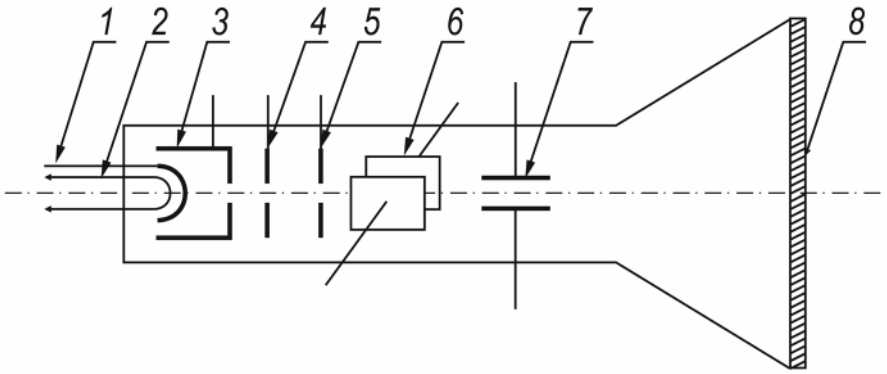
З'ясувати принцип дії електронного осцилографа, навчитися використовувати осцилограф для спостереження форми сигналу, вимірювання напруги, частоти, різниці фаз, дослідити явища, які виникають при складанні коливань однакового напрямку та взаємно перпендикулярних коливань.

2.2Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Електронний осцилограф (ЕО) використовується у науковій та інженерній практиці для дослідження характеристик форми напруг або струмів швидкозмінних коливальних процесів, вимірювання їх амплітуд, частот, фаз і визначення тривалості періодичних процесів. Особливо широко використовуються електронні осцилографи для дослідження характеру часових залежностей параметрів різних процесів за їх осцилограмами.

2.2.1 Будова та принцип дії електронного осцилографа

Осцилограф складається з осцилографічного індикатора – електронно-променевої трубки (ЕПТ), підсилювачів, каналів вертикального *Y* та горизонтального *X* відхилень, генератора розгортки, блока живлення та органів керування.



1 – катод;
2 – волосок розжарення;
3 – циліндричний електрод;
4 – перший анод;
5 – другий анод;
6 – вертикально розташовані пластини;
7 – горизонтально розташовані пластини;
8 – екран.

Рисунок 2.1

Електронно-променева трубка (рис. 2.1) складається з скляної колби, в якій створений високий вакуум. Всередині колби розташовано джерело електронів – катод *1*, який безпосередньо нагрівається волоском розжарення *2*. Катод знаходиться всередині циліндричного електрода *3*. Зміною негативного потенціалу на електроді *3* регулюється кількість електронів, які проходять крізь його отвір, внаслідок чого змінюється яскравість плями на екрані ЕПТ. Перший анод *4* служить для фокусування, а другий *5* – для прискорення електронів. Катод, волосок розжарення, керуючий електрод та обидва аноди складають **електронну гармату**.

Виходячи з електронної гармати, сформований електронний промінь проходить між двома парами металевих пластин *6,7*, які служать для його відхилення. Вертикально розташовані пластини *6* служать для відхилення електронного променя у горизонтальній площині (пластини *X*), а горизонтально розташовані пластини *7* – у вертикальній площині (пластини *Y).* Якщо електричне поле між пластинами відсутнє, то електронний промінь не відхиляється і при відповідному юстуванні електронно-оптичної системи потрапляє у центр екрана ЕПТ, що викликає його світіння. Якщо прикласти до вертикально відхиляючих пластин напругу U, промінь зміщується на відстань y, яка визначається співвідношенням:

$$y = \frac{l \cdot L}{2U_k d} \cdot U , \qquad (2.1)$$

де l – довжина відхиляючої пластини;

d – відстань між відхиляючими пластинами;

L – відстань від пластин до екрану;

U_k – різниця потенціалів між другим анодом та катодом (прискорююча різниця потенціалів).

2.2.2 Підсилювачі та послаблювачі вхідних сигналів

Електронно-променева трубка сама по собі має малу чутливість. Підсилення чутливості ЕО забезпечується підсилювачами напруги. Кожна пара відхиляючих пластин має свій підсилювач. Підсилювач для *X*-пластин звичайно має невеликий коефіцієнт підсилення, так як він призначений головним чином для підсилення достатньо великого сигналу. Підсилювач *Y*-пластин, навпаки, має достатньо великий коефіцієнт підсилення. У обох підсилювачів широка смуга пропускання і дуже рівномірна частотна характеристика, тобто коефіцієнт підсилення майже не залежить від частоти.

Якщо на вхід осцилографа подається достатньо великий сигнал, його можна подавати безпосередньо на відхиляючі пластини або скористатися послаблювачем сигналів (потенціометром).

Електронно-променева трубка, наділена підсилювачами та послаблювачами, може використовуватись як чутливий безінерційний вольтметр, що дозволяє

вимірювати напругу, силу струму, активний опір і т.п. Можливості такого приладу можна значно розширити, якщо забезпечити його генератором розгортки.

2.2.3 Генератор розгортки

Для спостереження часових змін процесів треба подавати на горизонтально відхиляючі пластини ЕО напругу, що лінійно зростає з часом – напругу розгортки. Тому вісь X на екрані трубки називається іноді віссю часу. Якщо при цьому одночасно подати на вертикально відхиляючі пластини досліджувану напругу, то на екрані осцилографа промінь опише графік зміни досліджуваної напруги з часом. Для спостерігання періодичних процесів необхідна і періодична напруга розгортки.

Період розгортки повинен бути кратним періоду досліджуваного сигналу, щоб промінь на екрані з кожним повторенням циклу прокреслював одну й ту ж саму траєкторію. Після проходження екрана по горизонталі до відповідної точки промінь повинен швидко повернутися у початкове положення (зворотний хід).

Викладені вище вимоги виконуються, якщо напруга розгортки змінюється за законом, який графічно зображений на рис. 2.2, де t_1 – час прямого ходу; t_2 – час зворотного ходу променя.

Така напруга називається пилоподібною. Для отримання нерухомого зображення при спостереженні періодичних процесів необхідно, щоб період пилоподібної напруги $T = t_1 + t_2 (t_2 << t_1)$ дорівнював або був кратним періоду досліджуваного процесу T_0. Це означає, що обидва сигнали повинні бути синхронізованими. Для узгодження процесів використовують «синхронізацію», від якої генератор розгортки автоматично вмикається досліджуваною напругою через ціле число періодів.

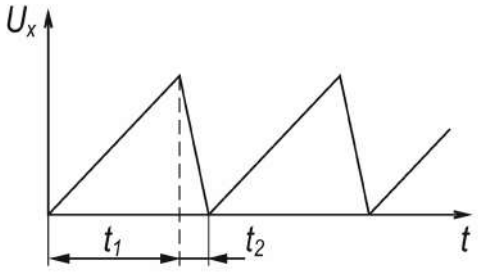


Рисунок 2.2

Органи керування осцилографом описані у додатку А.

2.2.4 Додавання коливань однакового напрямку з близькими частотами

При додаванні коливань одного напрямку з близькими частотами ω і $\omega + \Delta\omega$ $(\Delta\omega << \omega)$

$$x_1 = a\cos\omega t,$$
$$x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

результуюче коливання описується рівнянням

$$x = x_1 + x_2 = (2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos\omega t. \qquad (2.2)$$

Множник в дужках змінюється значно повільніше, ніж другий множник. Це дає змогу розглядати процес як коливання частоти ω, амплітуда якого змінюється за періодичним законом $2a \cdot \cos\frac{\Delta\omega}{2}t$.

Періодична зміна амплітуди результуючого коливання називається **биттям**. Період биття

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \qquad (2.3)$$

2.2.5 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай коливання вздовж осей X та Y описуються рівняннями

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos(\omega t + \delta).$$

Тоді результуюче коливання, яке одержано внаслідок додавання вказаних вище взаємно перпендикулярних, описується рівнянням кривої другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta\ . \qquad (2.4)$$

Замкнуті траєкторії, які спостерігаються на екрані внаслідок додавання взаємно перпендикулярних коливань з кратними частотами, називають фігурами Ліссажу. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, що додаються (рис. 2.3).

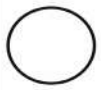
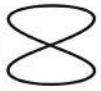
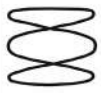
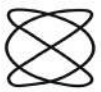
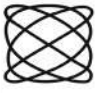
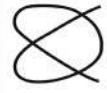
$\nu_y : \nu_x$	*Різниця фаз коливань, що додаються*				
	0	*π/4*	*π/2*	*3π/4*	*π*
1:1					
1:2					
1:3					
2:3					
3:4					

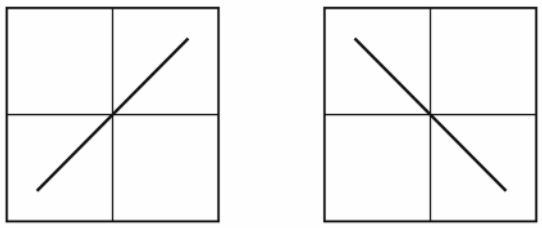
Рисунок 2.3

2.2.6 Визначення різниці фаз між двома сигналами однієї частоти

Для визначення різниці фаз можна дослідити фігури Ліссажу у випадку додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти. Якщо зображення є прямою діагонально спрямованою лінією, то різниця фаз $\delta = 0$ (рис. 2.4. а) або $\delta = 180°$ (рис. 2.4.б). Якщо зображення – еліпс (рис. 2.5), тоді різницю фаз δ можна обчислити за формулою

$$\delta = \arcsin\frac{A}{B}, \qquad (2.5)$$

де A – відстань між точками перетину кривої з вертикальною лінією;
B – максимальне відхилення по вертикалі.



а б

Рисунок 2.4

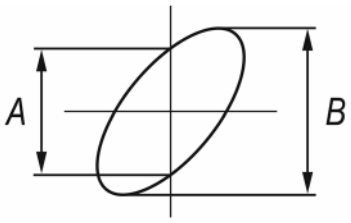


Рисунок 2.5

2.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з електронного осцилографа, звукових генераторів ЗГ-1 та ЗГ-2 – 2 шт., трансформатора, що використовується для додавання коливань, з'єднувальних провідників.

2.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

2.4.1 Вимірювання частоти

1. Зібрати схему (рис. 2.6). Подати на вхід Y осцилографа синусоїдальний сигнал від генератора. Змінюючи сталу розгортки (τ) та підібравши положення ручки синхронізації, одержати стійке зображення синусоїди.

2. Визначити частоту ν сигналу за допомогою формули

$$\nu = \frac{n}{l \cdot \tau}, \qquad (2.6)$$

де n – число періодів сигналу на екрані ЕПТ;

l – кількість поділок, які займають n періодів на горизонтальній шкалі екрану ЕПТ;

τ – стала розгортки.

2.4.2 Додавання коливань однакового напрямку з близькими частотами

1. Зібрати схему (рис. 2.6). Для додавання коливань використати трансформатор, змонтований на панелі.

2. Подати на обмотку III трансформатора сигнал частотою 1500–5000 Гц від звукового генератора (ЗГ-1). Одержати на екрані осцилографа стійке зображення синусоїди. Виміряти амплітуду та частоту сигналу.

3. Від'єднати обмотку III та подати сигнал приблизно тієї ж частоти від другого звукового генератора (ЗГ-2) на обмотку II. Встановити амплітуду сигналу на екрані, яка б дорівнювала попередній.

4. Подати одночасно сигнали на обмотки II та III. Плавно змінюючи частоту одного з генераторів, одержати биття.

5. Визначити період биття, а потім, використовуючи формулу (2.3) – різницю частот $\Delta\omega$.

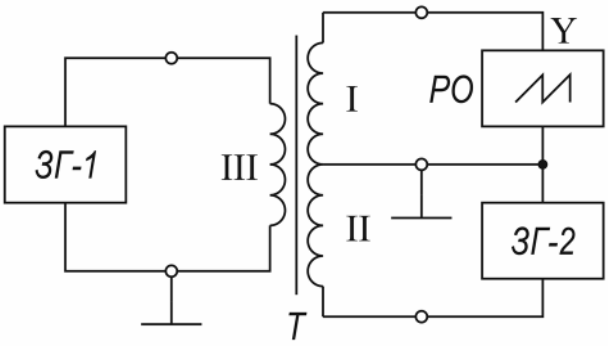


Рисунок 2.6

2.5.3 Додавання коливань з кратними частотами

1. Подати гармонійний сигнал з частотою ν_1=5000 Гц на обмотку III, а потім на обмотку II (рис. 2.6) з ν_2=6000 Гц. Охарактеризувати результуючий сигнал.

2. Повторити спостереження при співвідношенні частот 1:3 та 1:4. Зарисувати результуючий сигнал.

2.5.4 Складання взаємноперпендикулярних коливань.

1. Зібрати схему (рис. 2.7). Встановити частоту генератора $\nu \approx 50 - 500$ Гц.

2. Подати на вхід *X* сигнал від одного генератора, а на вхід *Y* від іншого. Відключити розгортку. Одержати фігури Ліссажу при співвідношенні частот

$$\nu_y = \frac{1}{2}\nu_x, \nu_y = \nu_x, \ \nu_y = \frac{3}{2}\nu_x, \nu_y = \frac{2}{3}\nu_x,$$

$$\nu_y = 2\nu_x, \nu_x = 3\nu_y.$$

3. Переконатися у тому, що

$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{m}{n},$$

де m та n – кількість точок дотикань фігурою Ліссажу вертикальної та горизонтальної ліній відповідно.

4. Зарисувати отримані фігури Ліссажу.

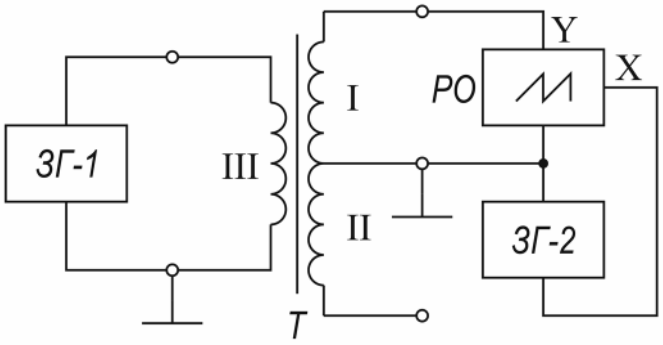


Рисунок 2.7

2.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів, результати розрахунку частоти, періоду коливань для двох генераторів, різниці частот $\Delta\omega$, рисунки фігур Ліссажу, короткі висновки.

2.6 Контрольні запитання і завдання

1. Поясніть призначення, устрій та принцип дії ЕПТ?
2. Для чого призначений генератор розгортки осцилографа?
3. Який принцип роботи осцилографа у режимі спостереження напруг, які періодично змінюються?
4. Як визначити частоту генератора розгортки, якщо частота досліджуваного сигналу відома?
5. Яким чином за допомогою осцилографа можна виміряти напругу, силу струму та опір?
6. Пояснити виникнення биття.
7. У чому суть методу фігур Ліссажу, що застосовується для визначення частоти коливань?
8. Які коливання називаються гармонічними?
9. Як за виглядом фігури Ліссажу можна визначити відношення частот коливань, що додаються?
10. Як визначити різницю фаз між двома коливаннями у випадку додавання взаємно перпендикулярних коливань?

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

3.1 Мета роботи

Дослідити на плоскій електричній моделі розподіл потенціалів в електричному полі між парою електродів в рідинному електроліті, які імітують реальний плоский конденсатор. На підставі закону зв'язку напруженості і потенціалу побудувати двомірну картинку силових ліній електростатичного поля.

3.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Силовою характеристикою електричного поля в кожній його точці є вектор напруженості $\vec{E}$, а енергетичною характеристикою – потенціал φ. Майкл Фарадей вдало запропонував для графічної ілюстрації будь-яких силових полів використовувати так звані силові спрямовані лінії, які б якісно вказували шляхи, якими пересувались би частинки вигаданої дуже густої рідини між областю джерела цієї рідини, де їх енергія найвища, та областю її поглинання, де енергія найнижча. Для електричного поля такими запропоновано вважати позитивні заряди, їх джерелами частіше бувають позитивно заряджені тіла, а негативно зарядженими вважаються тіла, куди ці заряди стікають. Сили, що діють на позитивний заряд, і векторні силові характеристики точок поля завжди є дотичними до гнутих силових ліній і мають з ними однаковий напрямок. Густина, з якою малюють силові лінії, характеризує абсолютну величину силового поля у цьому місці, тобто модуль вектору $\vec{E}$ напруженості електричного поля.

Потенціал φ, як енергетична характеристика точок поля, має сенс тільки у потенціальних полях, де діють консервативні сили, до яких відносять електростатичні, гравітаційні та інші.

На частинку у кожній точці силового поля сили діють у напрямку найефективнішого зменшення її енергії при переміщенні. Ця важлива закономірність природи в електростатиці втілюється у вигляді взаємозв'язку вектору напруженості $\vec{E}$ із скалярною характеристикою точки поля – потенціалом φ:

$$\vec{E} = -grad\varphi_{(x,y,z)} = -\nabla\varphi_{(x,y,z)} \qquad (3.1)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - векторний диференціальний оператор Гамільтона, який визначають позначкою "набла" – ∇.

У якості прикладу, аналіз формули зв'язку (3.1) у одномірному переміщенні вздовж координати x:

$$E_x = -\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x};\ E_x = -\frac{d\varphi(x)}{dx} \qquad (3.2)$$

свідчить що на графіку залежності $\varphi(x)$ силова характеристика E пропорційна до величини крутості (або похідної) в даній точці графіка і спрямована у бік зменшення φ.

В електростатичному полі між джерелами та стоками силових ліній завжди бувають геометричні місця точок з однаковим потенціалом, які створюють у просторі уявні поверхні – еквіпотенціальні поверхні, а на площині – лінії – еквіпотенціальні лінії. Аналіз формули (3.1) свідчить, що силові лінії завжди перетинають еквіпотенціальні поверхні і лінії тільки під прямим кутом.

В лабораторних експериментах технічно легше виконати прямі вимірювання скалярної величини напруженості E. В нашому випадку це робиться у двомірному варіанті осей x та y, тобто у тонкому шарі низько провідного електроліту, що покриває дно пластикової електролізної ванни. На дно кладуть лист пластику з нанесеною координатною сіткою (x, y) та закріпленою парою плоских електродів, які імітують пластини обкладинки плоского, розташовані на відстані d одна від одної. До пластин протягнуті дроти від джерел живлення, завдяки чому між ними встановлюється різниця потенціалів

$$\Delta\varphi_{A'B'} = \varphi_{B'} - \varphi_{A'},$$

Тому через електроліт протікає електричний струм від одної пластини до другої.

Таким чином, вивчення електростатичного поля між обкладинками конденсатора замінюється дослідженням електричного поля струмів в однорідному електроліті між двома смужками-електродами. Адекватність такої заміни підтверджується законом Ома в диференціальній формі, який проголошує, що в кожній точці електроліту векторна величина густини струму $\vec{j}$ пропорційна до вектору напруженості електричного поля. Вектори спрямовані однаково:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}, \qquad (3.3)$$

де ρ – питомий опір електроліту.

3.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка для визначення розподілу електричних потенціалів в шарі електроліту між двома електродами (рис.3.1) складається з ванни з електролітом, двох плоских паралельних електродів *E1* і *E2*, закріплених на пластиковій пластині з координатною сіткою, точкового електроду (зонду), джерела змінної напруги, потенціометра *RP1*, осцилографа *PO*, вольтметра *PV*.

На паралельні електроди, які знаходяться у ванні 1 з електролітом (точки A' та B'), подається напруга ($U_{еф} = 13B$) від джерела змінного струму частотою $\nu = 50$ Гц. Необхідність обов'язково змінної напруги обумовлена двома причинами:

1. Зменшується осідання на електродах продуктів електролізу та приелектродна поляризація електроліту, що знижує викривлення вимірювань потенціалу;
2. Робить ефективними використовування осцилографа у якості нуль-індикатора.

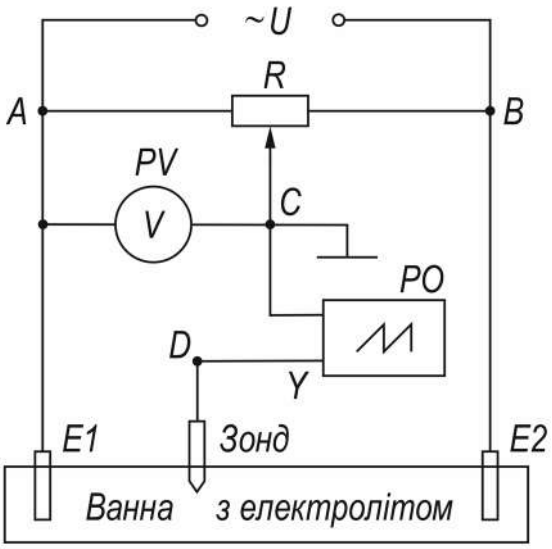


Рисунок 3.1

Електрична схема пристрою для дослідження картини розподілу потенціалу в електролітичній моделі електричного поля у вигляді, який відповідає розповсюдженій схемі електричного «містка Уітстона», наведена на рис. 3.2. Паралельно до ванни вздовж гілки ACB підключено дротяний потенціометр, рухомий повзунковий контакт у точці C якого, через осцилограф N є пов'язаний з металевим дротом. Цей дріт грає роль точкового зонду: якщо його вільний край опускається вертикально у будь-яку точку D ванни, то між точками C і D виникає синусоїдальна різниця потенціалів $\Delta\varphi_{CD}$.

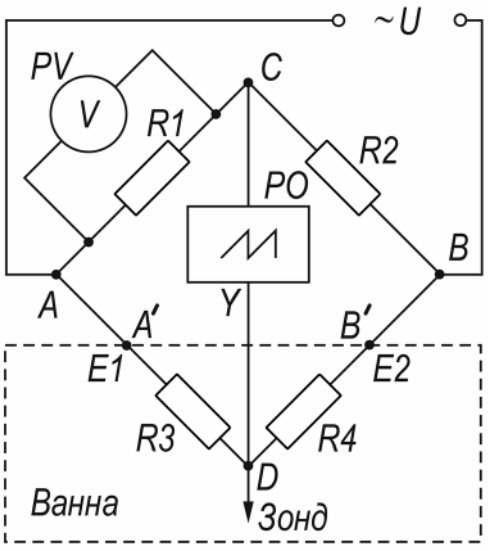


Рисунок 3.2

Одночасно на екрані осцилографа N виникає вертикальна риска, довжина якої пропорційна до $\Delta\varphi_{CD}$. Змінюючи положення зонду у ванні легко знайти точку з координатами (x, y), для якої риска на екрані нуль-індикатора збігається в точку, тобто $\Delta\varphi_{CD} = 0$. Такий стан мосту Уітстона вважається збалансованим: тоді ліве $R_1^{(AC)}$ та праве $R_2^{(CB)}$ плечі потенціометра (рис. 3.2) разом з лівим $R_3^{(A'D)}$ та правим $R_4^{(DB')}$ опорами частин електроліту відповідають пропорції:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \quad \text{а} \quad \varphi_C = \varphi_D \tag{3.4}$$

Якщо відлік потенціалу вести від точки A, то $\varphi_A = 0$ і різниця потенціалів

$$\varphi_C - \varphi_A = \Delta\varphi_{CA} = \varphi_C = \varphi_D .$$

Як видно зі схеми, вимірюючи електронним вольтметром різницю потенціалів $\Delta\varphi_{CA}$, одержують значення потенціалу φ_D у точці $D(x, y)$ електроліту. Якщо не змінюючи положення повзункового контакту C потенціометру, а тільки за рахунок переміщення зонду вздовж лінії електродів та за їх межі кожний раз на 2-3 *см* і так далі, домагатися точок збалансованого стану мосту Уітстона, то ці точки, що мають різні координати (x, y) відповідають однаковому значенню потенціалу, тобто є еквіпотенціальними. Якщо з'єднаємо ці точки плавною кривою, одержимо еквіпотенціальну лінію. Такі еквіпотенціальні лінії є двомірні аналоги еквіпотенціальних поверхонь реального конденсатора. На завершення опису лабораторного пристрою: завдяки дуже великим вхідним опорам осцилографа і електронного вольтметра електронними струмами через них і пов'язаними зі струмами викривленнями картини розподілу потенціалу у ванні можна знехтувати. Маючи картину розподілу потенціалу електричного поля розглянемо шлях визначення на її основі картини ліній вектору напруженості $\vec{E}$. Для розрахунку модуля і напрямку вектору $\vec{E}$ у деякій точці $M(x_1, y_1)$ треба вибрати на карті дві сусідні еквіпотенціальні лінії з потенціалами φ_1 та φ_2, перша з яких має цю точку. Далі слід використати допоміжні осі $x - y$, які мають перетинатися в цій точці (x, y), а другу лінію будуть перетинати у точках (x_2, y_1) та (x_1, y_2) (відносно координатної сітки). Визначивши різниці $\Delta x_{12} = x_2 - x_1$, $\Delta y_{12} = y_2 - y_1$ та $\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$ розрахувати складові вектору $\vec{E}$:

$$E_x = -\frac{\Delta\varphi_{12}}{\Delta x_{12}}, \; E_y = -\frac{\Delta\varphi_{12}}{\Delta y_{12}} . \tag{3.5}$$

Відповідно до формули (3.1) у двомірному випадку

$$\vec{E}_M = -\nabla\varphi_{12} = -\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\vec{i} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\vec{j}\right) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \ . \qquad (3.6)$$

За законом складання векторів $E_x\vec{i}$ та $E_y\vec{j}$, які слід намалювати на допоміжних осях відносно точки M, можна намалювати вектор напруженості електричного поля у точці M. Він мусить бути перпендикулярним до еквіпотенціальної лінії. На грунті положень (3.2) відносно властивостей силових ліній, легко накласти на мапу еквіпотенціальних ліній картину ліній вектору $\vec{E}$ поля зарядженого конденсатора.

3.4 Дослідження електричного поля між двома плоскими обкладинками конденсатора.

1. Розмістити ванні з електролітом пластину з двома електродами, що моделюють плоский конденсатор. Електроди навмисно мають різну довжину щоб більш наочно показати особливості неоднорідного електричного поля на краях зарядженого конденсатора. Намалювати на папері в клітинку в масштабі 1:1 положення електродів відносно координатної сітки (x, y).

2. Зібрати електричну схему пристрою (рис. 3.1) (точки A та B підключені до живлення через вимикач).

3. Включити живлення, осцилограф, вольтметр.

4. Змінюючи положення рухомого контакту C потенціометра визначити вольтметром потенціали плоских електродів φ_A та φ_B.

5. Для значень напруги на вольтметрі U =4; 5,5; 7 ; 8,5 ; 10 B, які встановлюють рухомим контактом потенціометра, визначити координати (x, y) еквіпотенціальних точок за п.3.3 між електродами зсередини доверху далеко за їх межами, занести їх координати у таблицю 3.1 і перенести на папір з малюнком паралельних електродів.

Таблиця 3.1 – Координати еквіпотенціальних точок

φ_1 = 4 В		φ_2 = 5,5 В		φ_3 = 7 В		φ_4 = 8,5 В		φ_5 = 10 В	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y

6. Об’єднуючи еквіпотенціальні точки намалювати 5 еквіпотенціальних ліній, які зсередини заходять доверху далеко за границі країв електродів.

7. З картини еквіпотенціальних ліній треба вибрати на кожній лінії 2-3 точки A, B, C, D і т.д. на ділянках найбільшої кривини навколо країв електродів. На грунті формування пар ліній та за допомогою формул зв’язку напруженості та потенціалу (3.5) визначити і намалювати складові E_x та E_y для усіх точок. За принципом суперпозиції (3.6) визначити і намалювати усі вектори напруженості. Заповнити таблицю 3.2.

Таблиця 3.2 – Дані прямих та непрямих вимірювань $\Delta\varphi$= 1,5 В

	x_1	y_1	x_2	y_2	Δx	Δy	$E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$	$E_y = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}$	$E_i = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$
A									
B									
C									
D									
F									

8. Маючи побудовані на малюнку вектори напруженості у різних точках електричного поля провести силові лінії вектору напруженості на умовах, сформульованих Фарадеєм.

9. Розрахувати абсолютні похибки відповідно до формул (3.5).

3.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань у вигляді таблиць, рисунок 5-ти еквіпотенціальних ліній на координатній мапі з електродами, розрахунки для векторів напруженості та їх розташування на координатній мапі разом із силовими лініями електричного поля, з визначеними абсолютними похибками відповідно до формули (3.5), стислі висновки.

3.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що називається напруженістю і потенціалом електричного поля?
2. Дати визначення лініям напруженості ті еквіпотенціальним поверхням.

3. Чому простіше дослідити поле струмів у провідному середовищі, ніж поле статичних зарядів?

4. На основі чого вивчення поля статичних зарядів замінюється вивченням поля струмів в провідному середовищі?

5. Навіщо на електроди експериментального пристрою (рис. 3.1) подається змінна напруга?

6. Пояснити принцип дії експериментального пристрою.

7. Вивести формулу для визначення потенціалів плоского конденсатора.

8. Сформулювати і записати принцип суперпозиції для напруженості і для потенціалу електричного поля.

9. Записати формулу зв’язку напруженості та потенціалу електричного поля.

4 ВИЗНАЧЕННЯ ЄМНОСТІ КОНДЕНСАТОРА

4.1 Мета роботи

Експериментально дослідити характер зв'язку між зарядом конденсатора, його електричною ємністю та різницею потенціалів між його обкладками; теоретично обґрунтувати та експериментально підтвердити можливість вимірювання величини електричної ємності за допомогою магнітоелектричного гальванометра.

4.2 Методичні вказівки до організації самостійної підготовки студентів

Конденсатор – це система з двох провідників, розділених тонким шаром діелектрика. Його електричну ємність C формально можна визначити як коефіцієнт пропорційності між зарядом q та напругою на обкладках U: $q = C \cdot U$.

Замикання конденсатора на дротяну рамку магнітоелектричного гальванометра супроводжується її кутовим відхиленням. Фізичні основи роботи гальванометра магнітоелектричної системи описані в лабораторній роботі №1 даних методичних вказівок. Причиною відхилення магнітної рамки, яка знаходитися у магнітному полі даного приладу, є момент сили Ампера, що виникає в результаті дії струму під час вмикання зарядженого конденсатора на рамку. Сила цього струму визначається зміною заряду на кінцях провідника рамки від $q_1 = 0$ до $q_2 = C \cdot U$ за час Δt замикання на них конденсатора:

$$i_0 = \frac{(q_2 - q_1)}{t} = \frac{C \cdot U}{\Delta t}.$$

Метою дослідження руху рамки в магнітному полі є визначення характеру залежності максимального її кутового відхилення φ_m від величини заряду на конденсаторі $q = C \cdot U$ під час замкнення на розрядження.

Метою теоретичного дослідження руху рамки зі стрілкою магнітоелектричного гальванометра є визначення характеру залежності максимального кутового відхилення рамки від величини електричної ємності зарядженого конденсатора під час та після його замикання на зарядження через цей вимірювальний прилад.

Зміну положення рамки зі струмом в магнітному полі можна описати рівнянням динаміки для обертального руху:

$$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - M_0 - M_\partial, \qquad (4.1)$$

де I – момент інерції рамки;

$M = NBSi_0 e^{-t/\tau}$ – момент сили Ампера, що діє на рамку за час вмикання зарядженого конденсатора на прилад та під час його розряджання;

N – кількість витків рамки;

B – магнітна індукція магніту гальванометра;

S – площа перерізу рамки;

$\tau = RC$ – стала часу розряджання конденсатора;

$M_0 = k_0 \cdot l \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}$ – момент сили опору середовища, в якому рухається рамка;

$M_\partial = k \cdot l \cdot \varphi$ – момент сил пружної деформації пружин кутової фіксації рамки в приладі.

Рівняння (4.1) після приведення стандартних замін та підстановок має такий вигляд:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = f_0 e^{-t/\tau}, \qquad (4.2)$$

де $\beta = \dfrac{k_0 l}{2I}$ – коефіцієнт згасання коливань;

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{kl}{I}}$ – власна циклічна частота вільних коливань рамки;

$f_0 = \dfrac{NBS}{I} i_0$ – максимальне значення функції від сили Ампера.

Розв'язок рівняння (4.2) для $\beta < \omega_0$ має загальну та часткову складові:

$$\varphi(t) = ce^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + \varphi_\partial e^{-t/\tau}, \qquad (4.3)$$

де $\varphi_\partial = \dfrac{f_0\tau^2}{1 - 2\tau\beta - \tau^2\omega_0^2}$ – динамічна складова кута відхилення рамки, яка визначається результатом часткового розв'язку рівняння (4.2).

Початкове кутове положення стрілки приладу прийнято вважати за точку нульового відліку. Тобто в рівнянні (4.3) $\varphi_0 = 0$. Максимальне відхилення стрілки відбувається за час Δt замикання зарядженого конденсатора на прилад. Тому на початку розрядження при $t = 0$ $\varphi(0) = \varphi_m$. Урахування цих умов у рівнянні (4.3) дозволяє отримати значення сталої інтегрування: $c = \varphi_m - \varphi_\partial$. Після підстановки цього значення в (4.3) маємо такий вираз розв'язку рівняння (4.2):

$$\varphi(t) = (\varphi_m - \varphi_\partial)e^{-\beta t}\cos(\omega_0 t) + \varphi_\partial e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (4.4)$$

Величина φ_m залежить від багатьох параметрів системи, зокрема від початкового заряду конденсатора q. Залежність $\varphi_m = f(q)$ можна отримати з умови $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$ для моменту часу $t = 0$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -(\varphi_m - \varphi_\partial)\beta e^{-\beta t}\cos(\omega_0 t) - (\varphi_m - \varphi_\partial)e^{-\beta t}\omega_0\sin(\omega_0 t) - \tau^{-1}\varphi_\partial e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (4.5)$$

Після нескладних перетворень і підстановок отримаємо залежність $\varphi_m = f(q)$ у такому вигляді:

$$\varphi_m(q) = \varphi_\partial \frac{\beta t - 1}{\beta t} = \frac{NBS\tau(\tau\beta - 1)}{I\beta\Delta t(1 - 2\tau\beta - \tau^2\omega_0^2)} \cdot UC = \alpha \cdot UC. \qquad (4.6)$$

Коефіцієнт α в рівнянні (4.6) залежить від $\tau = RC$. Тому в точному розумінні залежність (4.6) $\varphi_m = f(C)$ не є лінійною від ємності конденсатора. Але в першому наближенні нею можна скористатися для експериментальної оцінки величини електричної ємності конденсатора з похибкою, яка не перевищує похибок прямих вимірювань у відповідних експериментальних залежностях $\varphi_m = f(C)$ для $U = const$:

$$\varphi_m(C) = \alpha C + \varphi_0$$

де φ_0 – точка перетину лінійною залежністю $\varphi_m = f(C)$ вісі кута відхилення φ_m, α – стала (тангенс кута нахилу), яка знаходиться з відповідних до напруг графіків $\varphi_m = f(C)$:

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi_m}{\Delta C}. \qquad (4.7)$$

Звідки визначається невідома електрична ємність:

$$C_x = \frac{\varphi_m(C_x) - \varphi_0}{\alpha}. \qquad (4.8)$$

4.3 Опис лабораторної установки

На панелі змонтована схема (рис. 4.1). Як джерело використовується блок живлення ІПС з напругою, що регулюється. Ємності конденсаторів $C_1 - C_5$ наведено на лабораторному макеті. Ємності конденсаторів C_{x1} та C_{x2} невідомі.

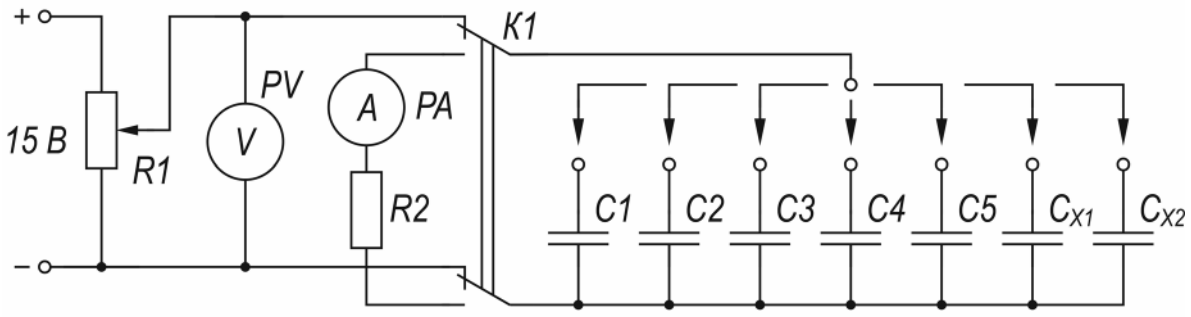


Рисунок 4.1

4.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. За допомогою потенціометра блока живлення виставити напругу $U = 9\ B$.

2. Приєднати до схеми (рис 4.1) конденсатор C_1.

3. Поставити перемикач *К1* в положення для зарядження конденсатора.

4. Перевести перемикач *К1* в положення для розрядження і зафіксувати число поділок, відповідне до максимального кута відхилення стрілки гальванометра.

5. Виконати завдання п.п. 2–4 для кожного з відомих та невідомих конденсаторів. Дані занести до таблиці 4.1.

6. Повторити завдання пп. 1–5 для інших напруг. Результати занести до табл. 4.1.

7. Побудувати графіки експериментальних залежностей $\varphi_m = f(C)$ для кожного значення напруги U окремо.

Таблиця 4.1 – Результати вимірювань максимального кута відхилення

		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_{x1}	C_{x2}
$U = 9\ B$	φ_m							
$U = 11\ B$								
$U = 13\ B$								
$U = 15\ B$								

8. За допомогою графіків визначити за формулою (4.7) значення α для кожного U.

9. За допомогою формули (4.8) визначити значення електричних ємностей конденсаторів C_{x1} та C_{x2}, а також їх середні значення.

10. Обчислити похибки вимірювань.

4.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиці, графіки залежностей $\varphi_m = f(C)$, результат обчислення C_{x1} та C_{x2}, обчислення похибок, стислі висновки.

4.6 Контрольні запитання і завдання

1. Дайте визначення електроємності відокремленого провідника, конденсатора. У яких одиницях вона вимірюється?

2. Від чого залежить ємність відокремленого провідника?

3. Що таке конденсатор?

4. Виведіть формули для ємності плоского та сферичного конденсаторів.

5. Написати рівняння кутового відхилення рамки гальванометра при замиканні на нього зарядженого конденсатора.

6. Дати визначення усіх фізичних величин, які входять до рівняння руху рамки та розкрити їх фізичний зміст.

5 ВИВЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СЕГНЕТОЕЛЕКТРИКІВ

5.1 Мета роботи

Дослідити явище електричного гістерезису для сегнетоелектрика, використовуючи осцилографічний метод спостереження, знайти експериментально залежність діелектричної проникності від напруженості електричного поля.

5.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Сегнетоелектриками називаються кристалічні діелектрики, які можуть мати за відсутністю зовнішнього електричного поля в певному інтервалі температур спонтанну поляризованність, що істотно змінюється під впливом зовнішніх факторів. Звичайно сегнетоелектрики не є однорідно поляризованими, а складаються з доменів – хаотичних областей з різними напрямками вектора поляризованності. Тому сумарний електричний дипольний момент зразка практично відсутній.

Основні специфічні властивості сегнетоелектриків – надзвичайно великі значення діелектричної проникності ε (сягає $10^4 - 10^5$) і нелінійна залежність вектора поляризованності $\vec{P}$ від напруженості електричного поля $\vec{E}$. При внесенні сегнетоелектрика в зовнішнє електричне поле $\vec{E}$ він поляризується. Спочатку збільшення поляризованості пов'язано з тим, що межі між доменами зміщуються так, що об'єми доменів, поляризованих по полю, збільшуються за рахунок доменів, поляризованих проти поля, а потім, зі збільшенням $\vec{E}$ – за рахунок повороту вектора поляризації $\vec{P}$.

Відомо, що вектор електричного зміщення

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \tag{5.1}$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля в діелектрику;

$\vec{P}$ – вектор поляризації діелектрика.

Для ізотропних однорідних діелектриків зв'язок між $\vec{E}$ і $\vec{P}$ в області не надто сильних полів є лінійним:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \tag{5.2}$$

де χ — діелектрична сприйнятливість.

Але в сегнетоелектриках залежність $\vec{P}$ від $\vec{E}$ нелінійна (рис. 5.1). В цьому випадку вважається, що в співвідношенні (5.2) величина χ – не є стала, а є функцією від напруженості електричного поля: $\chi = f(E)$. При розміщенні сегнетоелектриків у зовнішньому змінному електричному полі, завдяки доменній струк-

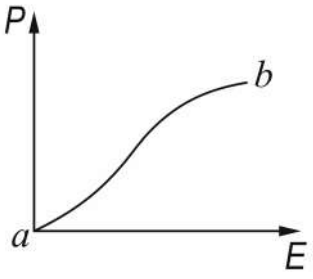


Рисунок 5.1

турі сегнетоелектрика можна спостерігати явище електричного гістерезису. Це явище полягає в тому, що при зменшенні зовнішнього електричного поля зміна поляризації P відбувається не по початковій кривій ab (рис. 5.1), а по новій bc, розташований вище (рис. 5.2).

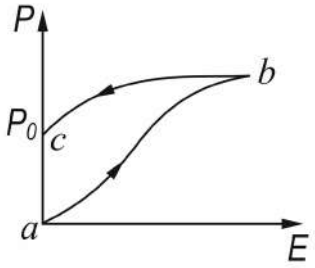


Рисунок 5.2

Це пов'язано з тим, що поляризований стан в сегнетоелектриках зберігається навіть після зниження напруженості поля E до нуля (залишкова поляризованність P_0). Тобто, поляризованність сегнетоелектрика P не визначається однозначно значенням напруженості поля E, а залежить від попереднього стану сегнетоелектрика. Щоб зняти залишкову поляризацію, необхідно змінити напрямок зовнішнього електричного поля на протилежний. Величина напруженості зовнішнього електричного поля, при якій поляризація перетворюється в нуль, називається коерцитивною силою E_x сегнетоелектрику (рис. 5.3).

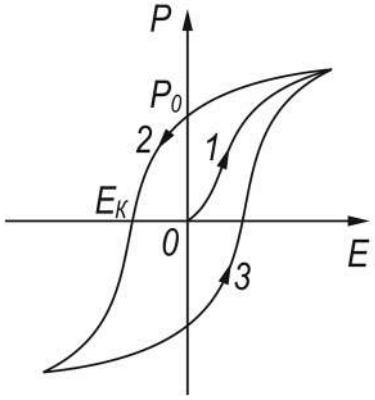


Рисунок 5.3

Якщо сегнетоелектрики розмістити в електричному полі, що змінюється за величиною і напрямком, внаслідок гістерезису залежність $P = f(E)$ матиме вигляд замкненої кривої (рис. 5.3), яка називається петлею гістерезису. Аналогічний вигляд має і залежність $D = f(E)$. Це випливає з того, що при $\chi >> 1$ вектор поляризації

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} >> \varepsilon_0 \vec{E}\,.$$

Тоді у співвідношенні (5.1) отримаємо, що $D \approx P$.

У лабораторній роботі досліджується залежність $D = f(E)$ для титанату барію ($BaTiO_3$), який є сегнетоелектриком в області температур від 5 до 120 °С.

5.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з осцилографа (*PO*), джерела регульованої змінної напруги (*U*), досліджуваного сегнетоелектрика (титанат барію) (*C*), вольтметрів змінної напруги ($PV1$ та $PV2$), набору з'єднувальних провідників.

Дослідження гістерезису (відставання) залежності заряду на обкладках конденсатора від прикладеної напруги проводять схемою, зображеною на рис. 5.4.

Змінна регульована напруга, яка знімається з потенціометра *R*, подається на подільник напруги, який складається з опорів $R1$ $R2 = 100$ *кОм*.

Паралельно подільнику ввімкнені дві послідовно з'єднані ємності: сегнетоконденсатор (вариконд) C і еталонний конденсатор C_0 = 1 мкФ, причому $C_0 >> C$.

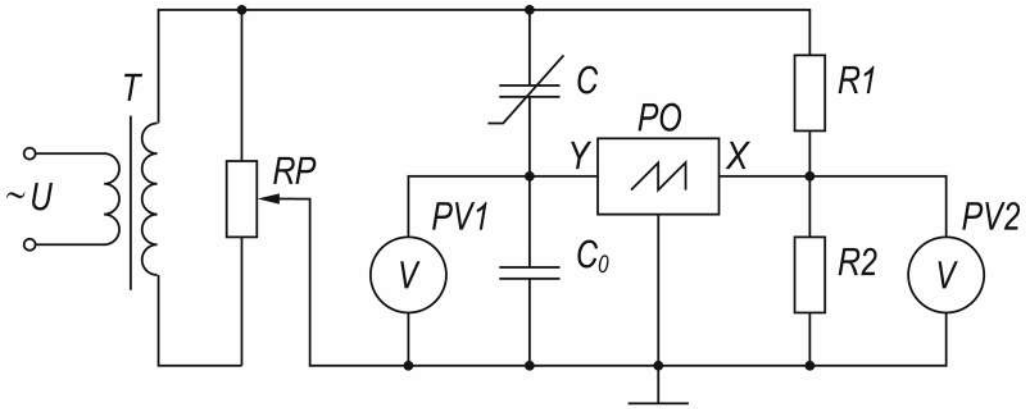


Рисунок 5.4

Із схеми видно, що на пластини горизонтального відхилення подається напруга U_x з резистора $R2$.

$$U_x(t) = \frac{U(t)}{R1 + R2} \cdot R2. \qquad (5.3)$$

Тоді горизонтальне відхилення променя пропорційне миттєвому значенню прикладеної напруги $U(t)$. Змінна напруга $U(t)$, яка знімається з потенціометра R, прикладена, в основному, до вариконду C (бо $C_0 >> C$) і створює в ньому електричне поле напруженістю

$$E(t) = \frac{U(t)}{d}, \qquad (5.4)$$

де d – товщина пластини сегнетоелектрика.

Якщо підставити $U(t)$ із формули (5.3) в (5.4), отримаємо

$$E(t) = \frac{R1 + R2}{R2 \cdot d} \cdot U_x(t). \qquad (5.5)$$

Вертикальні відхилення променя на екрані осцилографа пропорційні напрузі U_y на еталонному конденсаторі C_0.

$$U_y = \frac{q_0(t)}{C_0},$$

де $q_0(t)$ – заряд на обкладках конденсатора C_0.

Так як конденсатори C і C_0 увімкнені послідовно, то заряди на обкладинках обох конденсаторів однакові: $q(t) = q_0(t)$. Тоді

$$U_y(t) = \frac{q(t)}{C_0} = \frac{\sigma(t)S}{C_0}, \qquad (5.6)$$

де $\sigma(t)$ – поверхнева густина вільних зарядів на обкладках сегнетоконденсатора, S – площа пластин вариконда.

Внаслідок того, що поверхнева густина вільних зарядів σ чисельно дорівнює електричному зміщенню D ($D = \sigma$), із співвідношення (5.6) знайдемо

$$D(t) = \frac{C_0}{S} \cdot U_y(t). \qquad (5.7)$$

Отже, електричне зміщення D пропорційне вертикальним відхиленням променя на екрані осцилографа (5.7), а напруженість електричного поля в сегнетоелектрику пропорційна зміщенню променя по горизонталі (5.5).

Вимкнувши розгортку осцилографа на екрані, можна спостерігати залежність $D = f(E)$, яка є петлею гістерезису. В зв'язку з тим, що $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, крива, яка спостерігається, відображає також залежність поляризованності $P = f(E)$ в іншому масштабі.

При виконанні роботи для виміру напруг U_x і U_y використовуються вольтметри, які показують ефективне значення напруг, тобто у формули для визначення E і D необхідно додати множник $\sqrt{2}$:

$$E = \frac{R1 + R2}{R2 \cdot d} \cdot U_x \cdot \sqrt{2}, \qquad (5.9)$$

$$D = \frac{C_0}{S} \cdot U_y \cdot \sqrt{2}. \qquad (5.10)$$

5.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Скласти схему (рис. 5.4). Увімкнути вимірювальні прилади і підготувати їх до роботи.

2. Вимкнувши розгортку осцилографа, встановити світну точку в центрі екрана, подати максимальну напругу на вариконд і зачекати декілька хвилин для прогріву сегнетоелектрика.

3. Отримати на екрані чітке зображення петлі гістерезису і розмістити її симетрично до центру екрана.

3. Отримати максимальний розмір петлі і зарисувати (сфотографувати) її.

4. Зафіксувати значення координати верхнього кінця петлі гістерезису, а також покази вольтметрів, та занести їх до табл. 5.1

5. Поступово зменшуючи за допомогою потенціометра R напругу живлення, повторити п.4 ще сім разів для різних напруг.

6. Визначити E і D за формулами (5.9) і (5.10) та занести їх до таблиці.

7. Побудувати графік $D = f(E)$.

8. Обчислити відносну діелектричну проникність $\varepsilon = \frac{D}{\varepsilon_0 E}$, її абсолютну похибку і побудувати графік $\varepsilon = f(E)$.

Таблиця 5.1 – Результати вимірювань та розрахунків

№	x, мм	y, мм	U_x, В	U_y, В	E, В/м	D, Кл/м^2	ε
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

5.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи; схему лабораторної установки; результати вимірювань, зведені в таблиці; графіки залежностей $D = f(E)$ та $\varepsilon = f(E)$ з зазначеними на них похибками; стислі висновки.

5.6 Контрольні запитання і завдання

1. Які речовини називають діелектриками?
2. Що таке поляризація діелектрика? Типи поляризації.
3. Що являє собою вектор поляризованності? Який його фізичний зміст?
4. Записати зв'язок вектора електричного зміщення з вектором поляризованності.
5. Що таке діелектрична проникність речовини?
6. Що таке спонтанна поляризація діелектриків?
7. Який клас діелектриків відноситься до сегнетоелектриків? Як поводять себе сегнетоелектрики у зовнішньому електричному полі?
8. Що являє собою явище гістерезису для сегнетоелектриків?
9. Що таке коерцитивна сила та залишкова поляризованість?

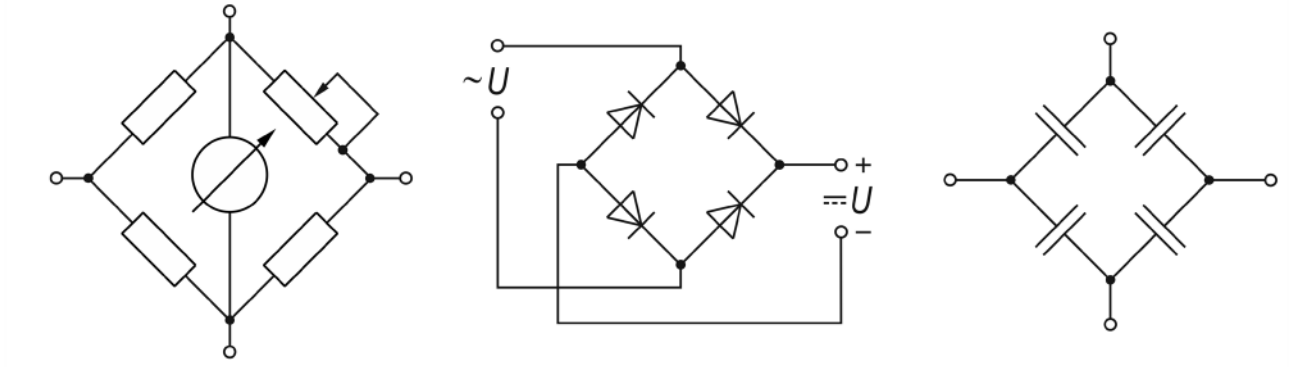
6 ВИМІРЮВАННЯ ОПОРІВ МЕТОДОМ МОСТОВОЇ СХЕМИ

6.1. Мета роботи

Навчитися використовувати правила Кірхгофа для розгалужених кіл, опанувати метод мостової схеми та визначити невідомі опори за допомогою цього методу.

6.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

В електричних схемах прийнято стандартним сукупностям елементів надавати загальні назви, наприклад, атенюатор, каскад та ін. Термін «міст» одержала структура, яку у схемах для наочності зображають у вигляді прямокутного ромба (рис. 6.1 а, б, в): а – диодний випрямляючий міст, б – міст ємкосний, в – міст резисторний.



а б в

Рисунок 6.1

Одним з найбільш точних методів вимірювання опорів є метод моста Уітстона, зображений на рис. 6.2.

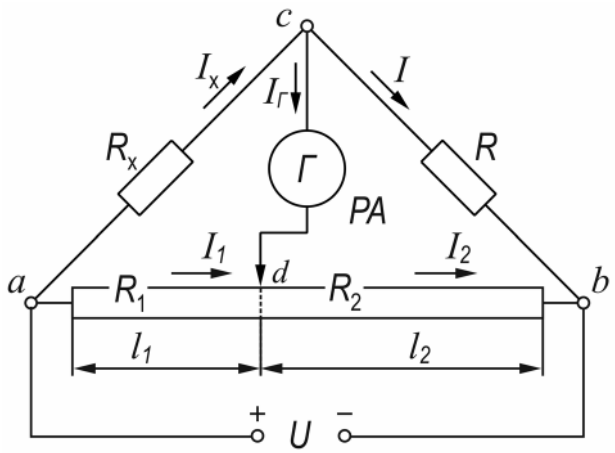


Рисунок 6.2

На схемі між клемами a і b встановлений калібрований дріт-реохорд, який має повзунковий контакт d. U – постійна напруга, що створюється джерелом живлення, R – відомий опір, R_x – невідомий опір, Γ – гальванометр, l_1 і l_2 – «плечі» реохорду (довжина частини дроту).

Метод вимірювання опорів за допомогою мосту Уітстона ґрунтується на порівнянні невідомого опору R_x з відомим опором R. Найбільш просто ця задача розв'язується за допомогою двох правил Кірхгофа для розгалужених ланцюгів. Будь-яка точка розгалуженого ланцюга, у якій сходиться не менш трьох провідників зі струмом, називається вузлом ланцюга. При цьому струм, що входить у вузол, вважається позитивним, а той що виходить з вузла - негативним.

При протіканні струму кожен вузол має залишатися нейтральним. Наслідком цього є перше правило Кірхгофа [2–5]: алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузол, дорівнює нулю:

$$\sum I_k = 0.$$

Друге правило Кірхгофа ґрунтується на законі Ома для повного кола й для ділянки кола [2-5] і має наступне формулювання: у будь-якому замкнутому колі, довільно обраному в розгалуженому електричному ланцюгу, алгебраїчна сума добутків сил струмів Ii на опори Ri відповідних ділянок цього контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС $\mathcal{E}_k$, які діють у даному колі:

$$\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_k .$$

Нехай струми в плечах моста та в діагоналі cd протікають так, як позначено на рис.6.1. Тоді за правилами Кірхгофа для розгалужених кіл можна скласти п'ять рівнянь з п'ятьма невідомими (на рис.6.1 як джерело ЕРС $\mathcal{E}$ використане джерело живлення U):

для вузла c: $I_x - I - I_\Gamma = 0,$ (6.1)

для вузла d: $I_1 - I_2 + I_\Gamma = 0,$ (6.2)

для контуру $acda$: $I_x R_x + I_\Gamma R_\Gamma - I_1 R_1 = 0,$ (6.3)

для контуру $abUa$: $I_1 R_1 + I_2 R_2 = U,$ (6.4)

для контуру $cbdc$: $IR - I_2 R_2 - I_\Gamma R_\Gamma = 0,$ (6.5)

де R_Γ – опір гальванометра ;

R_1 і R_2 – опори «плечей» реохорду.

Змінюючи положення повзункового контакту d реохорда (і тим самим змінюючи співвідношення між l_1 і l_2) можна добитися того, щоб потенціал точки d був рівний потенціалу точки c ($\varphi_d = \varphi_c$). У цьому випадку струм через гальванометр не протікає $I_\Gamma = 0$ (міст збалансований). Враховуючи це, рівняння (6.1), (6.2), (6.3), (6.5) слід спростити:

$$I_x = I\,, \tag{6.6}$$

$$I_1 = I_2\,, \tag{6.7}$$

$$I_x R_x = I_1 R_1\,, \tag{6.8}$$

$$IR = I_2 R_2\,. \tag{6.9}$$

Поділивши останні два рівняння одне на друге, отримаємо

$$\frac{I_x R_x}{IR} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_2}\,. \tag{6.10}$$

Враховуючи співвідношення (6.6), (6.7) рівняння (6.10) можна спростити:

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_1}{R_2}\,. \tag{6.11}$$

Опір «плечей реохорда визначається за формулами:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S}\,, \tag{6.12}$$

$$R_2 = \rho \cdot \frac{l_2}{S}\,, \tag{6.13}$$

де ρ – питомий опір дроту реохорда;

S – площа його поперечного перерізу.

Підставивши значення R_1 і R_2 у співвідношення (6.11), отримаємо формулу для визначення невідомого опору, де фігурує безрозмірне відношення «плечей» реохорду:

$$R_x = R \cdot \frac{l_1}{l_2} \tag{6.14}$$

В цій формулі точність вимірювання опору R_x обумовлена відношенням довжини «плечей», що вимірюються з великою точністю. Таким чином, підібравши відповідну довжину «плечей» реохорда l_1 і l_2, і знаючи еталонний опір R, можна визначити і R_x з високою точністю.

6.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з еталонного опору R, невідомих опорів (R_{x1}, R_{x2}, R_{x3}), реохорда, гальванометра, джерела постійної напруги (1-1,5 B).

Схема (рис. 6.2) відповідає схемі лабораторної установки. В лабораторній установці невідомими опорами є три резистори R_{x1}, R_{x2}, і R_{x3}.

Дослідним шляхом визначаються опори кожного з них та опори при їх комбінованому послідовному і паралельному включеннях.

6.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Скласти схему (рис. 6.2) з резистором R_{x1}.

2. Увімкнути джерело живлення. Переміщуючи повзунок реохорда встановити силу струму, що дорівнює нулю. Виміряти за шкалою реохорда довжину плечей l_1 і l_2 та занести результати до таблиці вимірювань (табл.6.1). Вимкнути джерело живлення.

Таблиця 6.1 Результати вимірювань та розрахунків.

Опір резисторів, з'єднання резисторів	l_1, *мм*	l_2, *мм*	R, *Ом*	Перевірка R, *Ом*
R_{x1}				
R_{x2}				
R_{x3}				
$R_{x1} + R_{x2}$				
$R_{x1} \parallel R_{x2}$				
$R_{x1} + R_{x2} + R_{x3}$				
$R_{x1} \parallel R_{x2} \parallel R_{x3}$				

3. За формулою (6.14) знайти невідомий опір. Результат занести до таблиці 6.1.

4. Виконати завдання п.2 та п.3, від'єднавши R_{x1} і під'єднавши замість нього R_{x2}, а потім R_{x3}.

5. Під'єднати до клем a і c як невідомий опір R_x, два резистори, що з'єднані паралельно, а потім послідовно. Виконати завдання п.2 та п.3.

6. Під'єднати до клем a і c як невідомий опір R_x, три резистори, R_{x1}, R_{x2}, R_{x3} що з'єднані паралельно, а потім послідовно. Виконати завдання п.2 та п.3.

7. Знаючи значення опорів R_{x1}, R_{x2}, і R_{x3} визначити за теоретичними формулами опори при їх паралельному і послідовному включеннях. Результати занести до таблиці 6.1.

8. Знайти похибки методу вимірювань.

6.5 Зміст звіту

Звіт має містити мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань, розрахунок невідомих опорів R_{x1}, R_{x2}, R_{x3}, розрахунки опору при послідовному та паралельному з'єднанні резисторів, виконані за допомогою мостової схеми і за допомогою теоретичних формул, статистичну обробку результатів вимірювань, стислі висновки.

6.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулювати і записати правила Кірхгофа.
2. Використовуючи правила Кірхгофа вивести формулу невідомого опору.
3. Від чого залежить опір провідника?
4. Як визначається опір при послідовному та паралельному з'єднаннях резисторів? Вивести відповідні формули.
5. При якому співвідношенні довжини «плечей» реохорда l_1 і l_2 похибка вимірювання R_x буде найменшою?
6. Які переваги має мостовий метод визначення опорів у порівнянні з використанням для цього амперметра та вольтметра?

7 ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ЗАРЯДЖАННЯ ТА РОЗРЯДЖАННЯ КОНДЕНСАТОРА

7.1 Мета роботи

Дослідження закономірностей квазістаціонарних струмів на прикладі процесів заряджання та розряджання конденсатора.

7.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Конденсатор - система з двох чи більше провідників (обкладинок), розділених діелектриком, яка має здатність накопичувати електричні заряди. Зв'язок між електричним зарядом на одній із обкладок конденсатора q та різницею потенціалів між обкладками U визначається співвідношенням

$$q = U \cdot C .$$

Розглянемо процес заряджання конденсатора за схемою, наведеною на рис. 7.1.

Після замикання ключа *K* по колу піде струм заряджання I, на обкладках конденсатора з'являться та почнуть зростати із часом електричні заряди, які будуть однаковими за величиною та протилежними за знаком. Одночасно почне зростати і різниця потенціалів (напруга) між обкладками конденсатора U_C доки не сягне значення, яке дорівнює ЕРС джерела напруги ε. Знайдемо закон, за яким змінюються струм заряджання I із часом. Згідно з другим законом Кірхгофа [2–5] миттєві значення суми падіння напруги на резисторі U_R та на ємності U_C – дорівнюють миттєвому значенні ЕРС ε.

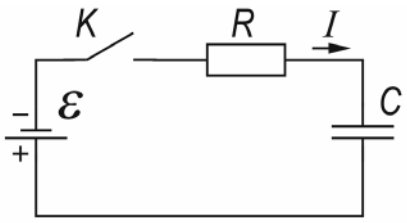


Рисунок 7.1

$$U_R + U_C = \varepsilon . \tag{7.1}$$

Але $U_R = IR$, $U_C = \frac{q}{C}$ тоді

$$IR + \frac{q}{C} = \varepsilon . \tag{7.2}$$

У рівняння (7.2) входять дві змінні величини: струм I та заряд q; вони пов'язані між собою співвідношенням:

$$I = \frac{dq}{dt} . \tag{7.3}$$

Продиференціюємо (7.2) за часом, враховуючи те, що ε, R та C – сталі величини, отримаємо:

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt}=0. \qquad (7.4)$$

Розділяючи змінні в (7.4) і враховуючи (7.3), знайдемо:

$$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt. \qquad (7.5)$$

Проінтегруємо праву частину рівняння (7.6) за часом від початку заряджання $t=0$ до якогось моменту t , а ліву частину – за струмом від початкового струму I_0 до якогось значення I, отримаємо:

$$\ln\frac{I}{I_0}=-\frac{t}{RC},$$

звідки

$$I=I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (7.6)$$

У графічному вигляді залежність (7.5) зображена на рис. 7.2.

В момент часу $t=RC$ струм заряджання зменшується в e раз по відношенню до початкового струму. Цей час позначають τ та називають сталою часу або часом релаксації:

$$\tau=RC.$$

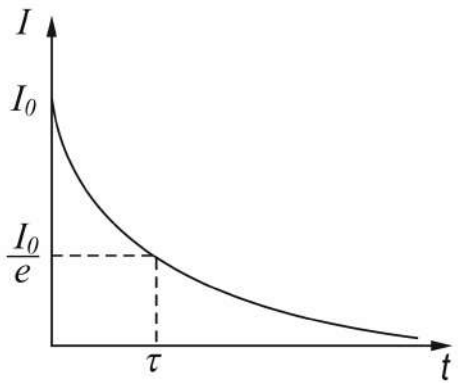


Рисунок 7.2

Напруга на конденсаторі U_C буде змінюватися із часом за законом:

$$U_C=\varepsilon-U_R=\varepsilon-I\cdot R=\varepsilon-R\cdot I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (7.7)$$

В початковий момент часу $t=0$, напруга на конденсаторі $U_C=0$. З цієї умови знайдемо струм I_0:

$$I_0=\frac{\varepsilon}{R}.$$

Початковий струм I_0 тече такий, який протікав би по опору R на схемі (рис. 7.1), коли б конденсатор C був короткозамкнений.

Підставляючи значення I_0 в (7.7), отримаємо:

$$U_C = \varepsilon \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \qquad (7.8)$$

Залежність $U_C(t)$ зображена на рис. 7.3. За час $t = \tau = RC$ напруга на конденсаторі сягне $U_C = 0{,}63\varepsilon$.

Розглянемо розрядження конденсатора через опір R за схемою, яка зображена на рис. 7.4. Після замикання ключа K позитивний заряд з верхньої пластини переміщується на нижню. Знайдемо залежність струму розряджання від часу.

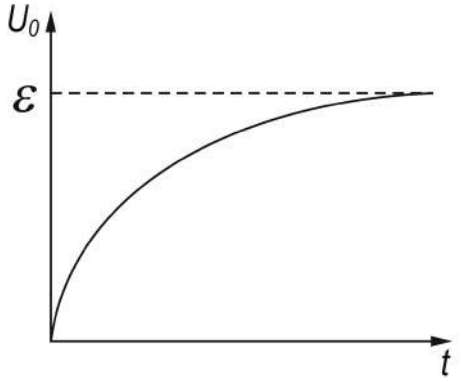


Рисунок 7.3

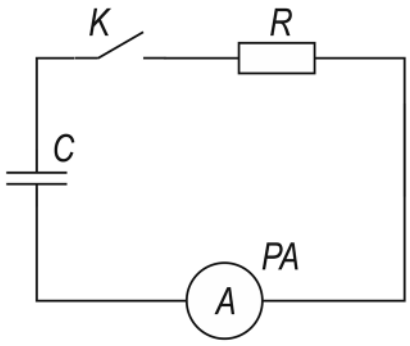


Рисунок 7.4

Сума падінь напруг на конденсаторі та резисторі дорівнює нулю тому, що в колі нема сторонніх сил.

$$U_C + U_R = 0, \qquad (7.9)$$

де $U_C = \frac{q}{C}, U_R = IR$.

Тоді

$$\frac{q}{C} + IR = 0.$$

Якщо продиференціювати останнє рівняння за часом та врахувати, що $\frac{dq}{dt} = I$, отримаємо

$$\frac{1}{C} I + \frac{dI}{dt} R = 0.$$

Розділяючи змінні, прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt. \qquad (7.10)$$

Інтегруючи це рівняння аналогічно рівнянню (7.5) визначимо

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (7.11)$$

Напруга на конденсаторі згідно з (7.9):

$$U_C = -IR = -RI_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (7.12)$$

Струм I_0 знайдемо з умови, що в момент часу $t = 0$ напруга на конденсаторі $U_C(0) = -I_0 R$. Підставляючи це значення в (7.12) отримаємо:

$$U_C = U_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (7.13)$$

На рис. 7.5 зображена залежність струму розряджання та напруги на конденсаторі від часу.

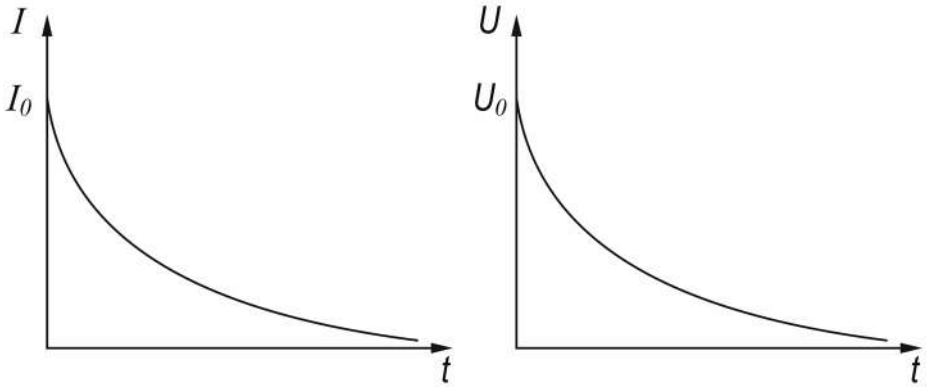


Рисунок 7.5

7.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з набору опорів: *R1*, *R2*, *R3*, *R4*, *R5*, набору ємностей: *C1*, *C2*, *C3*, *C4*, джерела регульованої постійної напруги 0-10 *В*; цифрового вольтметра В7–21А.

Електрична схема установки наведена на рис. 7.6 Як вимірювальний прилад використовується універсальний вольтметр В7–21А. Час установлення показань приладу складає приблизно 0,6 *с*. При виконанні роботи ця величина вважається малою.

Джерелом живлення служить джерело з регульованою напругою від 0 до 10 *В*. Ключ *K1* дає змогу швидко розрядити конденсатор.

7.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Зібрати схему (рис. 7.6), підключивши *R1* та *C1*. Зарядити конденсатор. Перемикач *K1* при цьому знаходиться у положенні «заряд».

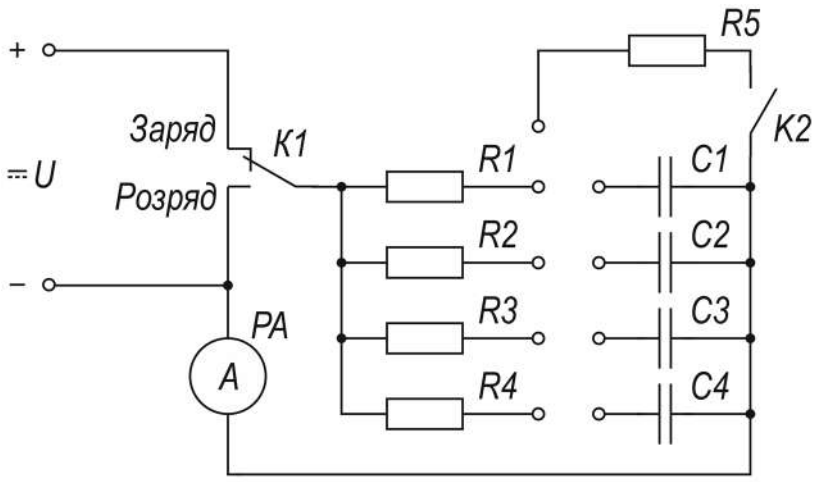


Рисунок 7.6

2. Ввімкнути перемикач *K1* на розрядження. Одночасно почати відлік часу через кожні 5 або 10 секунд, записуючи значення струму, визначене приладом В7–21А. Провести 8–10 вимірів.

3. Повторити виміри $I(t)$, послідовно замінюючи ємність *C1* у схемі (рис. 7.6) на *C2*, *C3*, *C4* при незмінних опорі *R1* та напрузі *U*. Побудувати графіки $I = f(t)$.

4. Зібрати схему (рис. 7.6), підключивши *R2* та *C2*. Зняти залежність $I = f(t)$.

5. Повторити вимірювання $I(t)$, послідовно замінюючи опори *R2* на *R1*, *R3*, *R4*. Побудувати графіки $I = f(t)$.

Таблиця 7.1 – Результати вимірювань

	t, c	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	140	160	180	200
I, мкА	$R1+C1$																
	$R1+C2$																
	$R1+C3$																
	$R1+C4$																
	$R2+C2$																
	$R1+C2$																
	$R3+C2$																
	$R4+C2$																

7.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань, зведені в таблицю, графіки залежностей $I = f(t)$, короткі висновки.

7.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що називається електроємністю відокремленого провідника?
2. Що називається взаємною електроємністю.
3. Що таке конденсатор?
4. Запишіть формулу, що визначає ємність плаского конденсатора.
5. Від чого залежить електроємність конденсатора?
6. Сформулювати закони Кірхгофа.
7. Запишіть формули залежності $I = f(t)$ і $U_C = f(t)$ при заряджанні конденсатора. Побудуйте графіки.
8. Запишіть формули залежності $I = f(t)$ і $U_C = f(t)$ при розряджанні конденсатора. Побудуйте графіки.
9. Що таке стала часу? Як її визначають із графіка $I = f(t)$?

8. ВИВЧЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ КОРОТКОГО СОЛЕНОЇДА ТА СИСТЕМИ ДВОХ СОЛЕНОЇДІВ.

8.1 Мета роботи

Ознайомитися із законом Біо-Савара-Лапласа, дослідити магнітне поле контуру зі струмом і перевірити принцип суперпозиції магнітного поля на прикладі двох коротких соленоїдів.

8.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Індукція магнітного поля B на осі кругового струму визначають на основі використання закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції магнітних полів [2,5]. Результат такого розрахунку для кругового струму призводить до співвідношення [2]:

$$B(x) = \mu_0 \frac{IR^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (8.1)$$

де R – радіус кругового струму;

μ_0 – магнітна стала;

I – сила струму;

x – відстань від центра кругового струму до точки M, яка знаходиться на осі кругового струму (рис. 8.1).

Індукція в центрі кругового струму ($x = 0$):

$$B(0) = B_0 = \mu_0 \frac{1}{2R}, \qquad (8.2)$$

З рис. 8.1 маємо: $\sin\theta = \frac{R}{(R_2 + x_2)^{\frac{1}{2}}}$.

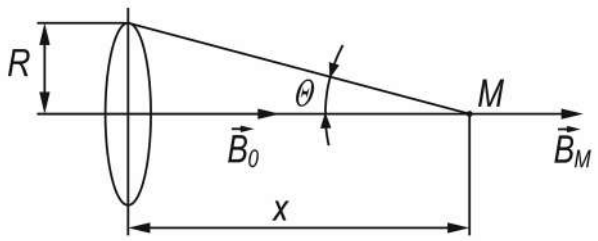


Рисунок 8.1

Тоді індукція магнітного поля в точці M має вигляд:

$$B = \mu_0 \frac{1}{2R} \sin^3 \theta = B_0 \sin^3 \theta . \qquad (8.3)$$

Якщо соленоїд має довжину l і кількість витків N, індукція магнітного поля на осі соленоїда визначається алгебраїчною сумою індукцій магнітних полів, які створюються в точці M кожним круговим витком (принцип суперпозиції). Для обчислення індукції в точці M вважатимемо, що на ділянку довжини соленоїда dx приходить n витків, де ndx - число витків на одиницю довжини соленоїда $n = \frac{N}{l}$. Тоді індукція магнітного поля в точці M, створена ділянкою соленоїда довжини dl, дорівнює:

$$dB = B_0 \sin^3 \theta n dx \qquad (8.4)$$

Виразимо змінну x через кут θ. Із рис. 8.2 випливає, що:

$$x = \frac{R}{tg} \quad \text{звідки} \quad dx = -\frac{R}{\sin \theta} d\theta .$$

Тоді

$$dB = -nB_0 R \sin\theta \cdot d\theta .$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо:

$$B = -\int_{\theta_1}^{\theta} nB_0 R \sin\theta \cdot d\theta = nB_0 R(\cos\theta - \cos\theta_1) .$$

Звичайно останнє співвідношення виражається через кути θ_1 і $\theta_2 = \pi - \theta_1$ (рис. 8.3). Тоді, враховуючи формулу (8.2), модуль магнітного поля у точці M:

$$B = \frac{\mu_0 nl}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) . \qquad (8.5)$$

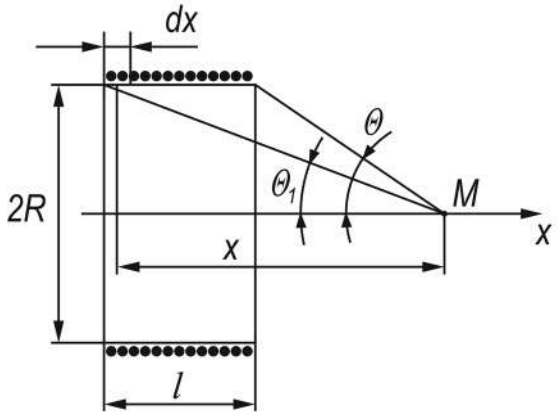


Рисунок 8.2

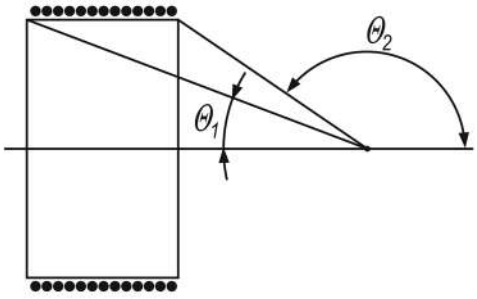


Рисунок 8.3

Індукція в центрі короткого соленоїда (рис. 8.4) (коли $\theta_1 = \theta_2$) має вигляд:

$$B = \mu_0 nI \cos\theta_1$$

Принцип суперпозиції магнітних полів можна перевірити експериментально, використовуючи також два коаксіальних коротких соленоїди (котушки Гельмгольца). Результуюче поле в точці M (рис. 8.5) в цьому випадку визначається алгебраїчною сумою індукцій, що створені кожною котушкою окремо, а розподіл поля вздовж осі соленоїдів $B(x)$ визначатиметься сумою кривих $B_1(x)$ і $B_2(x)$, створених кожною котушкою окремо (рис. 8.6).

На рис. 8.6 проілюстрована суперпозиція полів, створених котушками Гельмгольца при протіканні струмів одного напрямку.

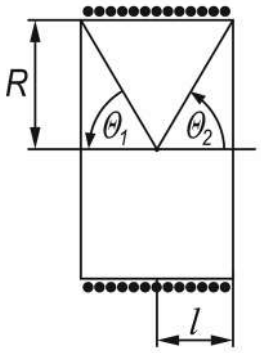


Рисунок 8.4

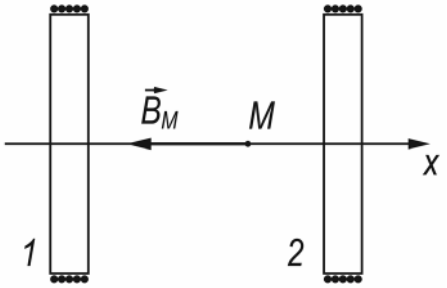


Рисунок 8.5

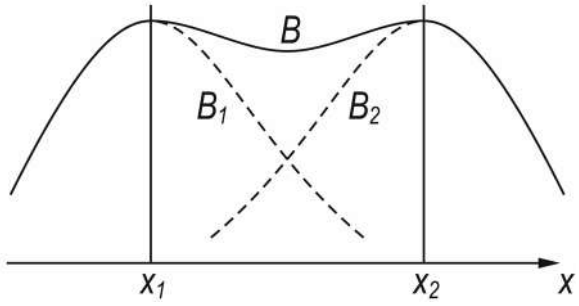


Рисунок 8.6

8.3. Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з двох котушок, одна з яких нерухома, а друга може переміщуватись. Відстань між центрами котушок визначається за шкалою, розташованою на панелі. Вимірювальний датчик може переміщуватися вздовж осі соленоїда. Датчик вимірює індукцію магнітного поля. Принцип дії його заснований на явищі електромагнітної індукції. Змінний струм, що протікає по соленоїду, створює в навколишньому просторі змінне магнітне поле, яке збуджує в котушці датчика ЕРС індукції

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} \cdot S \cdot N, \qquad (8.6)$$

де S – площа перерізу котушки датчика; N – кількість витків, що дорівнює 1500;

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(B_m \cos\omega t) = -\omega B_m \sin\omega t.$$

Тоді

$$\varepsilon = \omega B_m SN \sin \omega t = 2\pi\nu B_m SN \sin \omega t\,, \qquad (8.7)$$

де $\nu = 50\ Гц$ – частота мережі змінного струму.

У зв'язку з тим, що вимірювання проводяться вольтметром, який показує ефективне значення напруги $U_{еф}$, а вхідний опір вольтметра дуже великий, можна записати, що

$$\varepsilon = U_m \sin \omega t = \sqrt{2} U_{еф} \sin \omega t\,. \qquad (8.8)$$

Тоді із (8.7) з урахуванням (8.8) визначимо амплітуду значення індукції магнітного поля

$$B_m = \frac{U_{еф}}{\sqrt{2\pi\nu SN}} = k_1 U_{еф}\,, \qquad (8.9)$$

де $k_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\nu SN}} = 0.513 \cdot 10^{-4}\ Тл/мВ\,.$

Під час використання осцилографа, який вимірює одразу U_m, потрібно користуватися наступною формулою:

$$B_m = \frac{U_m}{\sqrt{2\pi\nu SN}} = k_2 U_m\,,$$

де $k_2 = 0{,}363 \cdot 10^{-4}\ Тл/мВ$

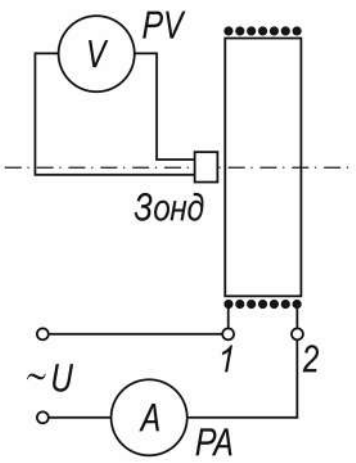


Рисунок 8.7

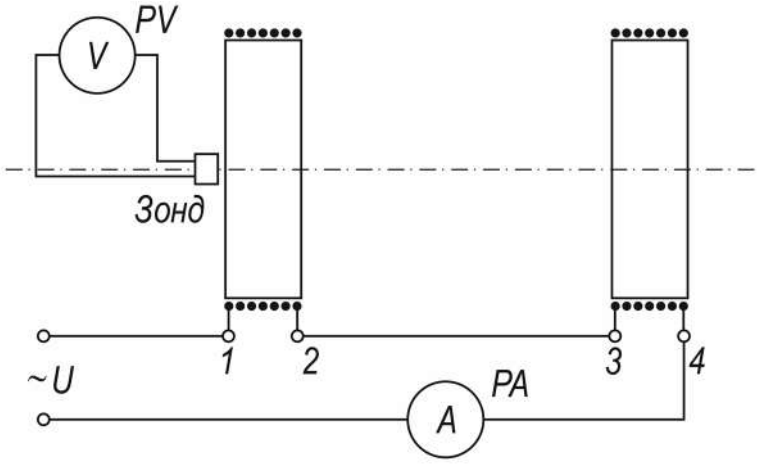


Рисунок 8.8

8.4. Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

$I = 200 - 250\ мА$. За допомогою вимірю-

U_0, що відповідає індукції в центрі соленоїда B_0. Переміщуючи зонд вздовж осі соленоїда, виміряти $B(x)$. Відстань x відрахувати за шкалою, розміщеною на стенді.

2. Побудувати графік $\frac{B(x)}{B_0} = \frac{U}{U_0} = f(x)$.

3. Перевірити правильність формули (8.3), для цього обчислити $\sin^3\theta = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)^3$ і нанести на попередній графік. Зробити висновок.

4. Встановити другу котушку на відстані, що дорівнює радіусу котушки, від першої. Під'єднати другу котушку до джерела і повторити попередні вимірювання. Струм, який проходить через котушку, має бути таким же, як і в попередніх вимірюваннях. Побудувати графік $B/B_0 = f(x)$, на який нанести вимірювання для кожної з двох котушок.

5. З'єднати обидві котушки послідовно і під'єднати їх до джерела струму (рис. 8.8). Встановити струм через котушки такий же, як і раніше. Переміщуючи датчик вздовж осі соленоїда, зняти розподіл $B(x)$. Визначити $B(x)/B_0$ і нанести результати на попередній графік. Довести, що принцип суперпозиції виконується.

8.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань, зведені в таблиці, графіки залежності $B/B_0 = f(x)$ для першої, другої і двох котушок; стислі висновки.

8.6 Контрольні запитання

1. Записати і пояснити закон Біо-Савара-Лапласа.
2. В чому суть принципу суперпозиції для індукції магнітного поля?
3. Вивести формули 8.1, 8.5, 8.9
4. Сформулювати закон електромагнітної індукції.
5. Пояснити спосіб вимірювання електромагнітної індукції.

9 ВИВЧЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ЯВИЩ НА ОСНОВІ ДОВГОГО СОЛЕНОЇДУ

9.1 Мета роботи

Дослідити магнітне поле довгого соленоїду. Перевірити виконання закону повного струму для довгого соленоїду. Визначити магнітну сталу.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Згідно з законом повного струму циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж довільного замкненого контуру дорівнює добутку магнітної сталої μ_0 на алгебраїчну суму струмів, охоплених цим контуром [2-5]:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{\eta} I_i , \qquad (9.1)$$

де η– число провідників зі струмами, охоплених контуром L довільної форми.

Визначимо індукцію магнітного поля довгого соленоїда. Розглянемо соленоїд довжиною l, з кількістю витків N і струмом у витках I.

Нехай довжина соленоїда l є набагато більшою за його діаметр D, тобто можна вважати соленоїд нескінченно довгим. Тоді всередині соленоїда магнітне поле є однорідним, зовні – дуже слабким (рис. 9.1), яким можна знехтувати.

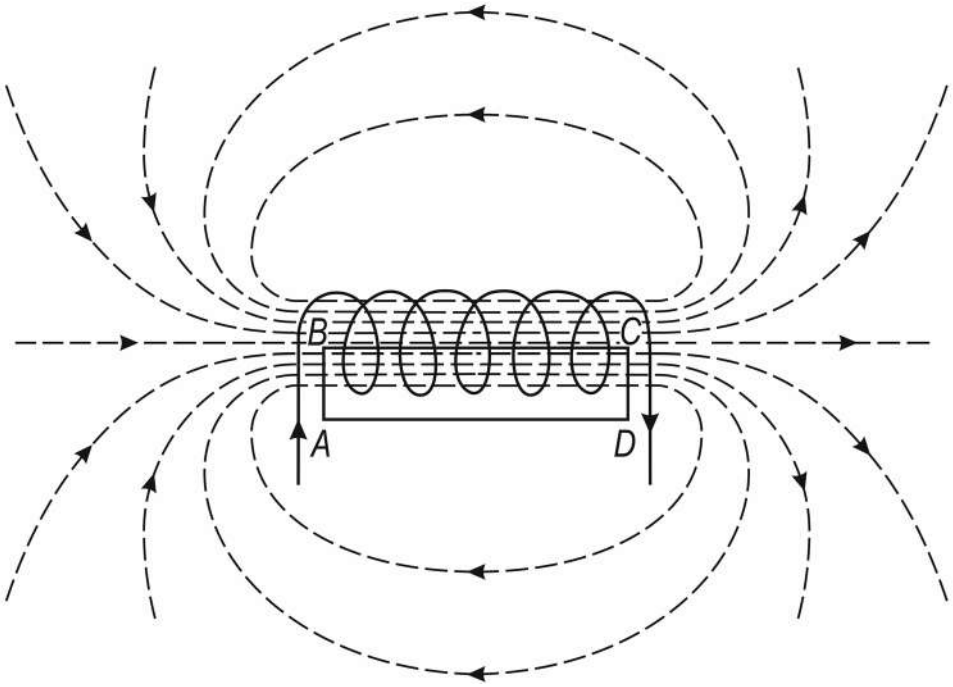


Рисунок 9.1

Для знаходження модуля вектора магнітної індукції B розглянемо контур $ABCDA$ (рис. 9.1). За формулою (9.1) маємо

$$\oint\limits_{ABCDA} B_l dl = \mu_0 NI ,$$

де $B_l = (\vec{B}, \vec{\tau})$, $\vec{\tau}$ – орт вектора $d\vec{l}$.

Інтеграл по замкненому контуру можна розглядати як суму чотирьох інтегралів

$$\oint\limits_{ABCDA} B_l dl = \int\limits_{AB} B_l dl + \int\limits_{BC} B_l dl + \int\limits_{CD} B_l dl + \int\limits_{DA} B_l dl .$$

На ділянках AB і CD $B_l = 0$ ($\vec{B} \perp d\vec{l}$), на ділянці DA (зовні соленоїда) $B \approx 0$, а на ділянці BC:

$$\int\limits_{BC} B_l dl = B_0 l ,$$

де B_0 – магнітна індукція всередині соленоїда.

Звідси маємо

$$\oint\limits_{ABCDA} B_l dl = B_0 l = \mu_0 NI .$$

Отже, величина магнітної індукції поля всередині нескінчено довгого соленоїда дорівнює

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI , \qquad (9.2)$$

де $n = \frac{N}{l}$ – лінійна густина витків соленоїда.

Реальні соленоїди завжди мають скінчену довжину. Відомо, що індукція магнітного поля на вісі короткого соленоїда визначається за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа [2-5]. Результат такого розрахунку має вигляд

$$B(x) = \frac{1}{2} B_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{(l + 2x)^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{(l - 2x)^2}}} \right). \qquad (9.3)$$

Зрозуміло, що при $D << l$ маємо $B(x) \approx B_0$, що відповідає довгому соленоїду.

9.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з довгого соленоїду з вимірювачем магнітної індукції, регульованого джерела змінної напруги, амперметра змінного струму, мілівольтметра змінного струму або осцилографа.

9.3.1 Соленоїд

Соленоїд складається із двох обмоток, навитих одночасно двома дротами діаметром $d = 1$ *мм* на циліндричний каркас. Одна обмотка E_1, що складається з 190 витків, має тільки крайні виводи на лицевій панелі.

Друга обмотка E_2, повна кількість витків якої також 190, має проміжні відведення, кількість витків в яких по відношенню до середини соленоїда вигравірувано на панелі. Діаметр намотки $D = 50$ *мм*, довжина намотки $L = 206$ *мм*. На панель нанесена також сантиметрова шкала, яка дозволяє визначити довжину соленоїда при використанні відповідного виводу. Ці відстані наведені також у табл. 9.1.

Таблиця 9.1 – Параметри обмотки E_2.

Номери виводів, *i*	Довжина соленоїда l_i, мм	*N*, кількість витків
1	10,8	10
2	21,6	20
3	43,2	40
4	64,8	60
5	108	100
6	151,2	140
7	206	190

9.3.2 Вимірювач магнітної індукції.

Для вимірювання магнітної індукції використовується зонд, який представляє з себе котушку, що має $N = 1500$ витків. Середній радіус намотки $r = 8{,}5$ *мм*. Котушка закріплена на держакові, що має шкалу із сантиметровими поділками для визначення положення зонду *x* відносно середини соленоїду. Принцип дії зонду базується на явищі електромагнітної індукції [2–5]. Відповідно до нього електрорушійна сила, що виникає у зонді при зміні магнітного потоку Ф через його площу поперечного перерізу *S*, дорівнює

$$\varepsilon = -W\frac{d\Phi}{dt} = -WS\frac{dB}{dt}. \qquad (9.4)$$

В зв'язку з тим, що індукція B усередині соленоїда, по якому протікає змінний струм, змінюється за гармонічним законом $B = B_m \cos \omega t$, то співвідношення (9.4) набуває вигляду

$$\varepsilon = WSB_m \omega \sin \omega t . \qquad (9.5)$$

При вимірюванні напруги приладом з великим вхідним опором можна вважати, що $\varepsilon = U = U_m \sin \omega t$, де кутова частота коливань ω пов'язана з лінійною частотою ν співвідношенням $\omega = 2\pi\nu$. Тоді формула (9.5) набуває вигляду

$$B_m = \frac{U_m}{WS2\pi\nu}.$$

При використанні вольтметрів змінної напруги необхідно враховувати, що вони проградуйовані у ефективних значеннях напруги $U_{еф}$. У цьому випадку $U_m = \sqrt{2} \cdot U_{еф}$. Тоді

$$B_m = \frac{\sqrt{2} \cdot U_{еф}}{WS2\pi\nu}. \qquad (9.6)$$

При використанні осцилографів для вимірювання напруги визначається безпосередньо U_m .

$$B_m = \frac{U_m}{2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot S \cdot W} = kU_m , \qquad (9.7)$$

де $k = 0.363 \cdot 10^{-4}$ *Тл / мВ*.

9.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

9.4.1 Вивчення магнітного поля всередині довгого соленоїду

1. Зібрати схему (рис. 9.2). підключивши $N = 10$ витків обмотки E_2.

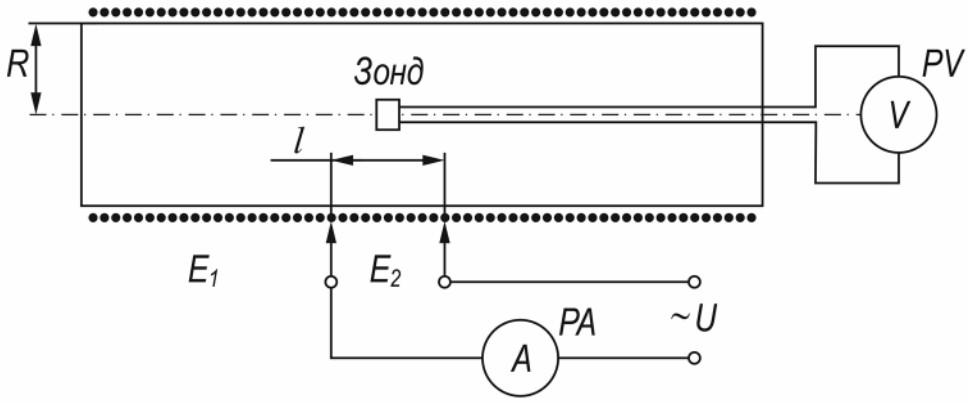


Рисунок 9.2

2. Встановити зонд у центрі соленоїду, використовуючи для цього шкалу на держаку зонду. Встановивши струм у колі $I = 250$ *мА*, виміряти напругу на клемах зонду.

3. Повторити вимірювання, послідовно підключаючи 20, 40, 60, 100, 140 та 190 витків обмотки E_2. Визначити індукцію магнітного поля у центрі соленоїду, скориставшись формулою (9.6) або (9.7) в залежності від використаного вимірювального пристрою.

4. Побудувати графік залежності індукції у центрі соленоїду від довжини соленоїду $B_0 = f(l)$, отримавши величину l з табл. 9.1. З побудованого графіка знайти, при якому співвідношенні довжини соленоїду l до його діаметру D соленоїд можна вважати нескінченно довгим.

9.4.2 Визначення магнітної сталої μ_0

1. Зібрати схему, наведену на рис. 9.2, підключивши повну довжину намотки соленоїду E_2.

2. Зняти залежність індукції B_0 у центрі соленоїду від сили струму I, який протікає по обмотці соленоїду. Побудувати графік залежності $B_0 = f(I)$.

3. З'єднати обмотки E_1 та E_2 послідовно та повторити попередні вимірювання. Нанести одержані дані на графік $B_0 = f(I)$.

4. Переконатися у тому, що індукція у центрі соленоїду B_0 пропорційна числу витків на одиницю довжини n, тобто $B \sim nI$.

5. З одержаних залежностей $B_0 = f(I)$ визначити коефіцієнт пропорційності a між B_0 та nI:

$$a = \frac{B}{n \cdot I}.$$

6.Порівняти одержані значення a з магнітною сталою μ_0

9.4.3 Визначення залежності індукції B від положення точки на вісі соленоїду.

1. Зібрати схему рис. 9.2, підключивши 100 витків обмотки E_2.

2. Встановити струм у колі біля 200 *мА* .

3. Переміщаючи зонд вздовж вісі соленоїду, зняти залежність індукції $B = f(x)$.

4. Побудувати графічно залежність $\frac{B(x)}{B_0} = f(x)$ на підставі проведених вимірювань.

5. Обчислити та нанести на той же графік теоретичну залежність

$$f_T(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{D^2}{(l + 2x)^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{D^2}{(l - 2x)^2}}} \right).$$

Порівняти експериментальну та теоретичну залежності.

9.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань, графіки залежностей $B_0 = f(l)$, $B_0 = f(I)$, $\frac{B}{B_0} = f(x)$, результати розрахунку магнітної сталої μ_0, короткі висновки.

9.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулювати закон Біо-Савара-Лапласа.
2. Сформулювати закон повного струму.
3. Вивести формулу для індукції магнітного поля у центрі нескінченно довгого соленоїду.
4. Пояснити, яким чином було знайдено числове значення μ_0.
5. Вивести формулу для індукції магнітного поля на вісі колового струму.
6. Вивести співвідношення 9.6.
7. За яких умов соленоїд можна вважати нескінченно довгим?

10 ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА

10.1 Мета роботи

Дослідити рух зарядженої частинки у взаємо перпендикулярних електричному і магнітному полях.

10.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

В даній роботі відношення e/m для електрона визначається за допомогою методу, який отримав назву «метод магнетрона». Ця назва пов'язана з тим, що конфігурація електричного і магнітного полів, яка використовується в роботі нагадує конфігурацію полів в магнетронах – генераторах електромагнітних коливань в області надвисоких частот.

Рух електронів в цьому випадку відбувається в кільцевому просторі, розташованому між катодом і анодом двохелектродної електронної лампи. Нитка розжарювання (катод) розміщується вздовж осі циліндричного аноду таким чином, що напруженість електричного поля напрямлена вздовж радіусу (рис. 10.1). Лампа розміщується всередині соленоїда, який створює магнітне поле, вектор індукції якого паралельний осі катоду. Розглянемо траєкторію електронів, які рухаються під дією електричного і магнітного полів. Вважатимемо, що початкова (теплова) швидкість електрона, який вилетів із катода, дорівнює нулю.

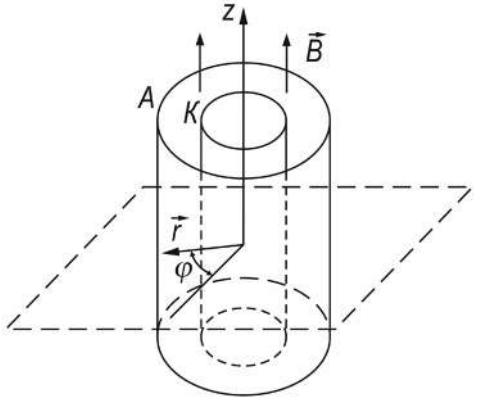


Рисунок 10.1

Тоді за заданої орієнтації електричного і магнітного полів рух електрона відбуватиметься в площині, перпендикулярній магнітному полю. Скористаємось полярною системою координат. В цьому випадку положення точки визначається відстанню від осі циліндра r, полярним кутом φ і зсувом вздовж вісі Z. Розглянемо спочатку сили, які діють на електрон збоку електричного поля. Напруженість електричного поля у циліндричному конденсаторі має тільки радіальну компоненту E_r. Тому сила, яка діє на електрон в такому полі спрямована по радіусу, так що

$$F_r^{эл} = eE_r,\ F_z^{эл} = F_\varphi^{эл} = 0. \qquad (10.1)$$

Розглянемо тепер сили, які діють на електрон з боку магнітного поля. Оскільки магнітне поле у нашому випадку спрямовано по вісі Z, для проекції сили на вісь Z маємо:

$$F_z^{маг} = 0. \qquad (10.2)$$

Інші дві складові сили знайдемо за допомогою формули Лоренца:

$$F_{\varphi}^{маг} = -e\upsilon_r B, \quad F_r^{маг} = e\upsilon_{\varphi} B. \tag{10.3}$$

З простих кінематичних міркувань зрозуміло, що

$$\upsilon_r = \frac{dr}{dt}, \quad \upsilon_{\varphi} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \tag{10.4}$$

Таким чином, ні магнітні, ні електричні сили, які діють на електрон, не мають складових по вісі Z. Рух вздовж вісі Z є рівномірним. Рух в площині (r, φ) зручно описати за допомогою рівняння моментів:

$$\frac{dL}{dt} = M_z, \tag{10.5}$$

де L – момент імпульсу електрона відносно осі Z, який дорівнює, як відомо, $mr^2 \dfrac{d\varphi}{dt}$. Величина M_z дорівнює $r \cdot F_{\varphi}$. За допомогою (10.1) і (10.3) знайдемо:

$$M_z = -er\upsilon_r B. \tag{10.6}$$

Після підстановки (10.4) і (10.6) у (10.5) знайдемо:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = -eBr\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}eB\frac{d\left(r^2\right)}{dt}. \tag{10.7}$$

Після інтегрування рівняння (10.7) і урахування негативного заряду електрона буде:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} + C = |e|Br^2 / 2m, \tag{10.8}$$

де C – стала інтегрування, яку треба визначити з початкових умов. На початку руху радіус r дорівнює радіусу катода і є досить малим. Права частина (10.8) і перший член лівої частини також дуже малі. З достатньою точністю можна припустити, що $C = 0$. Тоді рівняння буде мати простий вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{|e|B}{2m}. \tag{10.9}$$

Розглянемо тепер рух електрона вздовж радіусу. Робота сил електричного поля , яка виконується при переміщенні електрона від катода до точки з потенціалом U, дорівнює $A = eU$. Магнітне поле ніякої роботи не виконує. Знайдена робота повинна дорівнювати кінетичній енергії електрона (початковою швидкістю електрона ми знову нехтуємо):

$$eU = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m \cdot \left(\upsilon_r^2 + \upsilon_{\varphi}^2\right)}{2}.$$

За допомогою (10.4) і (10.9) знаходимо:

$$eU = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{reB}{2m}\right)^2\right]. \qquad (10.10)$$

Рівняння (10.10) визначає радіальний рух електрона.

Далі розглядаємо траєкторію електронів, які вилетіли із катода при анодній напрузі U_a. За відсутності магнітного поля (рис. 10.2) електрони рухаються прямолінійно вздовж радіуса. В слабкому полі траєкторія трохи викривляється, але електрон досягає анода. При збільшенні магнітного поля траєкторія викривляється настільки, що стає дотичною до анода. Це поле називається критичним $B_{кр}$.

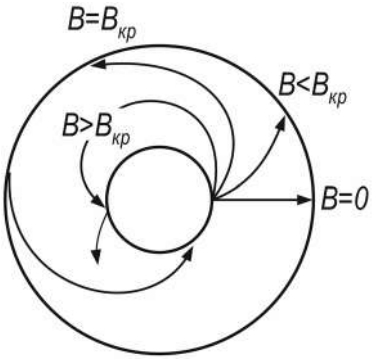


Рисунок 10.2

У випадку $B > B_{кр}$ електрон не потрапляє на анод і повертається до катода. Знайдемо величину $B_{кр}$ із співвідношення (10.8), звернувши увагу на те, що в цьому випадку радіальна швидкість електрона $\frac{dr}{dt}$ при $r = r_a$ перетвориться на нуль:

$$U_a = \frac{eB_{кр}^2 r_a^2}{8 \cdot m}, \qquad (10.11)$$

звідки

$$\frac{e}{m} = \frac{8 \cdot U_a}{B_{кр}^2 r_a^2}. \qquad (10.12)$$

Із формули (10.12) знаходимо e/m, якщо при заданому U_a визначене таке значення магнітного поля (або навпаки, при заданому B таке значення U_a), при якому електрони перестають попадати на анод.

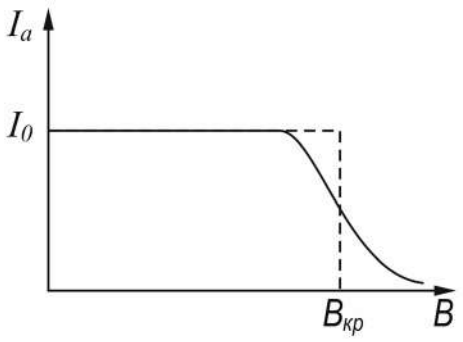


Рисунок 10.3

$B < B_{кр}$ всі електрони без винятку потрапляли б на анод, а при $B > B_{кр}$ всі б вони поверталися на катод, не досягнувши анода. Анодний струм I_a із збільшенням

магнітного поля змінювався б при цьому так, як це зображено на рис.10.3 пунктирною лінією. Але насправді електрони, які випускає катод, мають різні початкові швидкості. Тому критичні умови для різних електронів досягаються при різних значеннях *B*. Крива $I_a(B)$ набуває внаслідок цього вигляд похилої безперервної лінії (рис. 10.3).

10.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з вакуумного діоду *VL* з циліндричним анодом, соленоїда *L*, мікроамперметра *PA2*, міліамперметра *PA1*, змінного резистора *R1*, вольтметра *PV* для вимірювання постійної напруги до 3 В, регульованого джерела живлення. Принципова електрична схема установки зображена на рис. 10.4.

Обмотка соленоїда підключена до блоку живлення з регульованою напругою. Індукція магнітного поля всередині соленоїда без осердя прямо пропорційна силі струму, який протікає по обмотці $B = DI_c$. Значення коефіцієнта пропорційності D наведено на робочому місці.

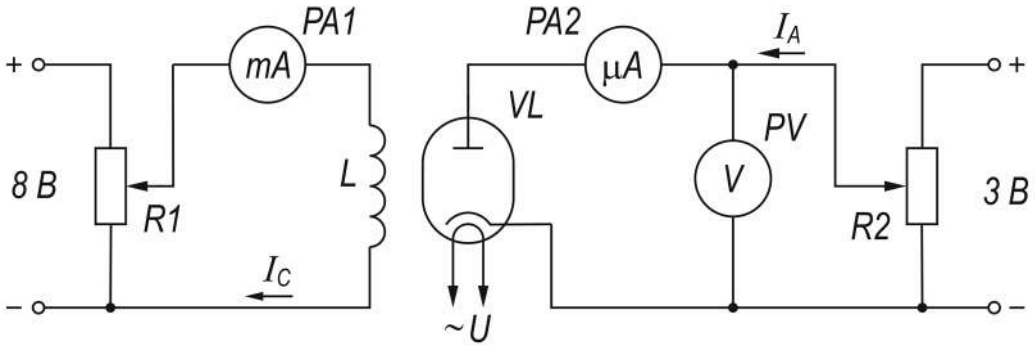


Рисунок 10.4

10.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Скласти схему (рис. 10.4) і зняти залежність анодного струму від струму, який протікає через соленоїд $I_a = f(I_c)$, для 7–9 значень анодної напруги. Результати занести в таблицю 10.1. Побудувати графіки залежності $I_a = f(I_c)$.

2. Із графіків визначити значення $B_{кр}$. Вибір критичного значення струму, що протікає соленоїдом ($B_{кр} = DI_{кр}$) звичайно відбувається на ділянці з найбільшим нахилом. Інколи вважають, що $I_{кр}$ дорівнює тій величині струму соленоїда, яка на графіку відповідна до $0{,}85 \cdot I_0$, де I_0 – значення анодного струму при $I_c = 0$. Результати занести до таблиці 10.2.

Таблиця 10.1 – Результати вимірювань

U=1 В	I_c, mA	0							
	I_a, μA								
U=2 В	I_c, mA	0							
	I_a, μA								
U=3 В	I_c, mA	0							
	I_a, μA								

Таблиця 10.2 – Результати розрахунків

U, В	I_0 ,μA	$I_{кр}$,mA	$B_{кр}$,Тл
1,0			
2,0			
3,0			

3. Побудувати графік залежності $B_{кр}^2$ від U.

4. За допомогою графіку $B_{кр}^2 = f(U)$ взявши будь які дві точки обчислити значення питомого заряду електрона за формулою:

$$\frac{e}{m} = \frac{8}{r_a^2} \frac{(U_2 - U_1)}{(B_{кр2}^2 - B_{кр1}^2)}.$$

Знайти абсолютну та відносну похибки.

10.5 Зміст звіту

Зміст повинен мати: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиць, графіки залежності $I_a = f(I_c)$ для 1 B, 2 B, 3 B та $B_{кр}^2 = f(U)$, результат розрахунку питомого заряду електрона та його похибки, короткі висновки.

10.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке сила Лоренца?
2. Як визначити напрямок сили Лоренца?
3. Записати рівняння руху електрона в електромагнітному полі.
4. Як визначають критичні значення сили струму соленоїда?
5. Вивести робочу формулу для визначення e/m .
6. Що таке критичне поле $B_{кр}$?
7. Чи виконує роботу сила Лоренца?

11 ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА ДО ЙОГО МАСИ МЕТОДОМ ФОКУСУВАННЯ ПУЧКА ЕЛЕКТРОНІВ ПОДОВЖНІМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ

11.1 Мета роботи

Дослідити рух заряджених частинок у магнітному полі, визначити питомий заряд електрона e/m, поперечну та продольну складові його швидкості.

11.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

У лабораторній роботі використовується осцилографічна електронно-променева трубка (ЕПТ) (рис. 11.1), у якій створюється вузький пучок електронів, що мають однакову подовжню швидкість $\upsilon_{//}$. Ця швидкість обумовлюється анодною напругою U_a , зарядом електрона *e* та його масою *m* і визначається із закону збереження енергії:

$$eU_a = \frac{m\upsilon_{//}^2}{2},$$

$$\upsilon_{//} = \sqrt{\frac{2U_a \cdot e}{m}}. \qquad (11.1)$$

При сталих значеннях U_a та відомій відстані *l* (рис. 11.1) час руху електрона до екрану :

$$t = \frac{l}{\upsilon_{//}}. \qquad (11.2)$$

Максимальне значення поперечної складової $\upsilon_{\perp}$ швидкості електрона в ЕПТ та розмах коливань на екрані (y/2) визначаються амплітудним значенням напруги коливань, що подаються від генератора *Г* (рис. 11.1) на вертикально відхиляючі пластини *Y*.

За допомогою соленоїда 1, надітого на трубку (рис. 11.1), створюється подовжнє магнітне поле, що діє на заряджену частинку з силою Лоренца [2-5]:

$$\vec{F} = e\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$$

і створює доцентрове прискорення

$$e\upsilon_{\perp}B = \frac{m\upsilon_{\perp}^2}{r}.$$

Радіус траєкторії обертального руху електрона визначається величинами $\upsilon_{\perp}$ та *B:*

$$r = \frac{m\upsilon_{\perp}}{eB} \ . \qquad (11.3)$$

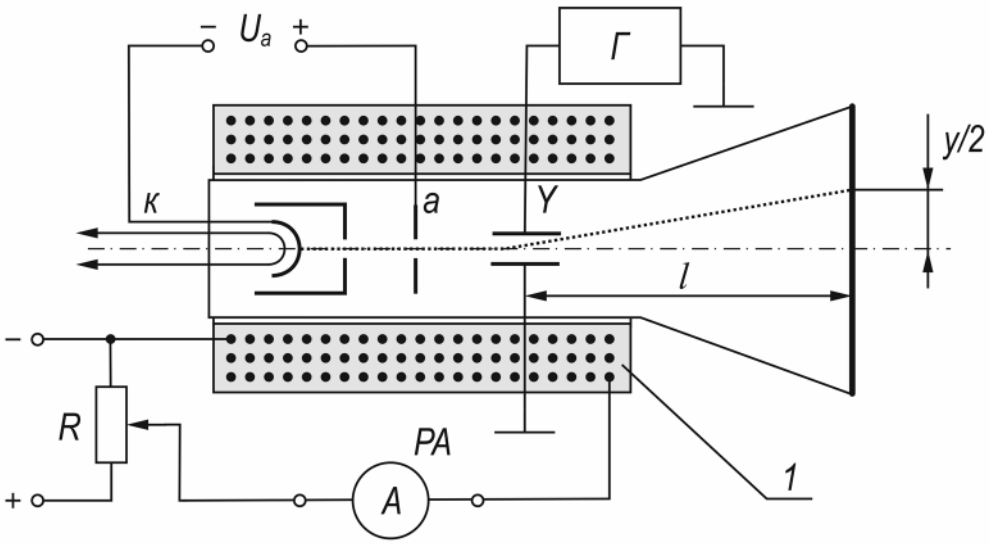
Період обертання електрона $T = \frac{2\pi r}{\upsilon_{\perp}}$. Підставивши в це рівняння значення *r* з (11.3), отримаємо:

$$T = \frac{2\pi m}{eB}. \qquad (11.4)$$

Кутова швидкість обертання електрона

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{e}{m}B \, .$$

Усі електрони з однаковою швидкістю $\upsilon_{//}$ за час *T* зроблять один оберт та зберуться (сфокусуються) в одній точці.



Г – генератор;
R – потенціометр;
A – амперметр;
1 – соленоїд;
к – катод;
а – анод;
l – відстань від пластин Y до екрану;
Y – вертикально відхиляючі пластинки.

Рисунок 11.1

За допомогою соленоїда 1, надітого на трубку (рис. 11.3), створимо спочатку слабке подовжнє магнітне поле. При малому значенні індукції B вертикальна лінія повернеться на екрані на деякий кут $\varphi = \omega t$, де ω залежить тільки від B. Збільшуючи струм у соленоїді, ми збільшуємо індукцію B магнітного поля, кут повороту φ буде зростати, а радіус обертального руху електрона r буде зменшуватися. При деякому значенні індукції $B = B_ф$ кут повороту досягає 180° і пряма лінія стягнеться у точку на екрані.

Відповідне значення магнітної індукції визначається за формулою:

$$B_ф = \frac{\mu_0 I_ф N}{L}, \qquad (11.5)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$ – магнітна стала;

N – кількість витків соленоїда;

L – довжина соленоїда;

$I_ф$ – значення струму через соленоїд, при якому розмах коливань на екрані ЕПТ зменшується до нуля.

Визначивши величину $B_ф$, при якій настає фокусування електронного пучка, можна знайти питомий заряд електрона e/m. Прирівняємо значення t з (11.2) та T з (11.4) і підставимо туди значення $V_{//}$ з (11.1) та $B_ф$ з (11.5):

$$\frac{l}{\upsilon_{//}} = \frac{2\pi m}{eB_ф},$$

$$\frac{l}{\sqrt{2U_a e/m}} = \frac{2\pi m}{e\mu_0 I_ф N/L},$$

звідки

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U_a L^2}{l^2 \mu_0^2 I_ф^2 N^2}. \qquad (11.6)$$

11.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з осцилографа з соленоїдом, надітим на ЕПТ, регульованого джерела постійної напруги (0–60 $В$), міліамперметра постійного струму, з'єднувальних проводів, генератора низької частоти.

Схема лабораторної установки наведена на рис. 11.1. Соленоїд 1 має довжину L та число витків проводу N. На прискорювальний анод трубки подається напруга $U_a = 1200\ В$. З генератора $Г$ синусоїдальних напруг подається на вхід Y осцилографа невелика змінна напруга, яка формує на екрані вертикальну лінію довжиною 1-2 *см*. Відстань від вертикально відхиляючих пластин трубки до екрану l = 75 *мм*. Сила струму у соленоїді регулюється потенціометром R, а ви-

значається по амперметру *PA*. Кількість витків соленоїда вказано на робочому місці.

11.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Зібрати схему (рис. 11.1). Виміряти довжину соленоїда L .
2. Увімкнути осцилограф та одержати у центрі екрана чітке зображення світлової плями.
3. Увімкнути генератор та подати на відхиляючі пластини змінну напругу невеликої частоти так, щоб на екрані з'явилась вертикальна лінія довжиною 1 *см*.
4. Увімкнути живлення соленоїда і, підвищуючи силу струму, одержати на екрані осцилографа фокусування електронного променя подовжнім магнітним полем (пряма лінія стягується у точку на екрані). Записати силу струму фокусування $I_ф$.
5. Вимкнути живлення соленоїда. Збільшити довжину вертикальної лінії на екрані на 0,5 *см*, а потім на 1 *см* і повторити 2 рази завдання п.4. Значення довжини y вертикальних ліній та струму фокусування записати у таблицю вимірювань (табл. 11.1).

Таблиця 11.1 – Результати вимірювань і розрахунків

y_i, *м*	$I_ф$, *А*	e/m, *Кл/кг*	$\upsilon_{//}$, *м/с*	$\upsilon_{\perp}$, *м/с*

6. Знайти e/m за формулою (11.10) для кожного значення $I_ф$ та занести результати у таблицю, обчислити середнє значення e/m. Порівняти одержане значення з відомим. Знайти відносну та абсолютну похибки.
7. За формулою (11.6) визначити подовжню складову швидкості електрона $\upsilon_{//}$ для середнього значення відношення e/m.
8. Із співвідношення

$$\frac{\upsilon_{\perp}}{\upsilon_{//}} = \frac{y/2}{l}$$

знайти приблизні значення вертикальних швидкостей для всіх значень y та занести їх до таблиці 11.1

11.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів і розрахунків у вигляді таблиці, обчислення похибки, короткі висновки.

11.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яка сила діє на заряд, що рухається в магнітному полі?
2. Як визначити напрямок сили Лоренца, що діє на електрон, який рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$?
3. Чому сила Лоренца не діє на подовжню складову швидкості?
4. Чому сила Лоренца не здійснює роботи по переміщенню заряду ?
5. Пояснити принцип фокусування електронного пучка подовжнім магнітним полем.
6. Одержати формулу (11.6) для обчислення відношення e/m.

12 ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА САМОІНДУКЦІЇ

12.1 Мета роботи

Дослідити явище самоіндукції, яке виникає при змінах сили струму в котушці, вивчити закон Фарадея для самоіндукції.

12.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

За будь-якої зміни сили струму в контурі буде змінюватися і магнітний потік Φ, який пронизує контур. За законом індукції Фарадея зміна магнітного потоку викликає появу ЕРС індукції [2-5]:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (12.1)$$

Знак мінус показує, що ЕРС завжди спрямована таким чином, щоб протидіяти зміні струму в контурі – правило Ленца [2].

У відповідності до закону Біо-Савара-Лапласа [2-5] магнітна індукція пропорційна силі струму, який створює магнітне поле. Звідки випливає, що струм в контурі i та створюваний ним магнітний потік Φ через контур пропорційні один одному:

$$\Phi = Li. \qquad (12.2)$$

Коефіцієнт пропорційності L між силою струму і магнітним потоком називається індуктивністю контуру.

Підставивши (12.2) в закон індукції (12.1), знайдемо ЕРС самоіндукції, яка виникає при змінах струму в контурі:

$$\varepsilon_C = -\frac{d(Li)}{dt} = -\left(L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}\right). \qquad (12.3)$$

Якщо L при змінах сили струму залишається сталою або змінюється незначно і сила струму в контурі мала за величиною, то ЕРС індукції буде залежати від швидкості зміни сили струму di/dt і від величини індуктивності:

$$\varepsilon_C = -L\frac{di}{dt}. \qquad (12.4)$$

Розглянемо, як буде змінюватися струм в колі, зображеному на рис. 12.1, при вмиканні і вимиканні ЕРС ε. Перемикач $П$ в положенні 1 підключає батарею ε до котушки з індуктивністю L і опором R. За законом Ома для неоднорідного кола [2-5] :

$$i = \frac{\varepsilon + \varepsilon_C}{R}.$$

Звідки маємо наступне рівняння:

$$iR = \varepsilon + \varepsilon_C = \varepsilon - L\frac{di}{dt}. \qquad (12.5)$$

Після замикання ключа *П* в положення 1 відбудеться зміна струму Δi в котушці за час його вмикання Δt. Миттєва зміна струму di/dt додатна і, як випливає з рівняння (12.5), струм в колі повільно збільшуватиметься до встановленого значення i_0. Збільшенню струму перешкоджає ЕРС самоіндукції. Через деякий проміжок часу di/dt стане дорівнювати нулю, в колі встановиться постійний струм $i_0 = \varepsilon/R$. Значення струму в будь-який момент часу можна знайти, вирішивши диференціальне рівняння (12.5). Рішенням цього рівняння для початкових умов ($i_0 = 0$ при $t = 0$) буде функція

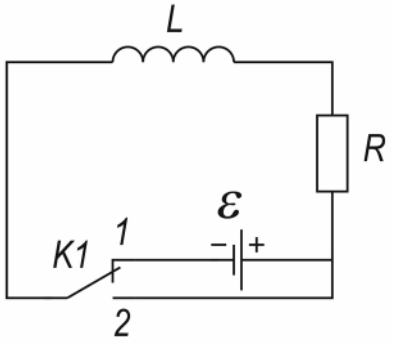


Рисунок 12.1

$$i = i_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (12.6)$$

Графік цієї функції зображений на рис. 12.2 (крива 1).

Розглянемо тепер, що відбудеться в контурі, якщо розімкнути ключ після того, як в колі встановиться струм i_0. Струм за час розмикання Δt зменшиться до нуля, di/dt і ЕРС самоіндукції при $\Delta t \to 0$ будуть прямувати до мінус нескінченності.

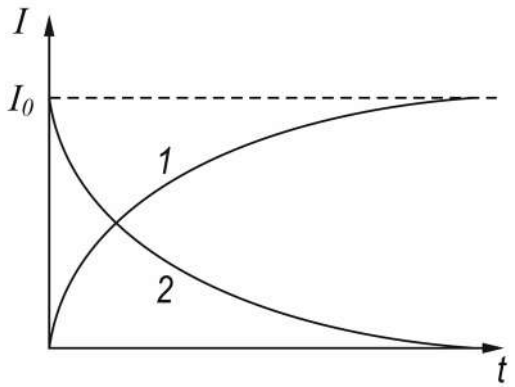


Рисунок 12.2

Щоб обмежити індуктивний струм, в схемі (рис. 12.1) котушка замикається накоротко перемикачем *K1* в положенні 2 і одночасно відключається батарея. Контур (рис. 12.1) тепер описується рівнянням

$$iR = \varepsilon_C = -L\frac{di}{dt}. \qquad (12.7)$$

Перепишемо це рівняння таким чином

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0. \qquad (12.8)$$

Якщо $t=0$, $i_0=0$, то розв'язком цього лінійного однорідного диференціального рівняння 1-го порядку буде функція

$$i=i_0e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (12.9)$$

Отже, після відключення джерела ЕРС сила струму в колі не перетворюється миттєво в нуль, а зменшується за експоненціальним законом. Графік функції (12.9) даний на рис. 12.2 (крива 2).

Із рівняння (12.9) випливає, що чим більша індуктивність кола L і менший його опір R, тим повільніше зменшується струм.

Підставивши (12.9) до (12.4), знайдемо закон ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_C=-L\frac{di}{dt}=Ri_0e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (12.10)$$

Із співвідношення (12.10) можна зробити висновок про те, що коли опір кола R_i одразу після його розмикання дуже великий (і значно перевищує опір R котушки), то ЕРС самоіндукції сягає дуже великих значень. В нашій схемі перемикання із положення 1 в положення 2 відбувається не миттєво, отже, протягом малого часу перемикання опір кола стає дуже великим ($R_i\to\infty$, коли коло розімкнуто), і ЕРС може досягати дуже великої величини.

12.3 Опис лабораторної установки.

Схема установки наведена на рис. 12.3. На схемі зображена котушка з індуктивністю L і опором R, розміщена в Ш-подібне замкнуте стальне осердя, газорозрядна лампа *HL* МТХ-90, перемикач *K1*, кнопка *K2*.

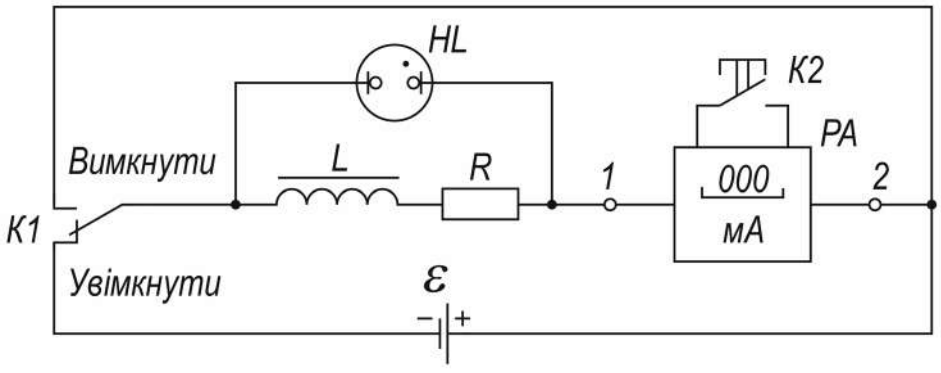


Рисунок 12.3

Для вимірювання сили струму використовується цифровий універсальний прилад В7–21А, який під'єднується до клем 1 і 2.

До 32-х контактного роз'єму приладу В7–21А (який розміщений на задній панелі) підключається узгоджувальний пристрій, провідники від якого під'єднані до клем кнопки *К2*. Пристрій узгоджувальний і кнопка призначені для зовнішнього запуску В7–21А при вимірюванні струму.

Значення струму в колі змінюється дуже швидко і, якщо натискати кнопку через визначені інтервали часу (наприклад через 2 *с*), можна отримувати на табло приладу лише певні значення струму, що полегшує процес вимірювань і підвищує їх точність.

В положенні перемикача *К1 «Увімкнути»* до котушки підключається джерело ЕРС 1В. Приблизно через 10 *с* струм в колі досягне сталого значення ($i_0 = 10$ *мА*). За малої напруги опір газорозрядної лампи *HL* дуже великий і струм через неї не протікає. Коли *К1* перемикається в положення «*Вимкнути*», джерело ЕРС вимикається, в момент розриву кола швидкість зміни сили струму і опір кола великі, і ЕРС самоіндукції досягає великого значення. В цей час газорозрядна лампа, яка має напругу запалювання 90 *В* яскраво спалахує, її опір стає малим і струм самоіндукції протікає через лампу. Напруга на лампі швидко зменшується і лампа гасне. До цього часу перемикач *К1* вже замкне коло в положенні «*Вимкнути»*. Далі струм буде зменшуватися від усталеного значення за експоненціальним законом. Натискуючи кнопку через кожні 2 *с* після перемикання кола та спалаху лампочки, слід знімати залежність $i = f(t)$.

12.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Скласти схему (рис. 12.3), встановити перемикач *К1* в положення «*Вимкнути»*. Увімкнути джерело живлення і амперметр В7–21А. Встановити перемикач *К1* в положення *«Увімкнути»* і, натискуючи кнопку з інтервалами приблизно 2 *с*, спостерігати на табло приладу за постійним збільшенням сили струму доки вона не перестане збільшуватись. Записати значення сили струму i_0.

2. Встановити перемикач *К1* в положення «*Вимкнути»* і почати відлік часу після спалаху лампи. Через кожні 2 *с* натискати кнопку і записувати показані амперметра. Після проведення досліду дані занести до табл. 12.1.

Завдання п.1 і п.2 повторити три рази. Знайти середнє значення струмів і занести їх в табл. 12.1. Побудувати графік залежності $i_{ср} = f(t)$ та $\ln i_{ср} = f(t)$.

3. Із закону зміни сили струму (12.9) визначити L для декількох значень $i_{ср}$. Результат розрахунків занести до табл. 12.1. Переконатися в сталому значенні індуктивності котушки *L* і побудувати графік залежності $L = f(\ln i)$.

4. Використовуючи формулу (12.10), визначити ЕРС самоіндукції в кожний момент часу після переміщення в положення «*Вимкнути»*. Побудувати графік $\varepsilon = f(t)$.

Таблиця 12.1 – Результати вимірювань і розрахунків

t, c	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$i_1, мА$											
$i_2, мА$											
$i_3, мА$											
$i_{ср}, мА$											
$L, Гн$											
$\mathcal{E}, мВ$											

12.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиці, графіки залежностей $i_{ср} = f(t)$, $\ln i_{ср} = f(t)$, $L = f(\ln i)$, $\varepsilon = f(t)$, короткі висновки.

12.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що називається явищем самоіндукції?
2. Записати закон Фарадея для електромагнітної індукції.
3. В чому полягає правило Ленца?
4. Як отримати співвідношення для ЕРС самоіндукції із закону Фарадея? Від чого залежить величина цієї ЕРС?
5. Як змінюється струм самоіндукції при підключенні котушки індуктивності до джерела ЕРС?
6. Як змінюються ЕРС і струм самоіндукції при вимиканні джерела ЕРС і короткому замиканні котушки?
6. Чому ЕРС самоіндукції може досягати великих абсолютних значень при відмиканні від котушки зовнішнього джерела ЕРС?
7. Пояснити принцип роботи лабораторної установки і призначення газорозрядної лампи.

13 ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА ВЗАЄМОІНДУКЦІЇ

13.1 Мета роботи

Дослідити явище взаємоіндукції, вивчити закон Фарадея, розглянути принцип роботи трансформатора та визначити його характеристики: коефіцієнт трансформації напруги, коефіцієнти взаємоіндукції обмоток трансформатора та його ККД.

13.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для двох близько розташованих контурів змінний струм, який протікає в одному з них (рис. 13.1), наприклад в контурі 1, створює змінне магнітне поле, яке викликає появу ЕРС індукції в контурі 2. Таке явище називається взаємоіндукцією. ЕРС взаємоіндукції (як і самоіндукції) визначається за законом Фарадея:

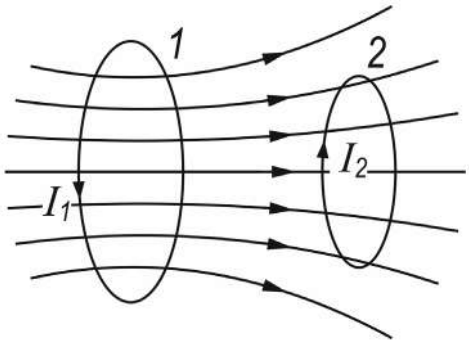


Рисунок 13.1

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де Φ – магнітний потік контуру зі струмом.

На практиці звичайно магнітний потік створюється не одним витком, а котушкою з великою кількістю витків. Повний магнітний потік Ψ крізь усі витки котушки, пропорційний кількості витків N та магнітному потоку одного витка Φ: $\Psi = N\Phi$. Величину Ψ іноді називають потокозчепленням. Щоб підсилити взаємодію між повними магнітними потоками котушок, останні потрібно розташувати навколо замкнутого феромагнітного осердя (рис. 13.2). Такий пристрій має назву трансформатора.

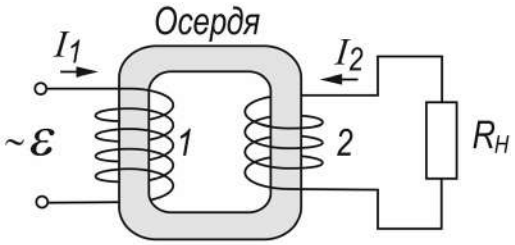


Рисунок 13.2

Якщо у котушці 1 протікає змінний струм i_1, то у феромагнітному осерді створюється змінний магнітний потік, частина якого Ψ_{21} проходить через котушку 2 та створює в ній ЕРС індукції:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -N_2\frac{d\Phi_1}{dt}, \qquad (13.1)$$

де Ψ_{21} – потокозчеплення з контуром 2, яке створюється струмом i_1;

Φ_1 – магнітний потік котушки 1;

N_2 – кількість витків другої котушки.

Розглянемо випадок, коли котушка 2 трансформатора розімкнена (навантаження R_H відсутнє). Цей випадок має назву режиму холостого ходу трансформатора.

Запишемо співвідношення (13.1) у вигляді

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Psi_{21}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt} = -L_{21}\frac{di_1}{dt}, \tag{13.2}$$

де величина

$$L_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{di_1}. \tag{13.3}$$

має назву динамічної взаємної індуктивності або коефіцієнта взаємоіндукції котушки 2 з котушкою 1.

Повний магнітний потік (потокозчеплення з котушкою 2)

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_1 = N_2 B_1 S, \tag{13.4}$$

створюється котушкою 1 (оскільки $i_2 = 0$) та залежить від індукції магнітного поля B_1 цієї котушки, кількості витків другої котушки N_2 та площі перерізу осердя S.

Індукція магнітного поля, що створюється першою котушкою із числом витків N_1, довжиною l_1 і магнітною проникністю осердя μ_D, визначається формулою:

$$B_1 = \mu_0\mu_D \cdot \frac{N_1 i_1}{l}. \tag{13.5}$$

Підставимо (13.5) у (13.4), а отримане співвідношення – у (13.3):

$$L_{21} = \mu_0\mu_D \cdot \frac{N_1 N_2}{l} \cdot S. \tag{13.6}$$

Отримана формула дозволяє визначити коефіцієнт взаємоіндукції котушки 2 з котушкою 1 тільки для режиму холостого ходу. У цьому режимі в котушці 1 створюватиметься ЕРС ε_1, яка чисельно дорівнює ЕРС індукції.

Якщо вважати падіння напруги на опорі обмотки 1 малим через незначну величину опору цієї обмотки, то можна записати:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -N_1\frac{d\Phi_1}{dt}. \tag{13.7}$$

Поділивши (13.1) на (13.7), отримаємо можливість обчислення кількості витків однієї з обмоток, якщо відома кількість витків другої:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1}. \tag{13.8}$$

Перейдемо до розгляду режиму роботи, при якому в котушці 2 протікає струм i_2 – сумірний з величиною струму i_1 ($0 < R_H < \infty$).

Струм i_2 (рис. 13.2) створює змінний магнітний потік Ψ_{12} у вторинній обмотці трансформатора. Цей повний потік, поширюючись в осерді, проходить крізь витки котушки 1 та створює в ній ЕРС взаємоіндукції:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{di_2}{dt}, \qquad (13.9)$$

де $\Psi_{12} = N_1\Phi_2 = N_1 B_2 S$ (B_2 – індукція магнітного поля котушки 2);

L_{12} – коефіцієнт взаємоіндукції котушки 1 з котушкою 2:

$$L_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{di_2} = N_2 S\frac{dB_2}{di_2}.$$

ЕРС ε_1 та ε_2 є сумарними ЕРС взаємоіндукції, тому що в створенні змінного потоку осердя приймають участь струми i_1 та i_2. Враховуючи це, запишемо рівняння другого правила Кірхгофа [2–5] для контуру 1:

$$i_1 R_1 = \varepsilon - \varepsilon_1.$$

Якщо падіння напруги на котушці 1 мале ($i_1 R_1 \approx 0$), то $\varepsilon_1 \approx \varepsilon \approx U$, де U - напруга джерела змінного струму, який змінюється за гармонічним законом:

$$i_1 = i_{01}\cos\omega t, \qquad (13.10)$$

де i_{01} – амплітуда сили струму;

ω – циклічна частота струму.

Підставимо (13.10) до (13.2) та знайдемо ЕРС котушки 2:

$$\varepsilon_2 = -L_{21}\frac{di_1}{dt} = L_{21} i_{01}\omega\sin\omega t. \qquad (13.11)$$

Якщо знехтувати падінням напруги в котушці 2 через малий опір ($R_2 \approx 0$), можна вважати $\varepsilon_2 \approx U_2$. Тоді

$$U_2 = L_{21} i_{01}\omega\sin\omega\cdot t.$$

Амплітудне значення напруги:

$$U_{02} = L_{21} i_{01}\omega. \qquad (13.12)$$

Із співвідношення (13.12) знайдемо максимальне значення коефіцієнта взаємоіндукції другої котушки з першою:

$$L_{21} = \frac{U_{02}}{i_{01}\omega}. \qquad (13.13)$$

Аналогічно можна визначити коефіцієнт взаємоіндукції першої котушки з другою:

$$L_{12} = \frac{U_0}{i_{02}\omega}, \tag{13.14}$$

де U_0 – амплітуда напруги джерела струму;

i_{02} – амплітуда сили струму в контурі 2;

$\omega = 2\pi\nu$, $\nu = 50$ *Гц*.

Потужність P_2, яка виділяється у зовнішньому колі цього контуру, завжди менша, ніж спожита з мережі потужність P_1. Якщо навіть на опорі навантаження R_H вторинної обмотки трансформатора виділяється максимально допустима активна потужність, то і тоді вона буде менша за спожиту. Це пов'язано з тим, що частина спожитої електричної енергії витрачається на перемагнічування осердя (гістерезис) та його нагрівання (струми Фуко), а також на нагрівання обмоток трансформатора [2–5].

Відношення активної потужності P_2, яка виділяється на опорі навантаження P_H, до активної потужності P_1, що споживається із мережі, має назву коефіцієнта корисної дії (ККД) трансформатора:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{i_{02}U_{02}\cos\varphi_2}{i_{01}U_{01}\cos\varphi_1}, \tag{13.15}$$

де φ_1 – різниця фаз між i_{01} та U_{01};

φ_2 – різниця фаз між i_{02} та U_{02} .

При опорах навантаження, близьких до оптимальних, та при невеликих коефіцієнтах трансформації різниці фаз в обмотках будуть малі і їх можна прирівняти ($\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$), тому формула (13.15) для таких умов спрощується:

$$\eta = \frac{i_{02}U_{02}}{i_{01}U_{01}}. \tag{13.16}$$

Порівнюючи (13.13) та (13.14), можна сказати, що відношення коефіцієнтів взаємоіндукції обмоток чисельно дорівнює при зазначених вище умовах ККД трансформатора:

$$\frac{L_{21}}{L_{12}} = \eta. \tag{13.17}$$

За законом збереження енергії потужності на первинній та вторинній обмотках трансформатора можна вважати однаковими P_1=P_2, якщо знехтувати тепловими втратами на їх активних опорах та в осерді, що обумовлені струмами Фуко. Тобто

$$\frac{\varepsilon_{01}i_{01}}{2}\cdot\cos\varphi_1 = \frac{\varepsilon_{02}i_{02}}{2}\cdot\cos\varphi_2,$$

або через ефективні значення напруг та струмів:

$$U_1 i_1 \cos\varphi_1 = U_2 i_2 \cos\varphi_2 .$$

Після підстановки виразів (13.1) і (13.7) та при $\cos\varphi_1 \approx \cos\varphi_2$ ці рівняння можна переписати у вигляді такого співвідношення:

$$\frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_{01}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{i_1}{i_2} = k . \qquad (13.18)$$

Величина *k* має назву коефіцієнта трансформації напруги. Вона визначає, у скільки разів ЕРС у вторинній обмотці трансформатора є більшою або меншою, ніж у первинної.

13.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з трансформатора напруги, двох амперметрів змінного струму, регульованого джерела змінної напруги (0–5В), двох вольтметрів, з'єднувальних провідників.

Схема установки наведена на рис. 13.3. На схемі зображено: *TV* – трансформатор, з обмотками 1 та 2; амперметри *PA1* та *PA2*; R_H – опір навантаження; *PV1* та *PV2* – вольтметри для вимірювання ефективних (діючих) напруг первинної та вторинної обмоток трансформатора.

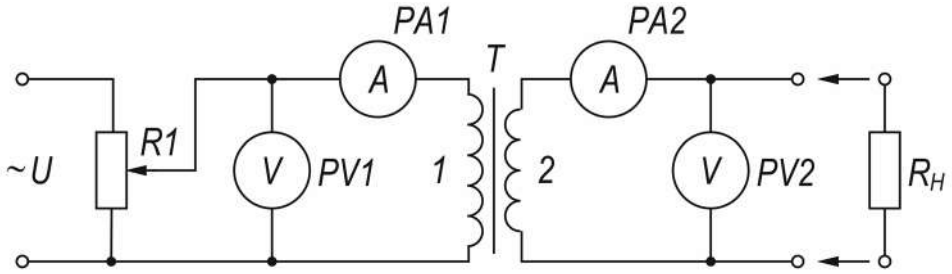


Рисунок 13.3

Для синусоїдальної напруги та струму амплітудні значення пов'язані з діючими співвідношеннями:

$$U_0 = U\sqrt{2},\ i_0 = i\sqrt{2} . \qquad (13.19)$$

Для зміни величини діючої напруги на обмотці 1 у межах від 0 до 5 *В* використовується регульоване джерело змінної напруги $\sim U$, вихідні клеми якого виведені на передню панель експериментальної установки.

13.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Дослідити режим холостого ходу трансформатора (рис. 13.3). Для цього, змінюючи напругу $\sim U$ через кожен 1,0 *В*, вимірювати за допомо-

гою вольтметра напруги на котушці 1 та котушці 2 трансформатора. Отримані результати записати до таблиці 13.1.

Таблиця 13.1 – Результати вимірювань та розрахунків для режиму холостого ходу трансформатора

U_1, B	U_2, B	N_1	N_2	$< N_2 >$	$L_{21}, мГн$	$< L_{21} >$
1,0						
2,0						
3,0						
4,0						
5,0						

2. Використовуючи співвідношення (13.8), визначити кількість витків N_2 вторинної обмотки. За формулою (13.6) обчислити коефіцієнт взаємоіндукції L_{21} для режиму холостого ходу. Результати записати до таблиці 13.1. Дані осердя трансформатора та кількість витків вторинної обмотки вказані на робочому місці, а $\mu_D = \mu = 500, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м*.

3. Дослідити режим роботи трансформатора при номінальному навантаженні. Для цього приєднати опір навантаження до котушки 2 трансформатора (з'єднати провідниками відповідні клеми). Змінюючи вхідну напругу U_1 через кожен 1,0 *B*, вимірювати силу струму i_1 у колі первинної обмотки та i_2 – у колі вторинної обмотки, а також напругу U_2 на опорі R_H Дані досліду записати до таблиці 13.2.

4. Для кожної вхідної напруги визначити за формулами (13.13), (13.14), враховуючи співвідношення (13.19) та результати експерименту, коефіцієнти взаємоіндукції L_{21} і L_{12}. Результати записати до таблиці 13.2.

5. Для всіх значень вхідної напруги за даними завдання 2 знайти ККД трансформатора, використовуючи співвідношення (13.16). Результати занести до таблиці 13.2.

6. За формулою (13.18), обчислити коефіцієнти трансформації для усіх значень вхідних напруг U_1. *З*найти середнє значення коефіцієнта трансформації k. Результати занести до таблиці 13.2. Визначити похибки коефіцієнтів взаємоіндукції та трансформації.

Таблиця 13.2 – Результати вимірювань та розрахунків для режиму при номінальному навантаженні

U_1, *В*	i_1, *мА*	U_2, *В*	i_2, *мА*	L_{21}, *мГн*	L_{12}, *мГн*	ККД, %	k	$< k >$
1,0								
2,0								
3,0								
4,0								
5,0								

13.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиць, результати розрахунків кількості витків N_2, коефіцієнт взаємоіндукції L_{21} для режиму холостого ходу, коефіцієнти взаємоіндукції L_{21} і L_{12} при навантаженні, ККД трансформатора, коефіцієнт трансформації k, статистичну обробку результатів вимірювань, стислі висновки.

13.6 Контрольні запитання

1. У чому полягає явище взаємної індукції?
2. Навести формулу для ЕРС взаємоіндукції.
3. Що називають взаємною індуктивністю двох контурів? Від чого вона залежить?
4. Навести формулу коефіцієнт взаємоіндукції обмоток трансформатора для режиму холостого ходу.
5. Навести формулу коефіцієнтів взаємоіндукції обмоток трансформатора для режиму номінального навантаження.
6. Навести формулу коефіцієнта трансформації трансформатора. Пояснити принцип роботи.
7. Що називається ККД трансформатора? Як визначається ККД трансформатора та від чого він залежить?
8. Як поєднати діючі значення напруги та сили струму з їх амплітудними значеннями для синусоїдального струму та напруги?
9. Як можна знайти ККД трансформатора, знаючи максимальні коефіцієнти взаємоіндукції його обмоток? При яких умовах цей ККД можна визначити через коефіцієнти взаємоіндукції?

14 ВИВЧЕННЯ МАГНІТНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФЕРОМАГНЕТИКІВ

14.1 Мета роботи

Дослідження магнітного поля у речовині на прикладі різних феромагнетичних матеріалів, ознайомлення з явищем гістерезісу.

14.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Будь-яка речовина, що розташована у магнітному полі, змінює свої властивості. Магнітні властивості речовини пов'язані з орбітальним рухом електронів у атомі, із заповненням електронних оболонок у атомі, з магнітними властивостями самих електронів та інших частинок.

В переважній більшості речовин їхні магнітні властивості є дуже слабкими. До них відносяться діамагнетики та парамагнетики, які у відсутності зовнішнього магнітного поля не мають намагніченості. Намагніченість характеризують магнітним моментом одиниці об'єму

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{\Delta V} \vec{P}_m ,$$

де $\vec{J}$ – намагніченість;

$\vec{P}_m$ – магнітний момент молекул, що знаходяться в об’ємі ΔV .

В слабких магнітних полях намагніченість пара- та діамагнетиків залежить лінійно від напруженості зовнішнього магнітного поля $\vec{H}$:

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{H} , \qquad (14.1)$$

де χ – магнітна сприйнятливість речовини, характерна для даного магнетика величина, що не залежить від H .

Феромагнетики – речовини, які в макроскопічних об'ємах мають магнітовпорядкований стан. Магнітовпорядкований стан речовини виникає внаслідок того, що магнітні моменти атомних носіїв магнетизму (спінові магнітні моменти) розташовані паралельно в межах деякої області речовини (домену). Феромагнітна атомна структура кубічної решітки зображена на рис. 14.1. Така орієнтація магнітних моментів атомів призводить до власної (спонтанної) намагніченості речовини, яка характеризується вектором намагніченості $\vec{J}$. Спонтанна намагніченість $\vec{J}_C$ залежить від температури і зменшується з її зростанням. Характер цієї залежності зображений на рис. 14.2, де θ – температура, при якій спонтанна намагніченість зникає. Ця температура називається точкою Кюрі. При $T > \theta$ феромагнітні властивості зникають і речовина стає парамагнетиком. Таким чином, феромагнетики – це такі речовини, у яких встановлюється певний магнітний порядок атомних магнітних моментів. До них відносяться: залі-

зо, нікель, кобальт, гадоліній, їх сплави та сполуки, а також деякі сплави інших елементів.

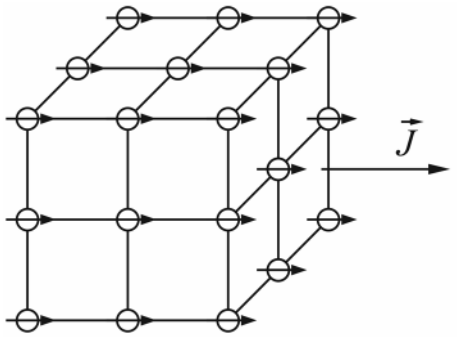


Рисунок 14.1

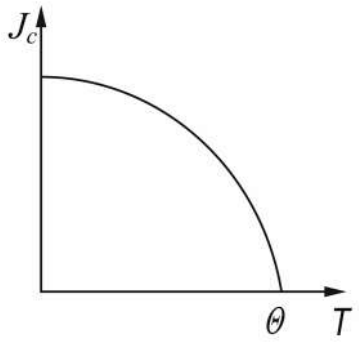


Рисунок 14.2

Для феромагнетиків залежність J від H (або B від H) носить складний характер. На рис. 14.3 зображений вид цієї залежності для початково ненамагніченого феромагнетику (головна або нульова крива намагнічування). З цієї залежності видно, що магнітна сприйнятливість χ не може служити характеристикою магнітного стану феромагнетику. В цьому випадку як магнітна сприйнятливість χ, так і магнітна проникність речовини

$$\mu = 1 + \chi \qquad (14.2)$$

є функціями напруженості магнітного поля H.

Залежність μ від H для феромагнетику зображена на рис. 14.4.

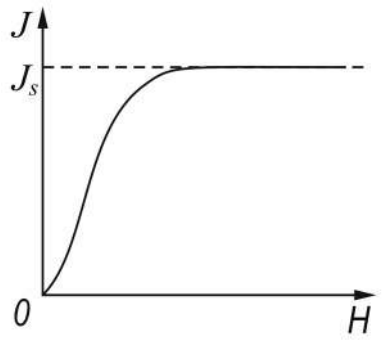


Рисунок 14.3

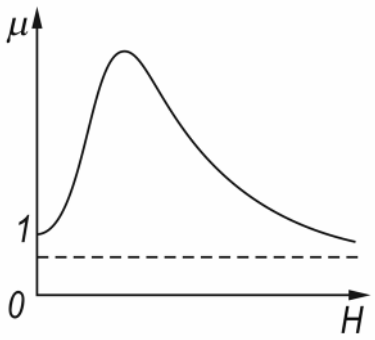


Рисунок 14.4

Для феромагнетиків характерно явище насичення намагніченості J

$B = \mu_0(J + H)$ залежить від напруженості зовнішнього магнітного поля нелінійно, але при досягненні насичення $B = \mu_0(J_S + H) = \mu_0 H + const$ ця залежність переходить в лінійну (рис. 14.5). Окрім розглянутих особливостей феромагнетиків, існує ще одна, яка полягає в тому, що магнітна проникність μ (а отже, і χ) залежить не тільки від миттєвого значення напруженості поля H, але

й від попереднього намагнічування зразка. Тому за характеристику феромагнетику приймається залежність $B(H)$ у вигляді повного циклу кривої намагнічування (рис. 14.6), яка зображує процес перемагнічуванні феромагнетику у змінному магнітному полі.

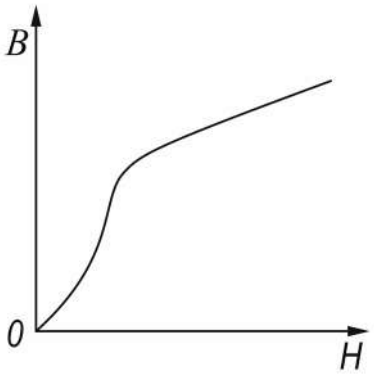


Рисунок 14.5

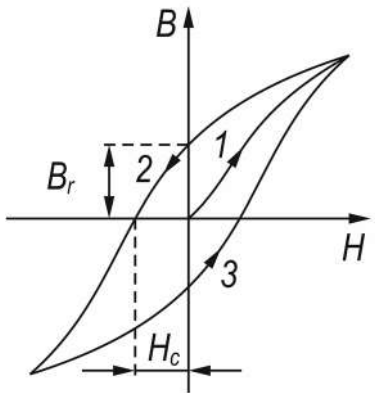


Рисунок 14.6

З кривих видно, що для якогось конкретного значення поля H індукція B не є однозначною. Явище, при якому фізична величина, що характеризує стан тіла (наприклад індукція B), неоднозначно залежить від фізичної величини, яка характеризує зовнішні умови (наприклад, магнітне поле H), називається гістерезисом.

Замкнена крива, що зображена на рис. 14.6 – петля гістерезису. Якщо первісну криву намагнічування довести до насичення, то петля гістерезису буде найбільша, або гранична. На рис. 14.6 видно, що при зменшенні магнітного поля до нуля $H = 0$ індукція B не зникає, а зображується певним відрізком на осі координат. Це означає, що намагніченість зразка не зникає і їй відповідає так звана залишкова індукція B_r. З наявністю такої залишкової намагніченості пов'язано існування постійних магнітів. Для того, щоб розмагнітити зразок, треба прикласти певне поле, яке направлене протилежно первісному полю H_C. Ця напруженість поля є коерцитивною силою феромагнетику.

Значення залишкової намагніченості та коерцитивної сили для різних феромагнетиків змінюється в широких межах. Для м'якого заліза петля гістерезису вузька (коерцитивна сила мала), для сталі та матеріалів, що йдуть на виготовлення постійних магнітів, – широка (коерцитивна сила велика).

14.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з джерела регульованої змінної напруги 0–10 *В*, електронного осцилографа *PO*, вольтметрів змінної напруги *PV1* та *PV2*, трансформатора кільцевого з вуглецевої сталі, трансформатора кільцевого з трансформаторної сталі, трансформатора кільцевого з фериту,

набору опорів, електроємності, з'єднувальних дротів. Схема установки зображена на рис 14.7.

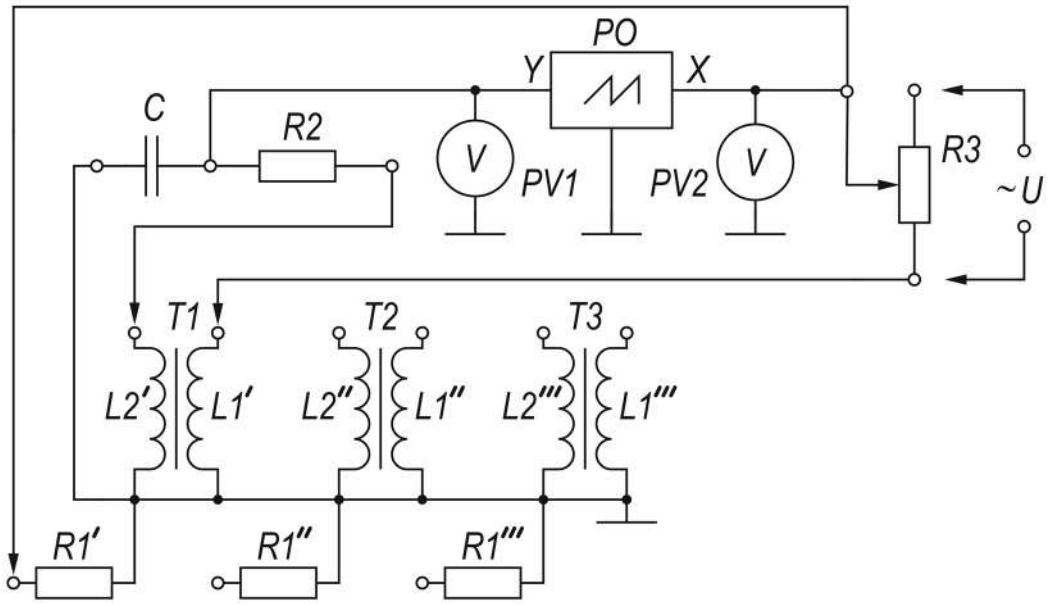


Рисунок 14.7

У якості досліджуваного феромагнетику використовується осердя трансформатора. Первинна обмотка трансформатора живиться від джерела змінного струму та має число витків N_1. Ця обмотка трансформатора потрібна для створення змінного магнітного поля H, яке намагнічує осердя трансформатора.

Зв'язок H з падінням напруги U_x на резисторі R_1 в колі первинної обмотки може бути записано на основі закону повного струму [1,4] і виражається співвідношенням:

$$H = \frac{N_1}{l} i_1 = \frac{N_1}{l_1} \cdot \frac{U_X}{R_1} = n_1 \frac{U_X}{R_1}, \qquad (14.4)$$

де l_1 – довжина середньої лінії осердя трансформатора;

N_1 – кількість витків первинної обмотки;

$n_1 = \frac{N_1}{l_1}$ – кількість витків на одиницю довжини.

Для вимірювання індукції B у феромагнітному осерді використовується метод, побудований на законі електромагнітної індукції [2]

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Оскільки потокозчеплення

$$\Psi = \Phi N_2 = BSN_2,$$

де S – переріз осердя;

N_2 – кількість витків вторинної обмотки, то

$$|\varepsilon| = \frac{dB}{dt} SN_2. \qquad (14.5)$$

Для того, щоб подати на вхід підсилювача вертикального відхилення напругу, пропорційну B, між вторинною обмоткою і осцилографом вмикається інтегруюче кільце – R_2C (рис 14.8).

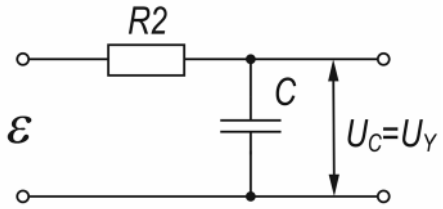


Рисунок 14.8

Запишемо закон Ома для вторинного кола трансформатора (рис. 14.8), враховуючи, що ЕРС самоіндукції мала:

$$\varepsilon = U_C + I_2 R_2. \qquad (14.6)$$

Врахуємо, що

$$U_C = U_Y = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int I_2 dt, \qquad (14.7)$$

де q – заряд конденсатора,

U_Y – напруга, що подається на вхід Y осцилографа,

I_2 – сила струму у вторинному колі трансформатора.

З іншого боку, $U_C = I_2/\omega C$, а падіння напруги на резисторі $R2$ є $U_R = I_2 R_2$. Тоді

$$U_R/U_C = R_2 \omega C.$$

При $R_2 \approx 2\cdot 10^4 Ом$, $\omega = 3{,}14\cdot 10^2 c^{-1}$, $C = 4\cdot 10^{-6} Ф$, $\frac{U_R}{U_C} \approx 25$, $U_R >> U_C$.

Тому можна знехтувати U_C в формулі (14.16). Тоді з врахуванням формул (14.5) і (14.6) маємо:

$$\varepsilon = I_2 R_2 = \frac{dB}{dt} SN_2,$$

звідки

$$I_2 = \frac{SN_2}{R_2} \cdot \frac{dB}{dt}.$$

Підставивши I_2 до формули (14.7), отримаємо напругу, яка подається на вхід *Y* осцилографа:

$$U_Y = U_C = \frac{SN_2}{R_2 C} \cdot \int \frac{dB}{dt} dt = \frac{SN_2}{R_2 C} B . \qquad (14.8)$$

Звідси знайдемо індукцію магнітного поля у феромагнетику.

$$B = \frac{U_Y R_2 C}{SN_2} . \qquad (14.9)$$

Таким чином, під час подачі напруги U_X на горизонтально відхиляючі пластини і напруги U_Y на вертикальні відбувається складання двох взаємо перпендикулярних коливань. Внаслідок цього за повний період коливань промінь відтворить на екрані в деякому масштабі петлю гістерезису, як це виходить із рівнянь (14.4) і (14.9).

14.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Скласти схему з трансформатором із вуглецевої сталі (рис. 14.7) і увімкнути осцилограф.
2. Вимкнути розгортку осцилографа. Ручками керування променем встановити світлу пляму в центрі екрана.
3. Подати змінну напругу на первинну обмотку трансформатора і, збільшуючи напругу, встановити струм, необхідний для насичення феромагнетика. Встановити перемикач «V/дел» в таке положення, щоб петля гістерезису мала максимальний розмір по вертикалі.
4. Поступово зменшуючи за допомогою потенціометра *R* напругу живлення, зробити 8 – 10 вимірювань значень координат *x* і *y* верхнього кінця петлі при різних напругах, а також напруг U_X і U_Y за допомогою вольтметрів *PV2* і *PV1* відповідно. Записати отримані величини до таблиці 14.1.
5. За формулами (14.4) і (14.9) визначити *H* і *B* . Дані N_1, l_1, R_1, N_2, R_2, S наведені на робочому місці. Знайти похибку вимірювань.
6. Побудувати криву намагнічування $B = f(H)$.
7. Знайти магнітну проникність μ, використовуючи співвідношення $\mu = B / \mu_0 H$. Визначити абсолютну похибку. Побудувати графік $\mu = f(H)$.

14.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиці, графіки залежностей $B = f(H)$, $\mu = f(H)$ з вказаними на них похибками, стислі висновки.

Таблиця 14.1 – Результати вимірювань та розрахунків.

x, *мм*	*y*, *мм*	U_x, *В*	U_y, *В*	*B*, *Тл*	*H*, *А/м*	μ

14.6 Контрольні запитання і завдання

1. На які види розподіляються магнетики?
2. Що таке вектор намагніченості і який його фізичний зміст?
3. Що таке магнітна сприйнятливість?
4. Які речовини називаються феромагнетиками?
5. Охарактеризувати температуру Кюрі.
6. Які речовини відносять до діамагнетиків? до парамагнетиків?
7. Який фізичний смисл має магнітна проникність?
8. В чому полягає явище гістерезису?
9. Яка сутність залишкової індукції B_r і коерцитивної сили H_C?

15 ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВНОГО ПОСЛІДОВНОГО КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

15.1 Мета роботи

Дослідження вимушених електромагнітних коливань в повному послідовному колі змінного струму, ознайомлення з явищем резонансу.

15.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

В послідовному колі (рис. 15.1), який складається з ємності C, індуктивності L, активного опору R і генератора, виникають вимушені електромагнітні коливання.

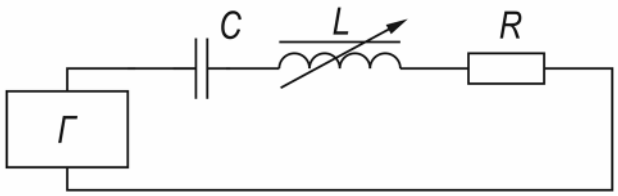


Рисунок 15.1

Рівняння таких коливань для миттєвих значень сили струму *i* та напруги *u* можна записати на основі 2-го закону Кірхгофа [2-5] для даного кола:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=U_0\cos\omega t, \qquad (15.1)$$

де ω – циклічна частота напруги генератора;

U_0 – амплітуда напруги генератора:

q – миттєве значення заряду конденсатора.

Враховуючи, що $i=dq/dt$, можна сказати, що коливання заряду описуються диференціальним рівнянням другого порядку [2]. Рішення такого рівняння для усталеного значення сили струму, як відомо, описується гармонічною функцією часу

$$i=i_0\cos(\omega t-\varphi), \qquad (15.2)$$

де φ – зсув фаз між напругою і силою струму;

В рівнянні (15.2) i_0 – амплітуда сили струму в колі – знаходиться із співвідношення

$$i_0=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{U_0}{Z}, \qquad (15.3)$$

Зсув фаз φ можна обчислити з формули:

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (15.4)$$

Рівняння (15.3) виражає закон Ома для повного послідовного кола змінного струму. Вираз в знаменнику цього рівнянням є модулем повного електричного опору (модулем імпедансу) кола і може бути представлений у вигляді:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}, \qquad (15.5)$$

де X – реактивний опір кола (реактанс); $X_L = \omega L$ – індуктивний опір (реактанс котушки індуктивності), $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – ємнісний опір (реактанс конденсатора).

Якщо виключити із кола ємність C (прийняти $C = \infty$), то закон Ома буде мати такий вигляд:

$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \qquad (15.6)$$

звідки

$$L = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{U_0}{i_0}\right)^2 - R^2}}{\omega}. \qquad (15.7)$$

Якщо ж виключити із повного кола індуктивність ($L = 0$) і активний опір ($R = 0$), то закон Ома можна записати у вигляді співвідношення

$$i_0 = \omega C u_0. \qquad (15.8)$$

В повному послідовному колі амплітуда сили струму i_0 досягає максимального значення

$$i_{0m} = \frac{u_0}{R}, \qquad (15.9)$$

коли індуктивний і ємнісний опори будуть однаковими:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \qquad (15.10)$$

В цьому випадку циклічна частота генератора дорівнює частоті власних коливань кола ω_0:

$$\omega = \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{15.11}$$

Зсув фаз (15.4) між струмом і напругою дорівнює нулю ($\varphi = 0$), тобто наступає резонанс напруг: $U_L = U_C$.

В даній роботі змінюється лише частота ω_0 власних коливань повного кола шляхом плавної зміни індуктивності L. Для цього передбачена можливість переміщувати феритове осердя у середині котушки. Вимірюються ефективні значення сили струму $i_{еф}$ в колі і напруги $U_{еф}$ при різних положеннях осердя h. Опір R визначається по значеннях i_m та U_0 при резонансі. Величини L і C знаходяться за напругою і струмом в колі при вимкнених ємності та індуктивності відповідно. В роботі визначається повний опір кола за законом Ома: $Z = U_0 / i_0$ для різних значень індуктивності, потім робиться його перевірка за формулою (15.5).

15.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з котушки змінної індуктивності L з активним опором R_L, конденсатора C, цифрового вольтметра *PV1*, мультиметра *PA1*, генератора синусоїдальних напруг *Г*, з'єднувальних провідників.

Схема лабораторної установки наведена на рис. 15.2.

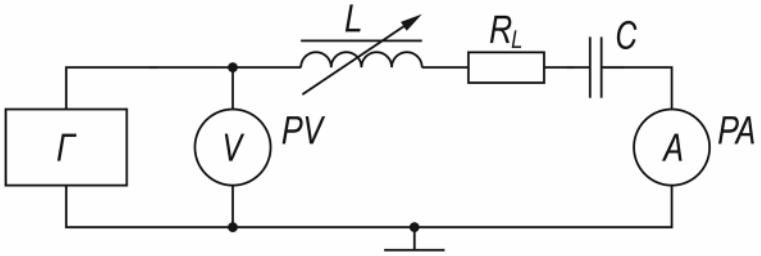


Рисунок 15.2

15.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Скласти схему (рис. 15.2). Простежити за тим, щоб нульові клеми всіх приладів були з'єднані разом. Встановити частоту генератора вказану на робочому місці.

2. Увімкнути живлення приладів. Встановити вихідну напругу генератора 1–5 *В*. Заглиблюючи осердя в котушку L, через кожні 2 *мм*, зняти залежність $i = f(h)$. Значення h, i, U занести до таблиці 15.1.

Таблиця 15.1 – Результати вимірювань

h, *мм*	i, *А*	U, *В*

3. Експериментально визначити глибину занурювання осердя h_P при резонансі напруг. Вимкнути живлення приладів.

4. Виключити із схеми (рис. 15.2) ємність C. Виконати завдання п. 2. Результати вимірювань занести до табл. 15.2. Вимкнути живлення.

Таблиця 15.2 – Результати вимірювань та розрахунків за відсутності ємності

h, *мм*	i, *А*	U, *В*	L, *Гн*

5. Виключити із схеми (рис. 15.2) індуктивність L. Увімкнути живлення приладів і визначити ефективне значення сили струму $i_{еф}$ та напругу $U_{еф}$. Вимкнути живлення і розібрати схему.

6. За даними, отриманими в завданнях 2 і 4, побудувати графіки залежностей $i = f(h)$, $U = f(h)$.

7. За ефективними значеннями сили струму і напруги при резонансі визначити активний опір кола R.

8. Використовуючи дані завдання 4, розрахувати за формулою (15.7) індуктивність L. Результати розрахунків занести до табл.15.2. Зобразити графічно залежність $L = f(h)$.

9. Із співвідношення (15.8) за даними завдання 5 визначити ємність конденсатора C.

10. Визначити імпеданс Z повного кола із закону Ома для трьох наступних значень h: $h_1 = 0$, $h_2 = h_P$, $h_3 = h_{\max}$.

11. Обчислити імпеданс Z за формулою (15.5) для вказаних вище даних h. Порівняти результати з експериментальними значеннями, отриманими в завданні 10.

12. Знайти різницю фаз φ за формулою (15.4) для тих самих значень індуктивності (при $h_1 = 0$, $h_2 = h_P$, $h_3 = h_{\max}$).

13. Розрахувати похибки для імпедансу Z, знайденого із закону Ома (15.3), і за формулою (15.5) для випадку $h_1 = 0$. Зробити висновок про точність використаного методу перевірки закону Ома для повного кола змінного струму.

15.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів у вигляді таблиць, графіки залежностей $i = f(h)$, $U = f(h)$, $L = f(h)$; результати обчислення активного опор кола *R*, ємності конденсатору, імпедансу Z повного кола, падіння напруги на ємності U_C та індуктивності U_L, розрахунок похибок, короткі висновки.

15.6 Контрольні запитання і завдання

1. Які коливання називаються вимушеними?
2. Наведіть диференціальне рівняння вимушених електромагнітних коливань. Який розв'язок має це рівняння?
3. Який струм називається змінним?
4. Запишіть закон Ома для повного кола змінного струму.
5. Що називається повним опором послідовного кола змінного струму?
6. Як залежать індуктивний і ємнісний опори від частоти вимушених коливань?
7. Що називається резонансом напруг? За якої умови він виникає?

16 ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУМУ ЗМІЩЕННЯ

16.1. Мета роботи: ознайомитись з рівняннями Максвелла, довести експериментально рівність струмів провідності та зміщення в колі змінного струму, що містить конденсатор.

16.2. Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Змінне магнітне поле викликає появу вихрового електричного поля. Англійський фізик Максвелл прийшов до висновку, що повинне існувати і зворотне явище: будь-яка зміна електричного поля викликає появу вихрового магнітного поля [2–5]. Перші два рівняння Максвелла вказують на цей взаємозв'язок у взаємодії магнітного та електричного полів:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \tag{16.1}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i_{пр} + \frac{d\Phi_e}{dt}. \tag{16.2}$$

Ліві частини цих рівнянь визначають циркуляцію векторів напруженості електричного $\vec{E}$ та магнітного $\vec{H}$ полів вздовж будь-якого замкненого контуру L, Φ_m та Φ_e – потоки векторів магнітної та електричної індукції (електричного зміщення), відповідно [2]. Оскільки магнітне поле є основною обов'язковою ознакою струму, то Максвелл назвав змінне електричне поле в рівнянні (16.2) струмом зміщення

$$i_{зм} = \frac{d\Phi_e}{dt}, \tag{16.3}$$

на відміну від струму провідності $i_{пр}$, зумовленого рухом заряджених частинок (електронів та іонів). Отже, змінне електричне поле – це струм зміщення, що, як і струм провідності, створює навколо себе магнітне поле, але, на відміну від струму провідності, не викликає виділення теплоти. В речовинах, що мають добру провідність, струм зміщення малий і ним можна знехтувати порівняно з струмом провідності. Навпаки, в середовищах, що мають погану провідність (діелектриках) та при високих частотах струм зміщення має найбільший вплив [2–5]. Великий струм зміщення виникає, наприклад, між обкладинками конденсатора, підключеного до високочастотного генератора *ВГ* змінної напруги, як на рис. 16.1.

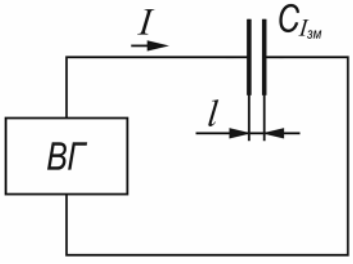


Рисунок 16.1

В цьому колі сила струму зміщення повинна дорівнювати силі струму провідності. Доведемо це.

В співвідношенні (16.3) електричний потік Φ_e виразимо через електричне зміщення (індукцію) $\vec{D}$:

$$\Phi_e = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{D}, \vec{n}\right) dS = \int_S D_n dS, \tag{16.4}$$

де S – площа пластини конденсатора,
$\vec{n}$ – зовнішня нормаль до елементу площі dS.
Вважатимемо конденсатор плоским, ємність його дорівнює

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l}, \tag{16.5}$$

де ε_0 – електрична стала,
ε – діелектрична проникність речовини між пластинами,
l – відстань між пластинами.
Для плоского конденсатора справедливе співвідношення

$$D_n = D = \varepsilon_0 \varepsilon E, \tag{16.6}$$

де E – напруженість електричного поля між пластинками. Вона дорівнює

$$E = \frac{U}{l}, \tag{16.7}$$

де U – різниця потенціалів між обкладинками.
Напруга $U_Г$ на виході генератора змінюється за гармонічним законом:

$$U_Г = U_0 \sin \omega t, \tag{16.8}$$

де U_0 – амплітуда, $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота, ν – частота.
Враховуючи співвідношення (16.3–16.8) знайдемо силу струму зміщення:

$$i_{зм} = \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S D dS = \frac{d}{dt}\int_S \varepsilon_0 \varepsilon E dS = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt}\int_S \frac{U_Г}{l} dS = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{ldt}\int_S U_0 \sin \omega t dS =$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon U_0 \frac{d(\sin \omega t)}{ldt}\int_S dS = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l} U_0 \omega \cos \omega t = C U_0 \omega \cos \omega t,$$

У цьому виразі

$$i_{0зм} = C U_0 \omega \tag{16.9}$$

– амплітуда струму зміщення.
Знайдемо тепер амплітуду сили струму провідності $i_{0пр}$. Для цього скористаємось законом Ома для кола змінного струму, що містить конденсатор:

$$i_0 = \frac{U_0}{R_C} = \frac{U_0}{1/\omega C} = C U_0 \omega, \tag{16.10}$$

де $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивний опір конденсатора.

Порівнявши праві частини виразів (16.9) та (16.10) ми бачимо, що амплітуди сил струмів зміщення та провідності однакові:

$$i_{0\,зм} = i_{0пр}.$$

Тобто струм зміщення між обкладинками конденсатора створює навколо себе таке саме змінне магнітне поле, що і струм провідності. Якщо в це поле між пластинками конденсатора помістити котушку з дротом (соленоїд), то в ній за законом Фарадея виникає ЕРС індукції та індуктивний струм, що дорівнює за величиною струму провідності у колі конденсатора. У вимірюванні цих струмів і полягає перше завдання даної роботи.

В другому завданні перевіряється зворотній процес, для цього соленоїд підключають до генератора і змінне магнітне поле між пластинами конденсатора створює вихрове електричне поле на його пластинах.

Вимірюють струм провідності в колі конденсатора і струм «зміщення», що створюється соленоїдом між пластинами конденсатора.

16.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з конденсатора ємністю *C*, котушки, що має індуктивність *L*, резистора з опором *R1*=10 *кОм*, високочастотного генератора *ВГ* та осцилографа *РО*. Значення *C* та *L* вказані на лабораторній установці.

16.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

16.4.1 Завдання 1

1. Скласти схему (рис. 16.2).

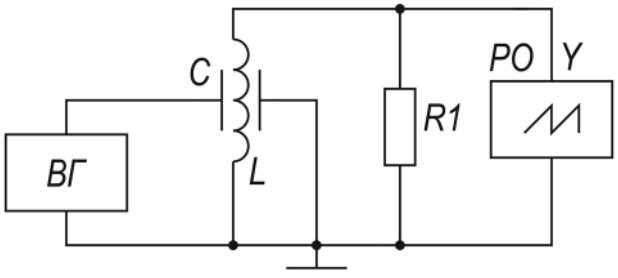


Рисунок 16.2

2. Встановити частоту генератора $\nu = 4\text{–}10$ *МГц* та ефективну величину вихідної напруги генератору $U_Г = 3$ *В*.

3. Виміряти за допомогою осцилографа амплітуду напруги на резисторі R та знайти його ефективне значення за формулою

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

4. Визначити силу струму провідності:

$$i_{пр} = \frac{U_Г}{R_C} = \frac{U_Г}{1/\omega C} = U_Г \omega C = 2\pi\nu U_Г C.$$

5. Знайти силу струму зміщення, нехтуючи індуктивним та активним опорами котушки, порівняно з опором *R1*: $i_{зм} = U / R_1$.

6. Порівняти сили струму зміщення та провідності. Визначити похибки вимірювань, враховуючи, що абсолютна похибка всіх величин (ΔR, ΔC, $\Delta\nu$) складає 10 % від їх номінальних значень.

16.4.2 Завдання 2

1. Зібрати схему (рис. 16.3),

2. Встановити частоту генератора $\nu = 4$–10 *МГц* та ефективну величину вихідної напруги генератору $U_Г = 3$ *В*.

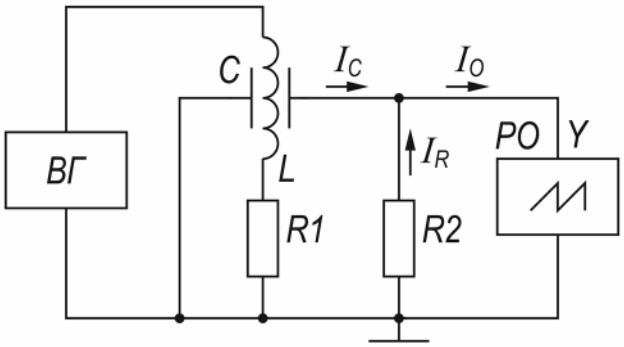


Рисунок 16.3

2. Виміряти за допомогою осцилографа амплітуду напруги U_0 на паралельному з'єднанні $R_C = \frac{1}{\omega C}$ та *R2*=10 *кОм*. Знайти ефективне значення: $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

3. Визначити опір конденсатора R_C і повний опір $R_{//}$ паралельного з'єднання R_C та *R2*.

4. Визначити струм провідності в колі котушки *L*, нехтуючи її активним та індуктивним опором: $i_{пр} = \frac{U_Г}{R_1}$.

5. Знайти силу струму $i_0 = i_C + i_R$ за формулою $i_0 = \frac{U}{R_{//}}$.

6. Порівняти визначене значення сили струму з струмом провідності $i_{пр.}$ Зробити висновки. Розрахувати похибки результатів вимірювань.

16.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи; схему лабораторної установки; результати вимірів у вигляді таблиць; результати обчислення сили струму провідності, сили струму зміщення; статистичну обробку результатів вимірювання; стислі висновки.

16.6 Контрольні запитання і завдання:

1. Що називається струмом зміщення?
2. В чому подібність і відмінність між струмом зміщення і струмом провідності?
3. Доведіть однаковість струму зміщення і струму провідності в колі, що містить конденсатор.
4. Як в завданні 1 визначають струми провідності і зміщення?
5. Як створюється струм зміщення в завданні 2?
6. Як в завданні 2 визначають струми провідності і зміщення?
7. Запишіть та поясніть рівняння Максвелла в інтегральному та диференціальному вигляді.

Додаток А

ЕЛЕКТРОННІ ПРИБОРИ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ З ЕЛЕКТРИКИ ТА МАГНЕТИЗМУ

А.1 ОСЦИЛОГРАФ УНІВЕРСАЛЬНИЙ ДВОКАНАЛЬНИЙ С1–77

Універсальний осцилограф С1–77 призначений для дослідження форми електричних сигналів у діапазоні частот від 0 до 10 МГц шляхом візуального спостереження, виміру розмахів напруги в діапазоні від 0,01 до 200 *В* и часових інтервалів від $0{,}08\cdot10^{-6}$ до 0,4 *с*. Наявність двох каналів вертикального відхилення забезпечує одночасне спостереження двох сигналів на екрані осцилографа. Передня панель осцилографа показана на рис. А.1

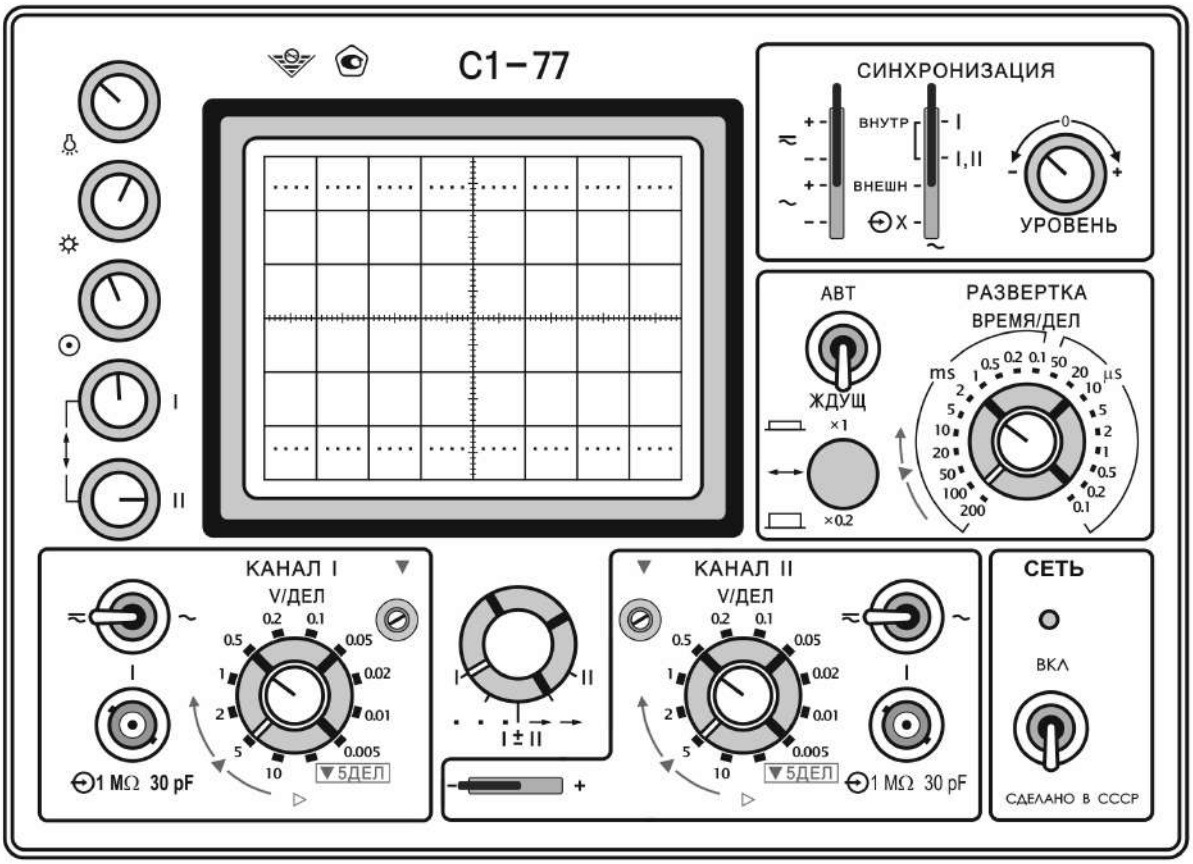


Рисунок А.1

А 1.1 Підготовка до проведення вимірів

1. Під'єднати осцилограф до мережі ~220 *В* і увімкнути тумблер СЕТЬ. Прогріти осцилограф протягом 1–2 хвилини і розпочати перевірку його працездатності та балансування.

2. Перевести перемикач роду роботи в положення «↕».

3. Ручкою «☼» встановити яскравість зображення, зручну для спостереження, а ручкою «⊙» сфокусувати зображення.

У випадку відсутності лінії розгортки ручкою «⇕» вертикального переміщення одвести розгортки на робочу частину екрана.

4. Після 10-хвилинного прогріву зробити балансування підсилювача Y для чого закоротити вхід підсилювача на корпус, встановити перемикач «V/дел» каналу **I** в положення «0.01» і ручкою «⇕**I** » встановити лінію розгортки в центр екрана.

5. Для балансування каналу **II** перевести ручку вибору режиму роботи підсилювача в положення "**II**". Балансування проводити аналогічно п.1.4., використовуючи при цьому органи управління, які відносяться до каналу **II**.

6. Для калібрування коефіцієнта відхилення встановити перемикач «V/дел» в положення «▼ 5 дел.». Ручки «▷» встановити в крайнє праве положення. Перемикач роду роботи підсилювача встановити в положення «**I**». При цьому величина зображення сигналу на екрані має бути рівною 5 поділкам.

7. Осцилограф дозволяє робити алгебраїчне додавання та віднімання двох сигналів. Для цього встановити перемикач каналів в положення «**I-II**». Для додавання сигналів перемикач полярності встановити в положення «+», а для віднімання – «–».

8. Тумблером вибору входу «⎓, ≂» вибрати вид зв'язку підсилювача з джерелом досліджуваного сигналу.

В положенні «≂» зв'язок з джерелом досліджуваного сигналу відбувається за постійним струмом. Цей режим може бути використаний, якщо постійна складова досліджуваного сигналу сумарна зі змінною складовою.

9. Для роботи з осцилографом в одноканальному режимі може використовувати будь-який із вхідних каналів

А.1.2 Проведення вимірів

1. Для вимірювання напруг здійснити такі операції:

а) подати кабелем сигнал на гніздо «⊖ 1MΩ30pF» одного з каналів;

б) поставити перемикач «V/дел» в таке положення, щоб амплітуда зображення складала приблизно 5 поділок;

в) поставити тумблер ««⎓, ≂»» в положення «⎓» при вимірюванні змінної напруги і в положення «≂» при вимірі постійної або змінної напруги частоти нижче 50 *Гц*;

г) ручкою УРОВЕНЬ встановити стійке зображення. Поставити перемикач ВРЕМЯ/ДЕЛИТЕЛЬ в положення, при якому спостерігається декілька періодів досліджуваного сигналу;

д) встановити ручку «⇕» вертикального переміщення так, щоб мінімальний рівень сигналу співпадав з однією з нижніх ліній, а максимальний знаходився в межах екрана. Ручкою «▷» горизонтального переміщення змістити зображення таким чином, щоб один з верхніх піків знаходився на вертикальній середній лінії шкали;

є) виміряти кількість поділок шкали між крайніми точками розмаху амплітуди і помножити на коефіцієнт відхилення перемикача «V/дел». При цьому ручка «▷» має бути встановлена в крайньому правому положенні.

2.Вимірювання фази за допомогою фігур Ліссажу

а) подати синусоїдальні сигнали на входи «⊖ 1MΩ30pF» одного з каналів і «⊖ **X**»;

б) перемикач виду синхронізації поставити в положення «⊖ **X**»:

в) перемикач режиму роботи підсилювача встановити в положення, яке відповідає вибраному каналу;

г) ручкою «V/дел» встановити зображення в межах екрана;

д) ручками «↕» і «↔» встановити зображення в центрі екрана;

є) виміряти відстань A і B. Різниця фаз визначається співвідношенням $\varphi = \arcsin A / B$ (рис 2.5).

2.3 Визначення фази між сигналами однієї частоти можна здійснити, використовуючи двоканальний режим осцилографа. Для цього необхідно:

а) встановити тумблери «⎓,≂» в однакове положення;

б) встановити перемикач режиму роботи підсилювача в положення «...» або «→→». Режим «...» звичайно вживається при низькочастотних сигналах;

в) встановити перемикач виду синхронізації в положення ВНУТР.1;

г) подати опорний сигнал на вхід каналу **I**, а порівнювальний – на вхід каналу **II**. Опорний сигнал повинен попереджати порівнювальний в часі;

д) якщо сигнали протилежної полярності, перемикачем полярності «+, –» другого каналу інвертувати сигнали;

є) встановити перемикачем ВРЕМЯ/ДЕЛ на швидкість розгортки, яка забезпечує один цикл сигналів на екрані;

А.2 ГЕНЕРАТОР ЛЗО

А 2.1 Підготовка до роботи

Встановити органи управління в такому порядку:

– рівень – за годинниковою стрілкою до упору;

– девіацію – проти годинниковою стрілки до упору.

Натиснути кнопки перемикачів ДЕЛИТЕЛЬ, РОД РАБОТЫ, МНОЖИТЕЛЬ.

А.2.2 Порядок роботи

1. Для вибору необхідної форми сигналу на перемикачі РОД РАБОТЫ натиснути відповідну кнопку.

2. Встановити необхідний рівень вихідного сигналу за допомогою перемикача ДЕЛИТЕЛЬ, а ручка УРОВЕНЬ має знаходитися в крайньому правому положенні.

Величина вихідної напруги регулюється плавно та ступенево в межах: 100 *мВ*– 1 *В* на гнізді «1 В» при навантаженні 60 *Ом*; 1–10 *В* на гнізді «10 В» при навантаженні 500 *Ом*.

Вихід «10 В» ступеневого регулювання не має.

3. Встановити необхідну частоту за індикатором за допомогою перемикача МНОЖИТЕЛЬ і ручки ЧАСТОТА.

Генератор забезпечує діапазончатот від 20Гц до 10МГц з піддіапазонами:

0,02 –	02 *кГц*;	20,0 –	200 *кГц*;
0,2 –	2,0 *кГц*;	200 –	2000 *кГц*;
2,0 –	20 *кГц*;	2000 –	10000 *кГц*;

А.3 ІНСТРУКЦІЯ З ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕРАТОРА СИНУСОЇДАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ГЗ-118

А.3.1 Основні технічні дані

1. Частота вихідного сигналу встановлюється в діапазоні від 10Гц до 200кГц.

Установка частоти відбувається дискретно на п'яти піддіапазонах:

1) 10 – 100 *Гц* через 0,1 *Гц*;
2) 100 – 1000 *Гц* через 1 *Гц*;
3) 1,0 – 10 *кГц* через 10 *Гц*;
4) 10 – 100 *кГц* через 100 *Гц*;
5) 100 – 200 *кГц* через 100 *Гц*.

2. Відносна (основна) похибка ε установки частоти складає:

1) $\varepsilon_1 = \pm\left(1+\frac{50}{\nu}\right)\%$ у діапазоні частот I0 *Гц*-20 *кГц*;

2) $\varepsilon_2 = \pm 1{,}5\%$ – у всьому іншому діапазоні частот (ν – встановлене значення частоти, *Гц*).

3. Під час роботи з низькоомними навантаженнями (більш 5 *Ом*) слід використовувати вихід «**I**» генератора. Для цього перемикач "ΔdB" встановлюється в положення «**I**».

Ручка "" дозволяє встановити необхідну вихідну напругу в межах від 2,5 *В* до 10 *В*.

4. Якщо номінальний опір навантаження генератора складає P_H=600±6 *Ом*, використовується вихід «**II**» .

Гніздо «**II**» вмикається в усіх положеннях перемикача «ΔdB» відмінних від положення «**I**». При цьому гніздо «**I**» залишається з'єднаним з вихідним підсилювачем генератора через резистор 1-2 *кОм* і може бути використано для підключення осцилографа, а також як джерело сигналу синхронізації, частотомір і т.ін. Максимальна вихідна напруга на гнізді «**II**» при номінальному

навантаженні складає 5 *В*. Регулювання напруги відбувається плавно ручкою «⌓» і дискретно від 0 до 60 *дБ* через 10 *дБ* перемикачем «Δ*dB*».

Якщо навантаження, під'єднане до гнізда «⊖», відрізняється від 600 *Ом*, вихідну напругу генератора $U_{вих}$ можна обчислити за формулою

$$U_{вих} = U_{вих\ х.х.} \frac{R_H}{P_H - 600},$$

де $U_{вих\ х.х.}$ – напруга на ненавантаженому виході, *В*;

P_H – опір навантаження, *Ом*.

А.3.2 Порядок роботи

1. Встановити перемикачі «Н» і МНОЖИТЕЛЬ в положення, відповідне вибраній частоті.

2. Під'єднати вхідний кабель навантаження (схеми) до одного з виходів генератора «⊖ **I**» або «⊖ **II**» в залежності від опору навантаження (див. пп. 1.3, 1.4).

3. Тумблер СЕТЬ поставити в пложення «**I**». При цьому має засвітитися лампочка індикатора вмикання генератора.

Для початку роботи необхідно прогріти генератор протягом 15 хвилин. Перша цифра відліку частоти вказується в одному із двох вікон, розміщених зліва від відлікових вікон декад.

Положення «**II**» старшої декади відповідає п'ятому піддіапазону частоти (від 100 *кГц* до 200 *кГц*). Перемикачі «Hz» середньої і молодшої декад мають по 10 положень, а перемикач старшої – 11. Під час установки в положення «**II**» в індикаторному вікні старшої декади фіксується «0», який буде другою цифрою у відліку частоти.

А.4 ВОЛЬТМЕТР УНІВЕРСАЛЬНИЙ В7–21А

А.4.1 Вольтметр призначений для вимірів:

– напруги і сили постійного струму;
– напруги і сили змінного струму;
– активного опору.

А.4.2 Діапазонів вимірів:

– напруга постійного струму: $1 \cdot 10^{-6} - 10^{3}\ В$;
– напруга змінного струму: $1 \cdot 10^{-5} - 10^{3}\ В$;
– сила постійного струму: $1 \cdot 10^{-11} - 10\ А$;
– сила змінного струму: $1 \cdot 10^{-6} - 10\ А$;

– активний опір: $1 \cdot 10^{-2} - 1{,}2 \cdot 10^{7}\ B;$

– частотний діапазон вимірюваних напруг: $20 - 1 \cdot 10^{-5}\ Гц$

– частотний діапазон вимірювання сили змінного струму: $20 - 20 \cdot 10^{3}\ Гц$.

А.4.3 Похибки вимірів.

Межі припустимої відносної похибки при вимірюванні:

1. Напруги постійного струму в межах вимірів менше 10 *мВ*

$$\delta = \pm\left[0{,}006 + 0{,}3\left(\left|\frac{U_K}{U_X}\right| - 1\right)\right].$$

2. Напруги постійного струму в межах вимірів більше 10 *В*:

$$\delta = \pm\left[0{,}1 + 0{,}4\left(\left|\frac{U_K}{U_X}\right| - 1\right)\right].$$

3. Напруга змінного струму:

$$\delta = \pm\left[0{,}1 + 0{,}5\left(\left|\frac{U_K}{U_X}\right| - 1\right)\right].$$

4. Сили змінного струму «≂ 100 *мА* »,« ≂ 1 *мА* »:

$$\delta = \pm\left[0{,}4 + 0{,}05\left(\left|\frac{I_K}{I_X}\right| - 1\right)\right].$$

5. Активний опір:

$$\delta = \pm\left[0{,}1 + 0{,}4\left(\left|\frac{R_K}{R_X}\right| - 1\right)\right].$$

А.4.4 Тривалість одного виміру

1. τ = 800 *мс* на межі «⎓10 *мВ*» і «⎓100 *нА*»,
2. 80 *мс* – при вимірі постійної напруги і сили постійного струму в інших межах;
3. 10 *с* – при вимірі напруги і сили змінного струму.

А.4.5 Порядок роботи

1.Основні органи управління і підключення розміщені на передній панелі приладу.

«≂ U» – клема для підключення вимірюваних напруг;

«≂ I» – клема для підключення вимірюваних струмів;

«0» – низькопотенційна клема при вимірі напруг і струмів;

ЭКРАН – клема для підключення екрана вимірювального кабелю;

«⊕ E» – дві пари клем для виміру активного опору.

В середній частині передньої панелі розмішені перемикач межі вимірів і перемикач роду роботи. В положенні «⌑» відбувається автоматичний вибір меж вимірів. Перемикачем роду роботи робиться його вибір.

– положення «⎓ U» – режим вимірювання постійної напруги;
– положення «~ U» – режим вимірювання змінної напруги;
– положення «⎓ I» – режим постійного струму;
– положення «~ I» – режим змінного струму;
– положення «R» – режим опору.

Тумблер СЕТЬ розміщений на задній панелі.

2. Підготовка до вимірювання постійної напруги:

1) під'єднати вимірювальний кабель до клем «≂ U», «0» і ЕКРАН;
2) перемикач роду роботи встановити в положення «⎓ U»;
3) перемикач меж вимірювань встановити на межу, яка вимагається, а якщо вона невідома, то на максимальне значення «⎓ U»;

3. Підготовка до вимірювання змінної напруги:

1) перемикач роду роботи встановити в положення «~ U»;
2) перемикачем меж вимірювання встановити необхідну межу, а якщо вона невідома, то на максимальне значення U.

4. Підготовка до вимірювання сили струму:

1) під'єднати вимірювальний кабель до вхідних клем «≂ I», «0» і ЭКРАН;
2) перемикач роду роботи встановити в положення «⎓ I» при вимірі постійного струму або в положення «~ I» при вимірюванні змінного струму;
3) встановити потрібну' межу вимірів.

5. Вимірювання активного опору.

1) під'єднати кабель до вхідних клем «R» і ЭКРАН;
2) перемикач роду роботи встановити в положення «R»;
3) перемикач роду роботи встановити на таку межу виміру, яка вимагається.

Після проведення цих операцій вольтметр готовий до роботи. За необхідності перевірки нуля або проведення будь-яких регулювань звертатися до викладача.

Додаток Б

ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Кафедра фізики

З В І Т И
з лабораторних робіт
з електромагнетизму

Виконав:
ст. гр. АКТСІ-17-2
Лобзев Сергій Романович

Перевірив:
доц. Орел Р.П.

Харків, 2018

Б.1 ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА

Б.1.1 Мета роботи.

Дослідити рух зарядженої частинки у взаємно перпендикулярних електричному і магнітному полях.

Б.1.2 Експериментальні дослідження

Б.1.2.1 Опис лабораторної установки

Схема лабораторної установки наведена на рисунку Б.1

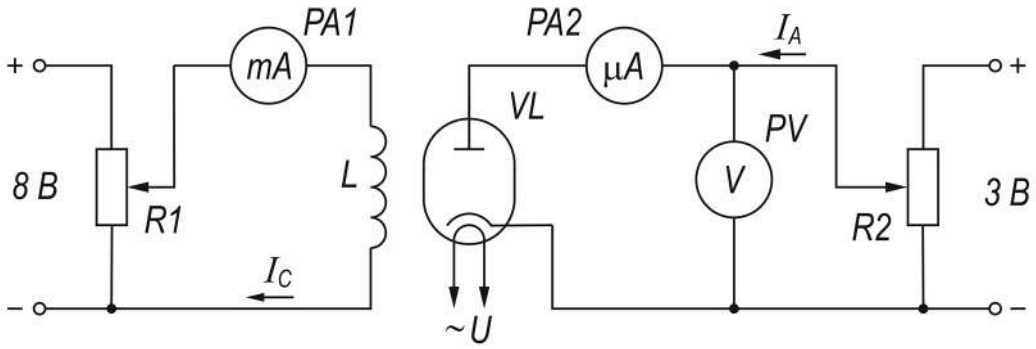


Рисунок Б.1 – Принципіальна електрична схема лабораторної установки

Б.1.2.2 Результати вимірювань

Отримаємо залежність анодного струму I_a від струму соленоїда I_c для різних значень напруги, що подається на анод. Результати додамо до таблиці Б.1. Графіки залежності $I_a = f(I_c)$ для різних значень напруги на аноді наведено на рис. Б.12

Таблиця Б.1 – Результати вимірювань

U=1B	I_c, mA	0	50	90	110	120	130	150	170	200
	I_a, μA	90	87	85	80	75	45	10	5	3
U=2B	I_c, mA	125	125	120	115	105	75	20	10	7
	I_a, μA	165	161	160	155	145	100	30	16	12
U=3B	I_c, mA	0	50	90	110	120	130	150	170	200
	I_a, μA	90	87	85	80	75	45	10	5	3

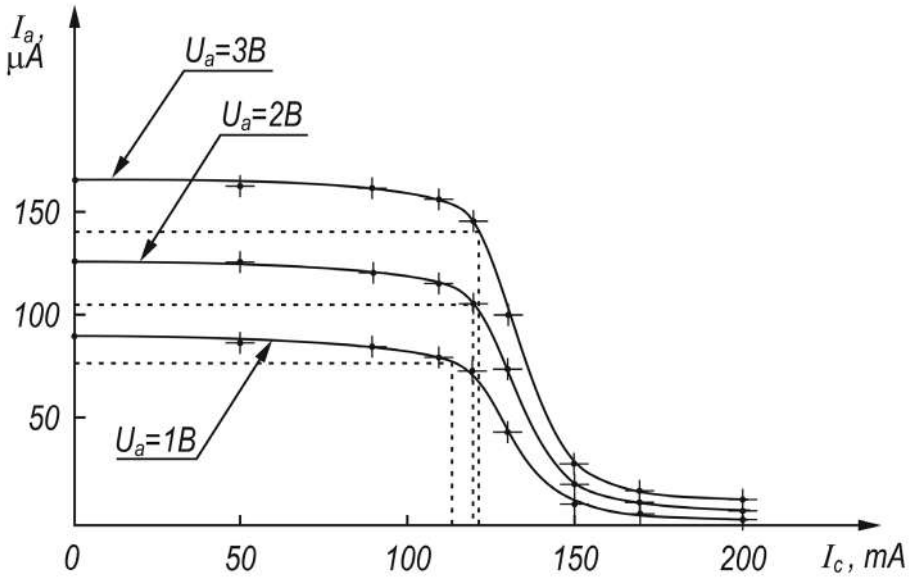


Рисунок Б.2 – Графік залежності $I_a = f(I_c)$

Б.1.3 Обробка результатів експериментальних досліджень

1. Розрахуємо похибки прямих вимірювань:

$$\Delta U_a = \frac{2{,}5 \cdot 3}{100} = 0{,}075 \ B,$$

$$\Delta I_a = \frac{2{,}5 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{100} = 5 \cdot 10^{-6} \ A,$$

$$\Delta I_c = \frac{1{,}5 \cdot 500 \cdot 10^{-3}}{100} = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \ A.$$

2. За формулою $B_{кр} = DI_{кр}$, де $D = 4{,}2 \cdot 10^{-2} \frac{Тл}{A}$ розрахуємо критичне значення індукції магнітного поля. Для цього з графіків рис. Б.2 визначимо струм $I_{кр}$, який дорівнює тій величині струму соленоїда, яка відповідна до $0{,}85 \cdot I_0$, де I_0 – значення анодного струму при $I_c = 0$ – пунктирні лінії на графіку (рис. Б.2). Результати занесемо до таблиці Б.2.

Таблиця Б.2 – Результати розрахунків

U, B	$I_0 \times 10^{-3}$, A	$I_{кр} \times 10^{-3}$, A	$B_{кр} \times 10^{-3}$, $Тл$
1	90	113	4,75
2	125	120	5,04
3	165	123	5,17

3. Побудуємо графік залежності $B_{кр}^2$ від U як лінійну залежність. Графік наведено на рис. Б.3.

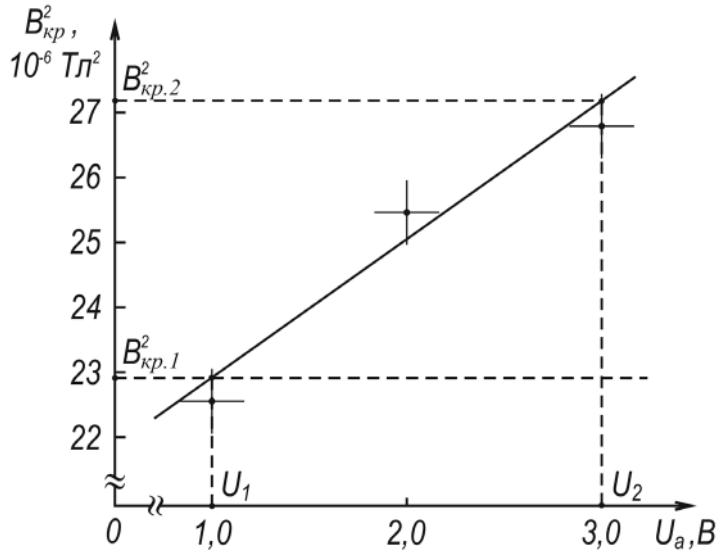


Рисунок Б.3 – Графік залежності $B_{кр}^2 = f(U_a)$.

4. Визначимо з графіку $B_{кр}^2 = f(U_a)$ питомий заряд електрона, як:

$$\frac{e}{m} = \frac{8}{r_a^2} \cdot \frac{(U_2 - U_1)}{(B_{кр.2}^2 - B_{кр.1}^2)},$$

$$\frac{e}{m} = \frac{8}{(4{,}5)^2 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{(3-1)}{(27{,}2 - 22{,}9) \cdot 10^{-6}} \approx 1{,}84 \cdot 10^{11} \ \frac{Кл}{кг}.$$

5. Визначимо абсолютну похибку питомого заряду електрона

$$\Delta\frac{e}{m} = \sqrt{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta U_a}{U_2 - U_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B_{кр}^2}{B_{кр.2}^2 + B_{кр.1}^2}\right)^2},$$

$$\Delta\frac{e}{m} \approx 0{,}42 \cdot 10^{11} \ \frac{Кл}{кг}.$$

Висновок

У результаті дослідження руху зарядженої частинки у взаємоперпендикулярних електричному і магнітному полях визначено експериментально значення питомого заряду електрону, яке дорівнює $(1{,}84 \pm 0{,}42) \cdot 10^{11}$ $Кл/кг$, що співпадає з теоретичним значенням $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ $Кл/кг$ в межах отриманої похибки.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Запитання і відповіді до лабораторних робіт з фізики „Електрика та магнетизм”, ч.2 для студентів усіх спеціальностей. / Упоряд. А.І. Рибалка, С.С. Авотін, В.І. Бедратий та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2004. – 60 с.

2. Кібець І. М. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 2. Електрика та магнетизм: навчальний посібник. / І.М. Кібець, А.І. Рибалка, В.О. Стороженко. - Харків: «Компанія СМІТ», 2009. – 424 с.

3. Савельєв І.В. Курс фізики,т.2 – М.: Наука, 1989. – 464с.

4. Українець М. І. Електромагнетизм. Хвилі. Оптика: навч. посібник. / М.І. Українець, Т.Б. Ткаченко, В.В. Калінін та ін. – Харків: ХТУРЕ, 2005 – 164 с.

5. Лабораторний практикум з фізики/ За ред. К.А. Барсукова та Ю. І. Уханова. – М.: Вищ. шк., 1988. – 351 с.

6. Черкашин В. П. Фізика. Електрика та магнетизм. – Київ: Вищ. шк., головне видавництво, 1986. – 167 с.

7. Фізичний енциклопедичний словник/ За ред. А.М. Прохорова. – М.: Рад. енциклопедія, 1984. – 944 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни

«ФІЗИКА»

частина 2

(Електрика та Магнетизм)

для студентів усіх спеціальностей і форм навчання

Упорядники: ОРЕЛ Роман Петрович,
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна,
СТОРОЖЕНКО Володимир Олександрович,
РИБАЛКА Антоніна Іванівна,
КОЗАРЬ Анатолій Іванович,
МЕШКОВ Сергій Миколайович,
КАЛІНІН Віталій Веніамінович ,
ОНИЩЕНКО Андрій Анатолійович,
МЯГКИЙ Олександр Валерійович,
КРАВЧЕНКО Сергій Геннадійович ,
БОЖКО Тетяна Георгіївна ,
МОІСЕЄНКО Олександр Вікторович .

Відповідальний випусковий Р. П.Орел

Редактор Б. П. Косіковська

Комп’ютерна верстка Л. Д. Медведєва

План 2018, поз. 46

Підп. до друку Формат 60×84 1/16. Спосіб друку – ризографія.

Умов. друк. арк. Облік. вид. арк. Тираж прим.

Зам. № Ціна договірна.

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

Віддруковано в навчально-науковому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з фізики
(розділи «Оптика, «Атомна фізика», «Фізика твердого тіла»)
для студентів всіх форм навчання і всіх спеціальностей

Харків 2010

ЗМІСТ

Загальні положення ……..... 3
1 Визначення кривини поверхні лінзи за допомогою кілець Ньютона..... 4
2 Дослідження дифракції світла від щілини у досліді Фраунгофера..... 9
3 Визначення параметрів дифракційної решітки по інтерференційній картині у досліді Юнга..... 13
4 Дослідження теплового випромінювання нагрітих тіл ……..... 20
5 Дослідження зовнішнього фотоефекту …….. 25
6 Визначення потенціалів збудження та іонізації атомів методом Франка і Герца 30
7 Дослідження атомного спектра водню……..... 37
8 Дослідження оптичного квантового генератора (лазера) ……..... 41
9 Дослідження температурної залежності електропровідності твердих тіл та визначення енергії активації напівпровідника ……..... 46
Додаток …..……..……
Перелік посилань 51
……...……

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дане видання містить методичні вказівки до виконання робіт фізичного практикуму, створеного на кафедрі фізики університету. Воно призначене для студентів, що виконують лабораторні роботи з оптики, атомної физики та фізики твердого тіла (третя частина курсу фізики).

Мета лабораторного практикуму:

– наочне підтвердження фізичних законів;

– набуття елементарних навичок наукового дослідження;

– ознайомлення студентів із сучасною вимірювальною апаратурою;

– освоєння студентами методів обробки і оцінки достовірності експериментальних результатів;

– забезпечення зв'язку практикуму з лекційним курсом і практичними заняттями з фізики.

Виконання лабораторного завдання складається із попередньої підготовки, проведення лабораторного експерименту і складання звіту про результати роботи.

Лабораторні роботи виконуються відповідно до семестрового графіка, який знаходиться на стенді в лабораторії, тому кожен студент має можливість підготуватися до них заздалегідь.

Підготовка до роботи має проводитися в наступній послідовності. Перш за все, потрібно ознайомитися з описом роботи і вивчити її теоретичний вступ, звернувши особливу увагу на виведення розрахункових формул. Для більш повного з'ясування деяких питань теорії слід звернутися до рекомендованої літератури, а також до конспекту лекцій.

Готовність кожного студента до виконання роботи перевіряється викладачем перед початком роботи опитуванням (письмово чи усно).

Під час роботи в лабораторії мають точно виконуватися правила внутрішнього розпорядку та техніки безпеки. Після отримання дозволу від викладача студенти проводять вимірювання і заносять їх до таблиць у лабораторному журналі. Потім на основі експериментальних даних виконують відповідні розрахунки.

Звіт за кожну лабораторну роботу оформлюється у відповідності з ДСТУ 3008-95 і має містити назву та мету роботи, схему (рисунок) лабораторної установки, результати вимірювань (у вигляді таблиць), робочу формулу та результати розрахунків у вигляді графіків (або таблиць), висновки з результатів, що одержані в роботі. Зразок оформлення звіту міститься на спеціальному стенді в лабораторії та наведений у Додатку. Студенти, що оформили звіти не за зразком, до захисту циклу лабораторних робіт не допускаються.

1 ВИЗНАЧЕННЯ КРИВИЗНИ ПОВЕРХНІ ЛІНЗИ ЗА ДОПОМОГОЮ КІЛЕЦЬ НЬЮТОНА

1.1 Мета роботи

Застосувати на практиці знання законів інтерференції світла. Визначити кривизну поверхні лінзи за допомогою кілець Ньютона.

1.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

При підготовці до виконання лабораторної роботи самостійно проробити теорію [1, с.307-308; 2, с.281-285].

У роботі використовується методика визначення радіуса R кривизни сферичної поверхні плоско-випуклої лінзи 1 (рис. 1.1) на підставі інтерференційної у вигляді концентричних світлих і темних кілець, які виникають при накладанні когерентних хвиль, відбитих від двох поверхонь повітряного зазору II між випуклою поверхнею лінзи I і плоскою поверхнею полірованої скляної пластини III.

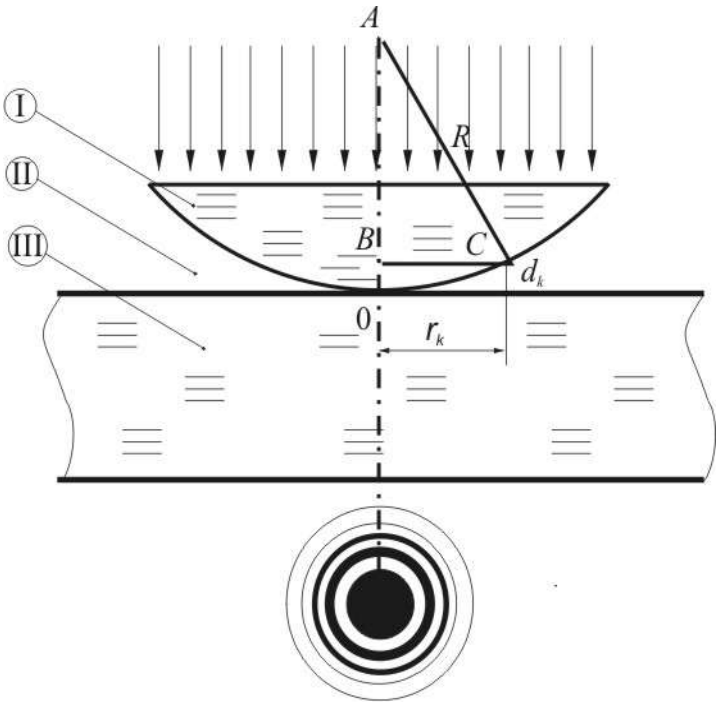


Рисунок 1.1

Паралельний пучок світла падає нормально на плоску поверхню лінзи (I) і частково відбивається від верхньої та нижньої поверхонь повітряного зазору (II) між лінзою та пластиною (III). При накладанні відбитих променів виникають смуги рівної товщини, які при нормальному падінні світла мають вигляд концентричних окружностей.

Особливості кільцевої інтерференційної картини обумовлені наступними факторами:

1. В точці А на рис. 1.1 припускається абсолютно повне прилягання лінзи до пластини, а отже, відсутність межі розподілу середовищ і відбитих світлових хвиль (темна пляма у центрі)

2. Повітряний зазор має форму кільця, а його перетин – має форму клина товщини d, яка міняється.

3. Різниця ходу Δ хвиль формується не тільки за рахунок двократного проходження однієї із хвиль повітряного зазору, а також і за рахунок різних умов відбиття від межі розподілу середовищ I – II (лінза – повітря) і II - III (повітря – пластина). Це обумовлено втратою півхвилі $\lambda/2$ при відбитті від межі розподілу із середовищем II, яке має більшу оптичну густину.

$$\Delta = 2d - \lambda/2 . \tag{1.1}$$

Для отримання розрахункової формули будемо розглядати тільки світлі кільця, які відповідають умовам інтерференційних максимумів і для яких різниця ходу дорівнює парному числу півхвиль.

$$\Delta = 2k\,\lambda/2 , \tag{1.2}$$

де k=0,1,2,3,….

Із порівняння формул (1.1) і (1.2) отримаємо:

$$2d_k = (2k+1)\lambda/2 . \tag{1.3}$$

Для прямокутного трикутника ΔABC можна записати:

$$R = (R - d_k)^2 + r_k^2 .$$

Так як d_k є дуже малим, то значенням d_k^2 можна знехтувати і отримати:

$$r_k^2 = 2d_k \cdot R$$

або

$$r_k^2 = R(2k+1)\lambda/2 .$$

Для виводу розрахункової формули зручно порівнювати кільця з номерами *«k»*, *«m»* таким чином:

$$r_k^2 - r_m^2 = R(k-m)\lambda .$$

Звідки отримуємо формулу для розрахунку радіусу кривизни сферичної поверхні лінзи:

$$R = \frac{(r_k + r_m)(r_k - r_m)}{(k-m)\lambda} \qquad (1.4)$$

Рекомендація: Для більшої точності розрахунків треба дотримуватися таких умов: 1) $m>3$; 2) $k/m>1{,}5$.

1.3. Опис лабораторної установки

Лабораторна установка складається з мікроскопу, до якого входять освітлювач із світлофільтром, тест – об'єкту (лінза і плоскопаралельна плпстина в металевій оправці) і лінійки для визначення ціни поділки мікроскопу. Хода променів і картина кілець Ньтона, які спостерігаються у мікроскопі показани на рис.1.2.

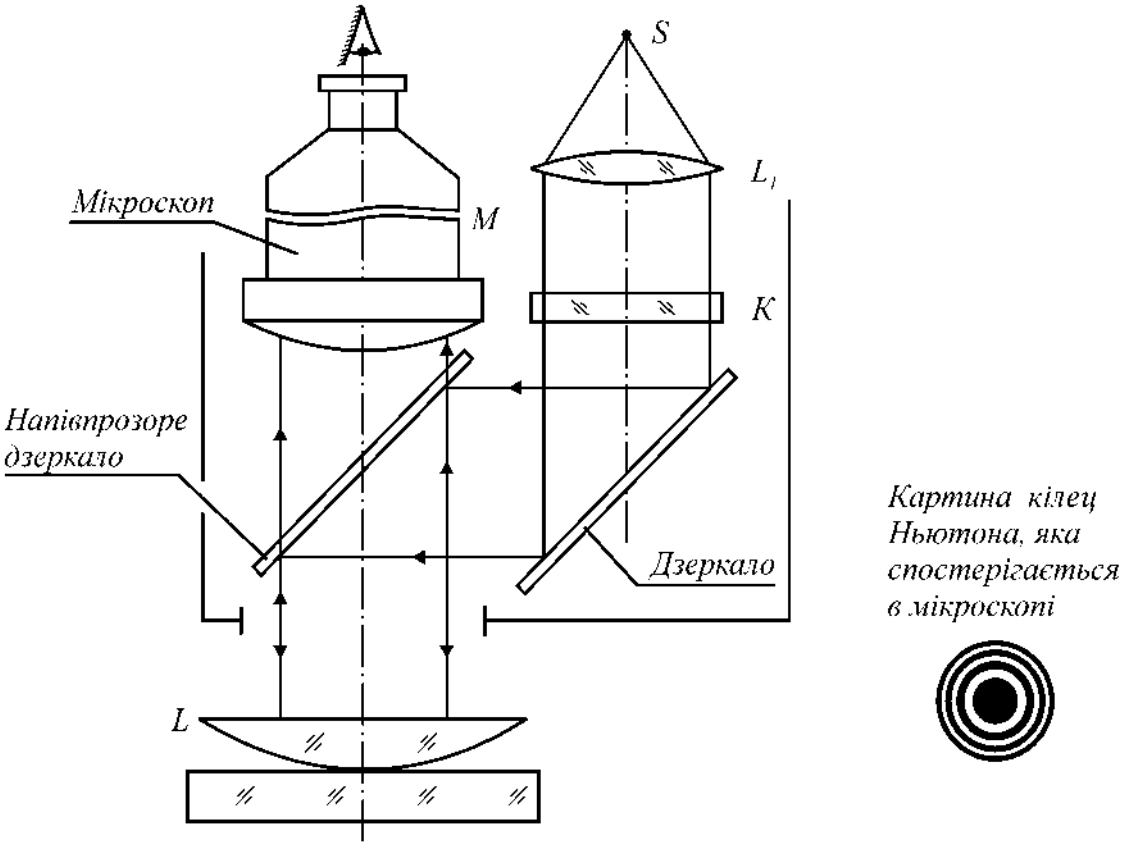


Рисунок 1.2

1.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки

Всі операції по налагоджуванню оптичної системи виконуються викладачем.

1. Включити освітлювальну систему мікроскопу. Для зеленого світлофільтра довжина хвилі монохроматичного $\lambda = 0{,}527 \cdot 10^{-6}$ *м*.

2. Обертом ручки револьверної системи мікроскопу вибрати об'єктив, який дає найбільше збільшення.

3. Визначити ціну найменшої поділки вимірювальної шкали мікроскопу. Для цього треба покласти лінійку з поділками на предметний стільчик мікроскопу і обертами ручки точної настройки навести на різкість. Визначити кількість поділок шкали мікроскопу, які укладаються в 1 мм лінійки.

4. Установити тест-об'єкт. Добитися чіткого зображення кілець шляхом пересування тубуса мікроскопу ручкою точної настройки. Пересуванням тест-об'єкту по стільчику мікроскопу добитися суміщення перехрестя координатних осей з центром системи кілець Ньютона. По поділкам на вимірювальній шкалі мікроскопа визначити розміри 10 – 12 кілець Ньютона. Зробити розрахунки за формулою (1.4). Результати вимірювань і розрахунків занести до таблиці.

Таблиця 1.1 – Експериментальні результати

Номер кільця, k,m	Діаметр кільця, поділок	Радіус кільця $r_{k,m}$,м	Радіус лінзи R, м	$< R >$, м
1 2 . .. 11 12				

Оцінити похибку експерименту.

1.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань 10-12 радіусів кілець ($r_{k,m}$); розрахунки 10 радіусів кривини лінзи (R), середнє значення $< R >$, оцінку похибки експерименту і висновки.

1.6 Контрольні запитання і завдання

1. Чому інтерференційна картина у експерименті складається із світлих та темних кілець?

2. Вивести формулу $\frac{\Delta R}{R}$. Радіуси яких кілець треба виміряти, щоби похибка була найменшою?

3. В чому складаються умови максимумів і мінімумів світла при інтерференції когерентних променів?

4. Що можна спостерігати в центрі, якщо дослід проводити у світлі, що проходить?

5. Де більша гущина розташування інтерференційних кілець – в центрі або на периферії? Чому?

6. Чому радіус кривизни R лінзи L повинен бути невеликим?

2 ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФРАКЦІЇ СВІТЛА ВІД ЩІЛИНИ У ДОСЛІДІ ФРАУНГОФЕРА

2.1 Мета роботи

Дослідити дифракцію на протягнутій щілині у досліді Фраунгофера, встановити співвідношення між інтенсивностями дифракційних максимумів освітленості, визначити ширину щілини.

2.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Для вивчення явища дифракції слід проробити рекомендовану літературу [1, с. 320-323; 2, с.290-291].

Дифракцією хвиль називається явище огинання хвилями перешкод, відхилення хвиль від прямолінійного розповсюдження і заходу у область геометричної тіні.

При дифракції Фраунгофера на щілині дифраговані промені (промені, які дифрагували) після щілини йдуть паралельно. Тому результат такої дифракції плоскої світлової хвилі слід отримувати шляхом пропускання паралельних променів скрізь лінзу і фокусуванням їх на екрані, якій розташований у фокальній площині лінзи (рис. 2.1).

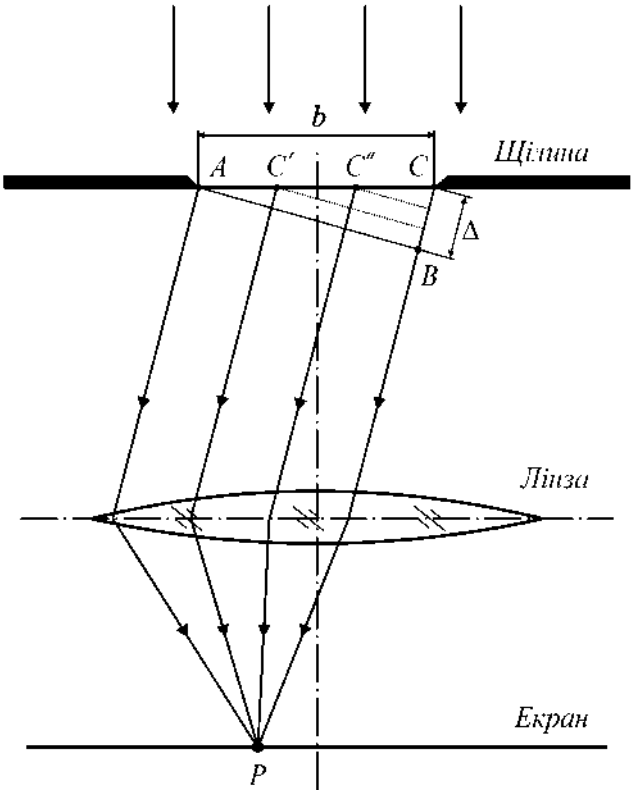


Рисунок 2.1

Починаючи з лінії АВ всі промені до точки Р на екрані будуть проходити однакові оптичні шляхи (будуть таутохронними). Френель запропонував метод, по якому у відповідності з принципом Гюйгенса точкові джерела вторинних сферичних хвиль на лінії щілини АС можна розбити на групи, які займають просторові зони: АС′, С′С′′ і т.д.

Зони відрізняються тим, що світлові хвилі, які розповсюджуються джерелами, що належать до однієї зони, потрапляють у точку Р з різницею по фазі від середини цієї зони у межах π/2. Таким чином, різниця ходу променів від сумiжних зон до точки Р в середньому складає $\frac{\lambda}{2}$. Зона АС′ відрізняється від сумiжних зон довжиною оптичного шліху. Максимальна різниця цих шляхів для щілини шириною *b* дорівнює Δ:

$$\Delta = b\sin\varphi = CB$$

Від двох сумісних зон хвилі у точку Р потрапляють у різних фазах, таким чином вони взаємно гасять одна одну. Таким чином, якщо на розмірі щілини по відношенню до точки Р укладається парне число зон, то в точці Р спостерігається мінімум освітленості, що відповідає умові:

$$\Delta = 2k\frac{\lambda}{2}, \tag{2.1}$$

де k=1,2,3...

Звідки слідують умови максимуму:

$$b\sin\varphi = 2k\frac{\lambda}{2}. \tag{2.2}$$

Якщо на різниці ходу вкладається непарна кількість півхвиль, то на екрані буде максимум освітленості, що відповідає умові

$$b\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{2.3}$$

де k=0,1,2,3,4...

Точніший розрахунок інтенсивності світла на екрані в залежності від кута φ при дифракції Фраунгофера на щілині, виконаний на підставі принципу Гюйгенса-Френеля приводить до формули:

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot b \sin\varphi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot b}{\lambda}\sin\varphi\right)^2}, \qquad (2.4)$$

де I_0 – інтенсивність в середині дифракційної картини (φ=0).

Якщо I_0 – інтенсивність максимуму нульового порядку, то $I_1 = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2$, I_1 – інтенсивність першого максимуму, $I_2 = \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2$, I_2 – другого і так далі.

У підсумку можна отримати співвідношення

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : ... = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : ... = 1 : 0{,}045 : 0{,}016 : 0{,}008 : ... \qquad (2.5)$$

2.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка включає оптичну лаву, на який встановлений лазер $\left(\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-6}\, м\right)$, як джерело плоскої монохроматичної світлової хвилі, рейтер із щілиною, ширина якої регулюється, і фотодіодний цифровий вимірювач яскравості світла для визначення положення дифракційних мінімумів і максимумів. Наявність лінзи для фокусування необов'язкова

2.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки

1. Встановити на одному кінці оптичної лави лазер і рейтер із щілиною, а на іншому - координатний вимірювач інтенсивності світла.

2. Включити лазер і встановити деталі лави вздовж променя. Зафіксувати ширину "*b*" щілини 0,12 – 0,15 мм.

3. Виміряти відстань "*L*"між щілиною і екраном.

4. За допомогою фотодіодного вимірювача зробити виміри координат X_k і рівней освітленості I_k п'яти максимумів. Розрахувати кутове положення $\varphi_k = arctg\left(\frac{x_i}{L}\right)$ максимумів. Занести отримані результати у таблицю 2.1.

5. По формулі (2.3) розрахувати ширину "*b*" щілини і визначити похибку її вимірювання.

6. За допомогою фотодіодного цифрового вимірювача зробити вимірювання інтенсивності світла I_k у положеннях максимумів і занести результати до таблиці.

Таблиця 2.1 – Експериментальні результати

k	X_k	$\varphi_k = arctg\left(\frac{x_i}{L}\right)$	I_k	I_k/I_{max}
0				
1				
2				
3				
4				
5				

7. Побудувати графік залежності відносної інтенсивності максимумів I_k/I_{max} від кута φ_k. Для порівняння результатів експерименту з теорією нанести на цей графік теоретичні значення освітленості, наведені у співвідношенні (2.4).

2.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, схему лабораторної установки, таблицю з результатами вимірювань, графіки залежностей $I_k = f(\varphi_k)$, отримані експериментальним і теоретичним шляхом, оцінку похибок, висновки.

2.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулювати принцип Гюйгенса.
2. Записати формулу, яка визначає сенс принципу Гюйгенса - Френеля.
3. Охарактеризувати дифракцію Фраунгофера на щілині.
4. Охарактеризовать дифракцию Френеля на круглому отворі.
5. Які промені називають таутохронними?
6. Яка хвиля називається плоскою?
7. Яка хвиля називається сферичною?
8. Яким умовам задовольняють просторові зони методу зон Френеля?
9. Записати умови максимумів для дифракції на щілині.
10. Записати умови мінімумів для дифракції на щілині.
11. Що таке оптична різниця ходу двох променів?
12. Що таке різниці фаз двох хвиль?

3 ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИФРАКЦІЙНОЇ РЕШІТКИ ПО ІНТЕРФЕРЕНЦІЙНІЙ КАРТИНІ У ДОСЛІДІ ЮНГА.

3.1 Мета роботи

Зробити розрахунок відстані між двома щілинними джерелами монохроматичного світла і ширини щілини по інтерференційній картині світла.

3.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для вивчення явища інтерференції світла, його отримання і використання, проробити рекомендовану літературу [1, с. 323-326; 2, с. 277-279].

Інтерференція спостерігається тільки при суперпозиції хвиль, які розповсюджуються від когерентних джерел. Когерентними звуться джерела, від яких хвилі в кожну точку простору приходять з постійною різницею фаз. Вперше спостерігав інтерференцію світлових хвиль англійський фізик Т. Юнг у 1802 р.

Установка для досліду Юнга складалась з трьох екранів – I, II, III (рис. 3.1). Перший з них мав малий отвір S, на яке попадали плоскі хвилі від інтенсивного джерела світла. Згідно принципу Гюйгенса цей отвір являється новим джерелом півсферичних хвиль. Ці хвилі падають на два малих отвіра S_1 і S_2 на другому екрані, які в свою чергу стають джерелами двох систем хвиль однакової довжини і фази. За екраном II ці когерентні системи перекривають одна одну і здійснюють інтерференцію. В тих місцях, де світлові хвилі «гасять» одна другу різниця ходу складає

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{3.1}$$

Там же де світлові коливання підсилюються

$$\Delta = 2k\frac{\lambda}{2}. \tag{3.2}$$

Тому на екрані III спостерігається чергування світлих і темних смуг. Якщо у якості монохроматичного джерела S використати лазер, то смуги будуть мати однаковий колір.

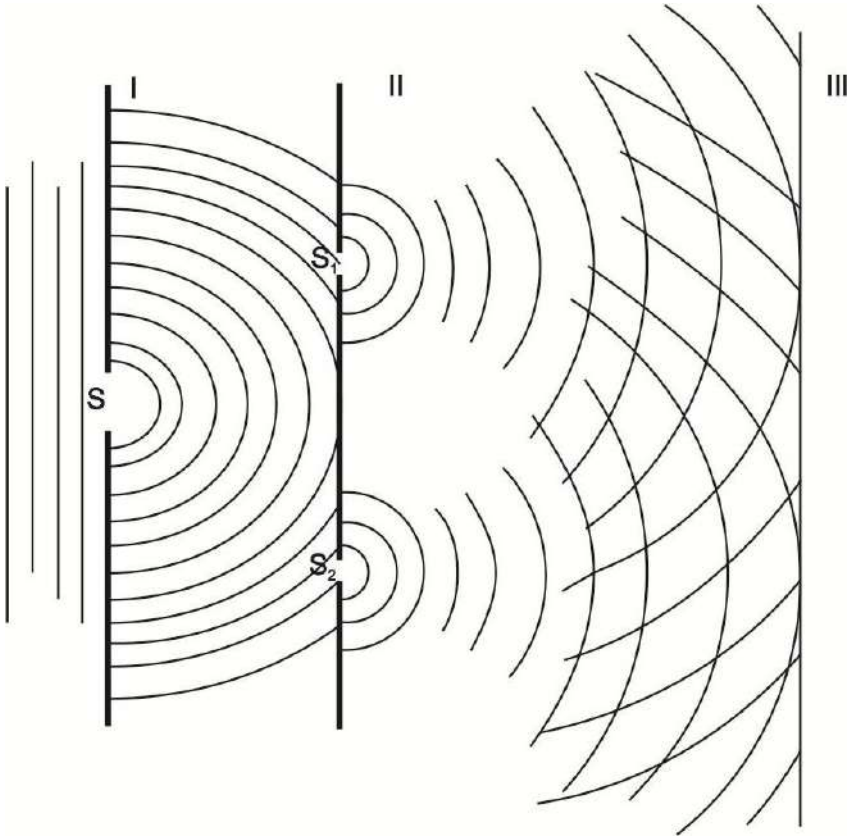


Рисунок 3.1

Якщо відома відстань *L* між екранами II і III, відстань між двома суміжними інтерференційними смугами і довжина хвиль, які інтерферують, то можна визначити відстань між щілинами *d* і ширину щілини *b*. Для виводу розрахункової формули скористаємось рис. 3.2.

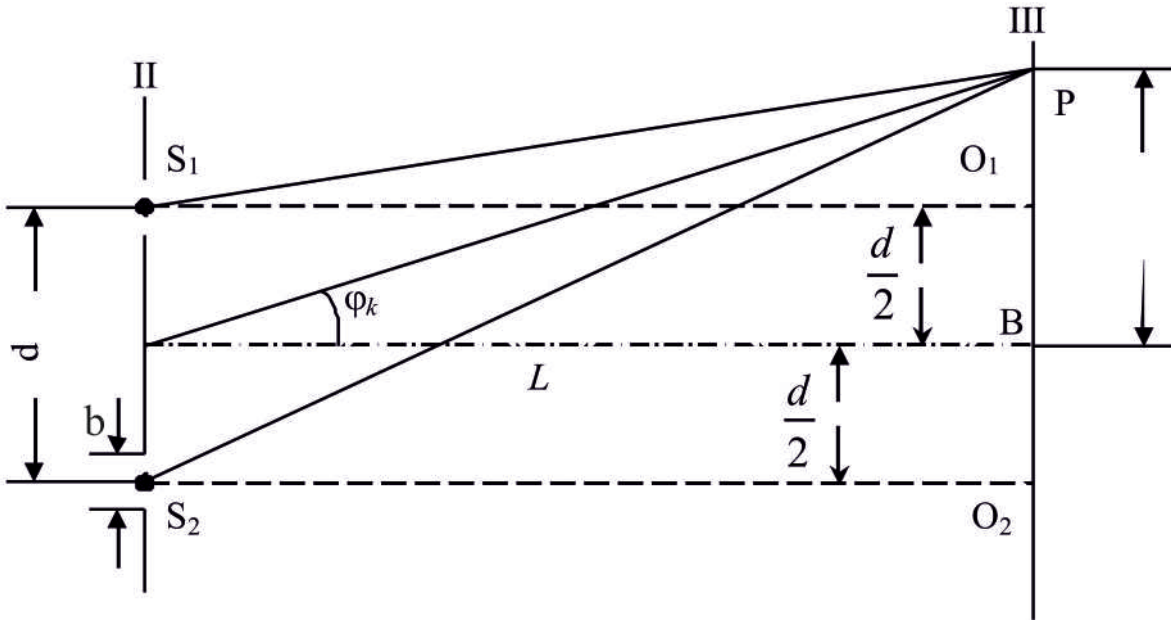


Рисунок 3.2

З рис.3.2 слідує, що в точці В, яка знаходиться на однакових відстанях від S_1 і S_2, різниця ходу хвиль дорівнює нулю. Тут буде спостерігатися центральна біла смуга – центральний максимум освітленості.

В точці В, яка вільно вибрана на екрані III, різниця ходу буде складати

$$\Delta = S_2P - S_1P$$

Різницю ходу Δ можна визначити через L і d. Очевидно, що

$$S_2P^2 = S_2O_2^2 + PO_2^2,$$

але

$$S_2O_2 = L\text{, а } PO_2 = x + \frac{d}{2},$$

тому

$$S_2P^2 = L^2 + (x + \frac{d}{2})^2.$$

Аналогічно

$$S_1P^2 = L^2 + (x - \frac{d}{2})^2.$$

Якщо відняти від першого виразу другий, то отримаємо:

$$S_2P^2 - S_1P^2 = 2d \cdot x$$

або

$$(S_2P - S_1P)(S_2P + S_1P) = 2d \cdot x,$$

звідки

$$S_2P - S_1P = \frac{2d \cdot x}{S_2P + S_1P}.$$

Якщо *x* і *d* надто малі в порівнянні з *L,* то можна з достатнім ступенем точності вважати, що

$$S_2P + S_1P = 2L\,.$$

Ураховуючи, що $S_2P - S_1P = \Delta$, і Δ є різницею ходу в точці Р, отримаємо:

$$\Delta = \frac{2d \cdot x}{2L}$$

або

$$\Delta = \frac{d \cdot x}{L}. \qquad (3.3)$$

Згідно з формулою (3.2), в точці Р буде спостерігатися максимум освітленості, якщо $\Delta = k\lambda$.

Таким чином:

$$\frac{d \cdot x_k}{L} = k\lambda\,,$$

звідки

$$x_k = \frac{k\lambda L}{d}.$$

Наступний максимум освітленості буде знаходитися на відстані

$$x_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda L}{d}$$

від центрального максимума (точки В*)*

Тому відстань b між двома суміжними світлими смугами буде дорівнювати $x_{k+1} - x_k$.

Таким чином

$$\Delta X = \frac{(k+1)\lambda L}{d} - \frac{k\lambda L}{d},$$

або

$$\Delta X = \lambda \frac{L}{d}. \qquad (3.4)$$

З формули (3.4) слідує, що при постійних значеннях L і d ширина інтерференційних смуг залежить від довжини світлової хвилі. Якщо лазерне світло замінити на біле, то ширина смуги пов'язана з кольором. Так, наприклад, у випадку червоного кольору смуги мають значно більшу ширину, ніж при синьому.

На рис.3.3 показано розподілення світла в максимумах при інтерференції від однієї і двох щілин

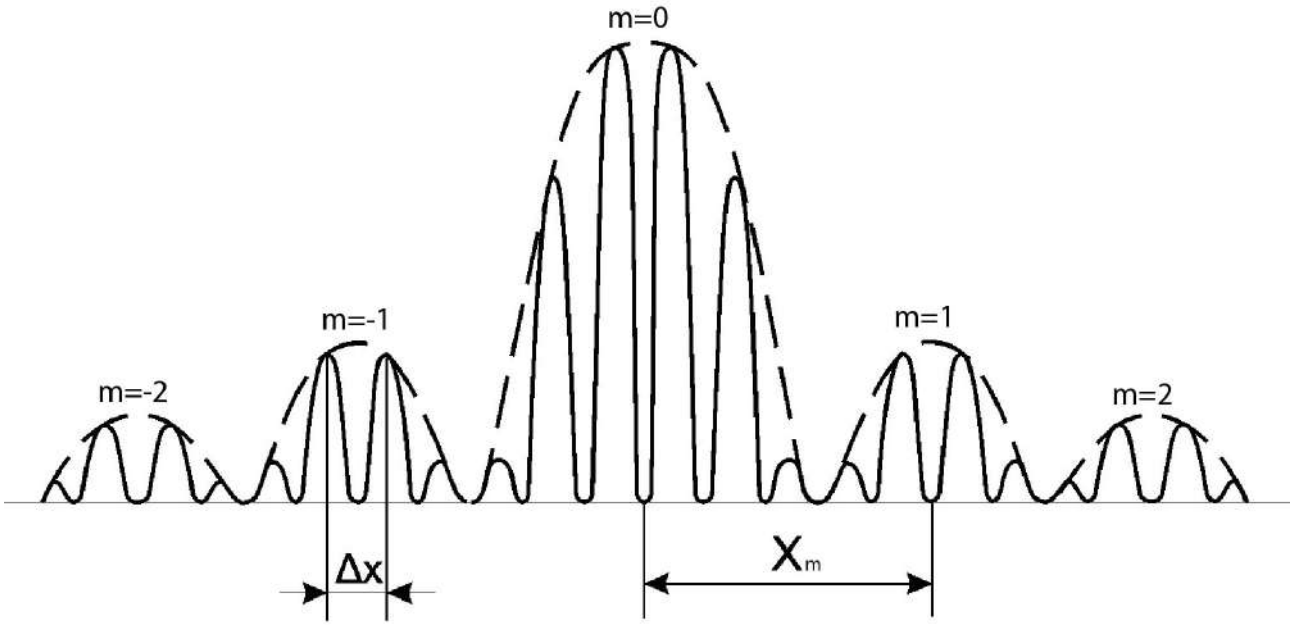


Рисунок 3.3

Відстань Δx між центрами двох суміжних інтерференційних смуг (безперервна лінія), дозволяє розрахувати відстань між щілинами по формулі

$$d = \frac{\lambda L}{\Delta x}. \qquad (3.5)$$

Штрихова лінія на рис.3.3 відповідає інтерференційній картині, яка отримана від однієї щілини з шириною *b*. Положення x_m центра широкого інтерференційного максимуму визначається умовою:

$$b\sin\varphi_m = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{де } m = 0,1,2,...$$

звідки ширина щілини b визначається як

$$b = \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda}{\sin\varphi_m}.$$

В умовах інтерференції, коли кут φ_m малий ($\varphi_m << 1$), можна використати наближені формули:

$$\varphi_m \approx \sin\varphi_m \approx tg\varphi_m \approx \frac{X_m}{L}.$$

У підсумку отримуємо ширину щілини

$$b \approx \frac{2m+1}{2}\frac{\lambda L}{X_m}. \qquad (3.6)$$

3.3 Опис лабораторної установки

Лабораторна установка включає оптичну лаву, джерело монохроматичного випромінювання (лазер), дифракційну решітку з двома щілинами, встановлений на рейтері вимірювальний екран з лінійками. Довжина хвилі лазера $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-6}$ м.

3.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки по її виконанню

1. Встановити на оптичній лаві лазер, у центрі на рейтері – дифракційну решітку з двома щілинами, а з іншого боку – вимірювальний екран з лінійкою. на рейтері.

2. Увімкнути лазер і отримати чітку інтерференційну картину на вимірювальному екрані.

3. Виконати вимірювання параметру Δx для отримання відстані між щілинами d по формулі (3.5).

4. Визначити відстань між щілинами і зробити оцінку похибки вимірювання цього показника.

Виконати вимірювання параметру x_m для отримання ширини щілини b по формулі (3.6) і оцінити похибку вимірювання.

3.5 Зміст звіту

Звіт повинен включати: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірювань Δx і x_m; розрахунки параметрів d і b; оцінювання похибок, висновок.

3.6 Контрольні запитання і завдання.

1. Яке випромінювання називають монохроматичним?
2. Які джерела хвиль називають когерентними?

3. Які хвилі називають когерентними?
4. Сформулювати принцип Гюйгенса.
5. У чому полягає явище інтерференції?
6. Записати закон інтерференції.
7. Як визначити інтенсивність світлової хвилі?
8. Сформулювати принцип Ферма.
9. Яка різниця між геометричним і оптичним шляхами променя?
10. Що є різниця фаз інтерферуючих променів?
11. Яка умова мінімуму у досліді Юнга?
12. Які умови інтерференції світла при відбитті від тонких шарів?

4 ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НАГРІТИХ ТІЛ

4.1 Мета роботи

Експериментальне підтвердження законів тепловог випромінювання, вивчення методу вимірювання високих температур, будови і принципу роботи оптичного пірометра.

4.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Всі нагріті тіла і рідини випромінюють електромагнітні хвилі в широкому суцільному спектральному діапазоні довжин хвиль [1, с. 362-371; 2, с. 317-324; 3, с. 4-14]. Розподіл енергії випромінювання в залежності від довжини хвилі для абсолютно чорного тіла (АЧТ) описується законом Планка:

$$M_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \tag{4.1}$$

де $M_{\lambda,T}$ – спектральна густина випромінювальної здатності;

λ – довжина хвилі випромінювання;

h – стала Планка;

k – стала Больцмана;

c – швидкість світла;

T – абсолютна температура.

З рис (4.1) видно, що при різних температурах тіл максимум спектральної випромінювальної здатності приходиться на різні довжини хвиль.

На цих властивостях спектру випромінювання основані безконтактні методи вимірювання температури нагрітих тіл.

Для визначення температури АЧТ можна виміряти довжину хвилі, на якій спостерігається максимальна потужність випромінювання, і використати закон випромінювання Віна:

$$\lambda_m T = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \ (м \cdot К). \tag{4.2}$$

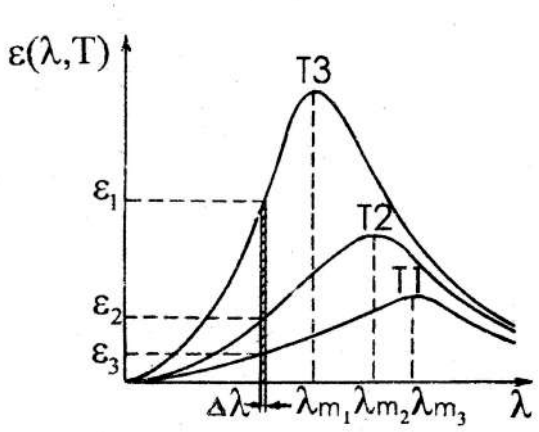


Рисунок 4.1

Температуру АЧТ можна визначити, використовуючи закон Стефана-Больцмана:

$$M_T = 5{,}7 \cdot 10^{-8} T^4 \left(Bm/_{м^2} \right). \qquad (4.3)$$

Для цього необхідно виміряти випромінювальну здатність M_T (спеціальним приймачем), а потім обчислити T.

Формула (4.1) дозволяє визначити температуру тіла за зміною інтенсивності випромінювання M_T в будь-якому вузькому спектральному діапазоні $\Delta\lambda$. На цій властивості базується робота оптичного пірометра, що використовується в макеті.

В оптичному пірометрі інтенсивність монохроматичного випромінювання (тобто на вузькому відрізку $\Delta\lambda$) не вимірюється безпосередньо, а візуально порівнюється зі світністю еталонного тіла (нитки пірометра). Температура еталонного тіла задається силою струму розжарення і легко змінюється. Зміною сили струму можна досягти рівності світностей двох тіл: досліджуваного і еталонного. У цьому випадку температура досліджуваного тіла дорівнює температурі еталонного, яка легко визначається.

Для реальних тіл, які звичайно не є АЧТ, істинна температура визначається по температурі, яка вимірюється пірометром, введенням поправок, що враховують їх випромінювальні властивості.

4.3 Опис лабораторної установки

Схема лабораторного макета для дослідження випромінювання нагрітих тіл наведена на рис. 4.2.

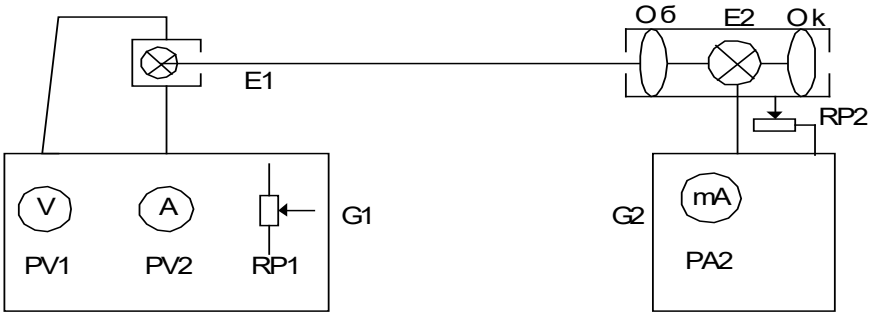


Рисунок 4.2

Лабораторна установка складається з двох незалежних блоків: досліджуваного тіла *E*1 (електролампи), температуру якого можна змінювати блоком живлення *G*1, і оптичного пірометра ЛОП-72 з блоком живлення *G2*.

Принцип дії пірометра наведений на рис. 4.3.

Всередині приладу, в полі зору окуляра *Ок*, знаходиться пірометрична лампа *E2*, температуру нитки якої можна змінювати силою струму розжарення. Сила струму в колі лампи *E2* регулюється потенціометром *RP2* і вимірюється амперметром *PA2*. Температуру нитки розжарення пірометричної лампи *E2* визначають за допомогою градуювальної кривої, розташованої на робочому місці. Добором положення окуляра можна досягти різкого зображення нитки пірометричної лампи, а обертанням об'єктива пірометра досягається чіткість зображення досліджуванного тіла. Температура досліджуваного тіла *E1* дорівнює температурі еталонного *E2*, якщо потенціометром *RP2* можна досягти зникнення зображення нитки на фоні тіла.

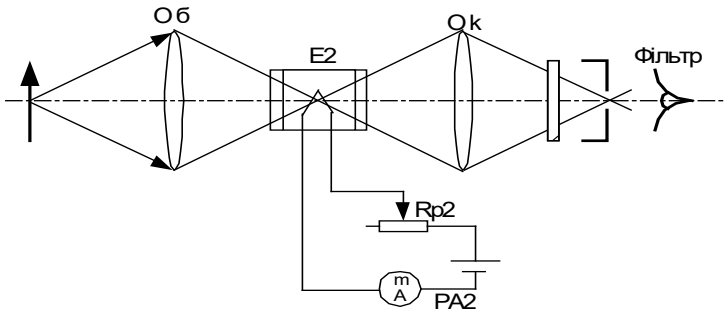


Рисунок 4.3

4.4 Порядок виконання роботи і вказівки з її виконання

4.4.1 Потенціометри *RP1* і *RP2* установіть у крайнє ліве положення (проти годинникової стрілки). Увімкніть блок живлення пірометра *G2*. Потенціометром *RP2* і окуляром *Ok* отримайте чітке зображення світної нитки пірометричної лампи *E2*. Амперметром *PA2* виміряйте силу струму і за допомогою гра-

дуювальної кривої *T(I)*, що наведена на робочому місці, визначте температуру нитки пірометричної лампи *E2.* Визначте мінімальну температуру нитки, при якій тіло починає світитись. Змінюючи температуру нитки, спостерігайте за зміною яскравості нитки та її кольору. На основі цього досліду зробіть висновки.

4.4.2 За допомогою потенціометра *RP1* встановіть довільний температурний режим (розжарення) досліджуваного тіла. Наведіть оптичний пірометр на світну частину тіла *E1* і за допомогою об'єктива отримайте її чітке зображення. За допомогою потенціометра *RP2,* досягніть співпадання яскравості світності нитки пірометричної лампи і тіла.

Амперметром *PA2* виміряйте силу струму і за допомогою градуювальної кривої визначте температуру тіла. За допомогою вольтметра *PV1* і амперметра *PA1* визначте потужність *P,* що витрачається на нагрівання тіла *E1.* Виміряйте температуру тіла при чотирьох – п'яти різних значеннях потужності нагріву. Результати вимірювань занесіть до таблиці за формою, наведеною в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Результати вимірювань

№	$U_{\text{тіла}}$, В	$I_{\text{тіла}}$, А	P, Вт	$I_{\text{піром}}$, mA	T, К	lg P, Вт	lg T, К
1							
2							
3							
4							
5							

4.4.3 Зробіть оцінку похибки вимірювань потужності за класом точності амперметра та вольтметра.

4.4.4 Побудуйте графік залежності потужності розжарення P від температури тіла T. Залежність M_T, що відповідає закону Стефана-Больцмана, має такий саме характер.

Побудуйте графік залежності $\lg P$ від $\lg T$. Тоді як залежність має степеневий характер, то експериментальні дані повинні створювати пряму лінію в координатах $\lg P$ від $\lg T$:

$$\lg P = n \lg T + Const\,. \tag{4.4}$$

За графіком обчисліть показник степені n в законі Стефана-Больцмана:

$$n = \frac{\lg P_2 - \lg P_1}{\lg T_2 - \lg T_1} = \frac{\Delta \lg P}{\Delta \lg T}\,. \tag{4.5}$$

Значення $\Delta \lg P$ або $\Delta \lg T$ можна вибрати довільно. Зручно вибрати $\Delta \lg T$ так, щоб ця величина була рівна цілому числу поділок масштабної сітки вздовж координати $\lg T$.

Зробіть висновок щодо залежності енергетичної світності вольфраму від температури. Порівняйте отримане експериментальним шляхом значення показник степені n із теоретичним.

Контрольні запитання та завдання

1. Які види випромінювання існують? Яке випромінювання є рівноважним?
2. Які характеристики теплового випромінювання ви знаєте?
3. Виведіть розмірності основних характеристик теплового випромінювання.
4. Сформулюйте закони теплового випромінювання.
5. Отримайте закони теплового випромінювання з формули Планка.
6. Яким чином з формули Планка можна визначити енергетичну світність?
7. Як можна знайти радіаційну, кольорову та яркісну температури?
8. Які переваги оптичного методу вимірювання температури порівняно з іншими методами?
9. Поясніть принцип вимірювання температури за допомогою пірометра із
ниткою, що зникає.
10. Поясніть принцип дії і конструкцію ЛОП-72.
11. Які прямі вимірювання потрібно виконати в даній роботі?
12. Які обчислення потрібно виконати в роботі?

5 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО ФОТОЕФЕКТУ

5.1 Мета роботи

Експериментальна перевірка основних законів фотоефекту; встановлення залежності максимальної кінетичної енергії фотоелектронів $E_{\max}$ від частоти світла ν, визначення червоної межі фотоефекту λ_0, роботи виходу A та сталої Планка h.

5.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Вивчаючи теоретичний матеріал [1, с. 371-374; 2, с. 324-329; 3, с. 15-19], зверніть увагу на фізичну суть явища зовнішнього фотоефекту та основне рівняння цього явища – рівняння Ейнштейна. Необхідно пояснити залежність сили струму від напруги (вольт-амперну характеристику) вакуумного фотоелемента та уяснити, які перетворення енергії відбуваються.

Явище зовнішнього фотоефекту є одним з проявів квантової, корпускулярної природи світла і полягає у вириванні електронів з поверхні речовини під дією світла.

Світло – це потік квантів електромагнітного поля (фотонів). Фотони – неподільні елементарні частинки, вони можуть поглинатись та випромінюватись лише цілком. Енергія фотону дорівнює

$$E = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda},$$

де $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, ν - частота світла, λ - довжина світлової хвилі, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с - швидкість світла у вакуумі.

Зовнішній фотоефект підпорядковується таким законам:

– фотострум насичення пропорційний освітленості фотокатода;

– енергія відбитих електронів і максимальна їх швидкість залежать лише від частоти світла, що падає; із збільшенням частоти енергія фотоелектронів лінійно падає;

– зовнішній фотоефект – безінерційний;

– число фотоелектронів пропорційне інтенсивності світла.

Основні енергетичні перетворення встановлює рівняння Ейштейна для зовнішноьго фотоефекту:

$$h \cdot \nu = E_{\max} + A, \qquad (5.1)$$

де $E_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектронів, A – робота виходу електрона з поверхні металу.

В роботі використовують метод гальмівного потенціалу. Монохроматичним світлом певної частоти освітлюють фотокатод. За відсутності напруги між анодом та фотокатодом струм через фотоелемент не дорівнює нулю. Для припинення анодного струму необхідно створити електричне поле, яке гальмує електрони. Змінюючи гальмівну напругу між анодом та фотокатодом, домагаються припинення фотоструму. В цьому випадку електрони гальмуються електричним полем з потенціалом U_0, а їх кінетична енергія дорівнює

$$E_{\max} = eU_0. \tag{5.2}$$

Із (5.1) та (5.2) одержимо:

$$eU_0 = E_{\max} = hv - A. \tag{5.3}$$

Залежність $E_{\max}$ від v (рис. 5.1) – пряма, яка перетинає вісь абсцис в точці ν_0 (найменьша частота світла, яке спричиняє фотоефект). За тангенсом кута нахилу цієї прямої можна визначити сталу Планка:

$$tg\alpha = \frac{dE_{\max}}{dv} = h.$$

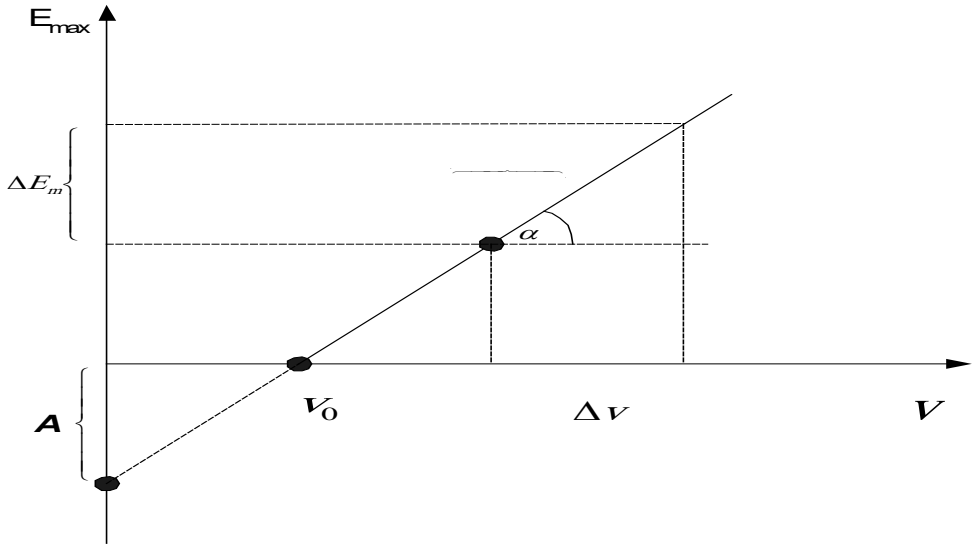


Рисунок 5.1

Продовживши пряму до перетину з віссю ординат можна знайти роботу виходу A.

5.3. Опис лабороторної установки

Обладнання: вакуумний фотоелемент, джерело регулювальної напруги, вольтметр, амперметр, набір світлофільтрів, лампа розжарення з джерелом живлення. Схема лабораторної установки наведена на рис. 5.2.

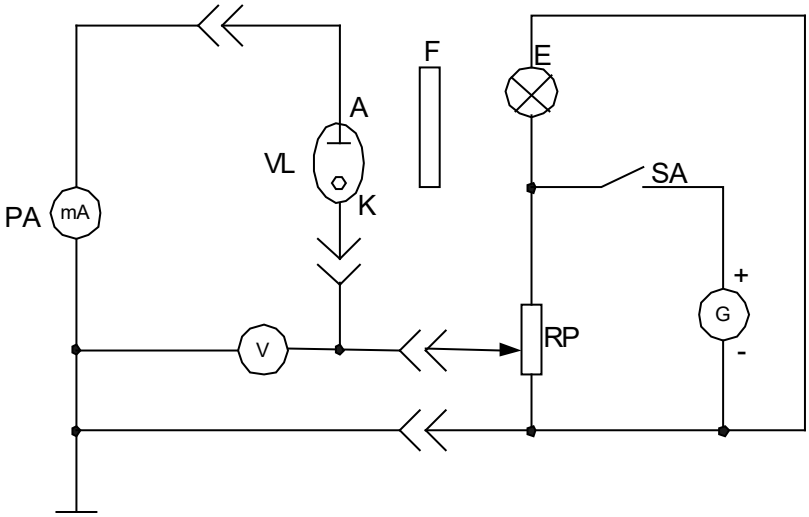


Рисунок 5.2

Світло від лампи розжарення *E* через світлофільтри *F* попадає на фотокатод вакуумного фотоелемента *VL*. Довжина хвилі світла змінюється із заміною світлофільтра.

Напругу на фотоелементі, яка подається від джерела *G* можна змінювати потенціометром *RP* та вимірювати вольтметром *PV*. Сила фотоструму вимірюється амперметром *PA*. Вмикання установки здійснюють тумблером *SA*.

5.4 Порядок виконання роботи і вказівки з її виконання

5.4.1 Перевірка закону Ейнштейна

– Увімкнути блок живлення фотоелемента та живлення лампи розжарення.

– Світлом певної довжини хвилі λ (довжина хвилі світлофільтра вказана на робочому місці; $1\overset{o}{A} = 10^{-10}$ м) освітлюють фотоелемент. Визначити та занести в таблицю частоту світла v.

– Потенціометром *RP* зменшити фотострум до $I = 0$. Вольтметром виміряти гальмівний потенціал U_0.

– Повторити вимірювання гальмівного потенціалу для різних світлофільтрів. Результати вимірювання гальмівного потенціалу та частоти занести в таблицю за формою табл. 5.1.

– Побудувати графік залежності $E_{\max} = eU_0$ від частоти. Кінетичну енергію фотоелектронів зручно вимірювати в електрон-вольтах. В цьому випадку числові значення $E_{\max}$ та U_0 збігаються: $1eB = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Дж*.

– Зробити висновки про виконання закону Ейнштейна (5.1).

Таблиця 5.1 – Результати вимірювань

№	Світлофільтр	Довжина хвилі λ, $\overset{o}{A}$	Частота ν, Гц	Гальмівний потенціал $U_{\text{гальм}}$, В	Кінетична енергія, E_{max}, еВ
1	синій				
2	...				
3	...				
4	...				
5	...				
6	червоний				

5.4.2 Визначення червоної межі фотоефекту та роботи виходу електрона

– Провести пряму, яка проходить якомога ближче до експериментально визначених точок $E_{\max}(\nu)$. Продовжити пряму до перетину з вісями абсцис та ординат.

– Визначити граничну частоту ν_0 за перетином прямої з віссю ν для $E_{\max} = 0$ (рис. 5.1).

– Знайти червону межу фотоефекту $\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu_0}$.

– Знайти роботу виходу електрона A за перетином прямої з віссю $E_{\max}$ (рис. 5.1).

5.4.3 Визначення сталої Планка

На графіку залежності $E_{\max}(\nu)$ вибрати дві експериментальні точки, які лежать на прямій, визначити зміну кінетичної енергії $\Delta E_k = e\Delta U_0$ та зміну частоти $\Delta\nu$ для цих точок (рис. 5.1). Знайти сталу Планка за формулою

$$h = \frac{\Delta E_{\max}}{\Delta\nu} = \frac{e\Delta U_0}{\Delta\nu}.$$

Контрольні запитання та завдання

1. В чому полягає явище зовнішнього фотоефекту?
2. Побудуйте залежність фотоструму від напруги (вольт-амперну характеристику) вакуумного фотоелемента та поясніть її.
3. Поясніть, чому сила струму через фотоелемент не дорівнює нулю, якщо прискорююча різниця потенціалів дорівнює нулю.

4. Чому потрібно затратити енергію для того, щоб електрон покинув поверхню металу? Від чого залежить робота виходу електрона?

5. Запишіть рівняння Ейнштейна та поясніть його фізичний зміст.

6. Опишіть метод гальмівного потенціалу. Які величини визначають в роботі цим методом?

7. Чи змінюється залежність $E_{\max}(\nu)$ для фотоелементів з різними матеріалами фотокатода? Відповідь пояснити.

8. Який фізичний смисл поняття “червона межа фотоефекту?” Як в даній роботі визначають червону межу фотоефекту?

9. Як пов’язані між собою робота виходу електрона та червона межа фотоефекту?

6 ВИЗНАЧЕННЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ЗБУДЖЕННЯ ТА ІОНІЗАЦІЇ АТОМІВ МЕТОДОМ ФРАНКА І ГЕРЦА

6.1 Мета роботи

Дослідне підтвердження дискретності рівнів енергії атомів, визначення їх потенціалів збудження та іонізації.

6.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Для підготовки до виконання лабораторної роботи треба ознайомитись з моделлю атома Бора [2, с. 337-338; 3, с. 47-49]

Основні положення теорії Бора заключені у двох постулатах.

1. З нескінченної кількості будь-яких електронних орбіт, можливих з точки зору класичної механіки, спостерігаються в дійсності тільки деякі стаціонарні орбіти, які відповідають умовам квантування: величина моменту імпульсу електрона на стаціонарній орбіті є кратною числу $\hbar$:

$$rm\upsilon = n\hbar,$$

де n – ціле n=1,2,3,4….

2. Випромінювання або поглинання кванта світла спостерігається при переході електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу. Величина світлового кванту дорівнює різниці енергії тих стаціонарних станів, між якими відбувається квантовий перехід електрона:

$$E_2 - E_1 = \Delta E_{12} = \hbar\omega_{12} = h\nu_{12} = h\frac{c}{\lambda_{12}}. \qquad (6.1)$$

Якщо атом перебуває в основному стані, коли n=1, то, незважаючи на те, що електрон рухається з прискоренням, він не випромінює і не поглинає електромагнітні хвилі.

Атом можна збудити, тобто перевести з основного стану ($n_1 = 1$) в стан з більшою енергією ($n_i > 1$), який називається збудженим. Енергія, необхідна для переводу атома в даний збуджений стан, називається енергією збудження $E_{зб}$, і визначається різницею енергій двох рівнів: основного і збудженого, тобто $E_{зб} = \Delta E_{1n}$. Мінімальна енергія збудження атома $E_{зб}^{\min}$ відповідає енергетичному проміжку між основним станом ($n = 1$) і найближчим до нього ($n = 2$) збудженим станом: $E_{зб}^{\min} = \Delta E_{12}$.

Так як енергія збуджених станів атома детермінована, то і частоти випромінювання або поглинання чітко визначені, а їх можливий набір створює

лінійчастий спектр, характерний для кожного атома: $\omega_{12} = \frac{\Delta E_{12}}{\hbar}$; $\omega_{13} = \frac{\Delta E_{13}}{\hbar}$; …; $\omega_{1n} = \frac{\Delta E_{1n}}{\hbar}$.

Якщо атому переджати енергію достатню, щоб перевести електрон на енергетичний рівень з $n \to \infty$, – енергію іонізації E_i, то відстань електрона від ядра атома теж нескінченно збільшиться. Атом, від якого відірвано один або більше електронів, стає позитивним іоном, відповідно одноразово, або багаторазово іонізованим.

Досліди Франка і Герца були яскравим експериментальним підтвердженням постулатів Бора.

Якщо атоми будь–якої речовини, що перебуває у газоподібному стані з одноатомними молекулами, опромінювати потоком електронів, між ними відбувається взаємодія. Вона може носити характер пружного або непружного ударів. Дж. Франк і Г. Герц довели, що коли енергія електронів менша за деяку критичну, то співудари між електронами і атомами відбуваються пружно. При такому співударі значення швидкості електрона практично не змінюється, може змінитися лише її напрям. Тобто атом при цьому зіткненні енергії не одержує, а електрон продовжує рухаєтися з початковою кінетичною енергією. При непружних співударах внаслідок того, що маса електрона значно менша за масу атома, він передає атому майже всю енергію. Атом переходить у збуджений енергетичний стан, а електрон різко зменшує швидкість до нуля. Виявилось, що непружні зіткнення електронів з атомами відбуваються при сувооо визначеному ряді значень кінетичної енергії електронів: ΔE_{12}; ΔE_{13}; ΔE_{14} ….

Розподіл швидкостей електронів після співударів з атомами досліджували за допомогою методу затримуючого потенціалу. Найпростішу принципову схему для досліду Франка і Герца зображено на рис. 6.1.

Балон лампи *B* наповнений газом (наприклад парами ртуті чи інертного газу) при низькому тиску (≈ 1мм. рт.ст.). Гарячий катод (*K*) випромінює електрони.

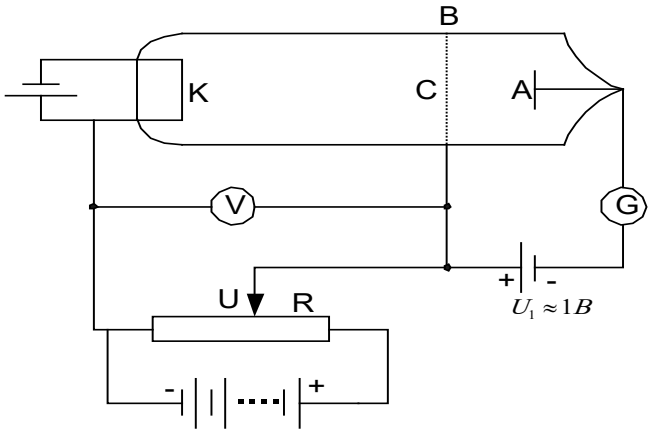


Рисунок 6.1

Між катодом (K) і анодом (A) прикладено прискорюючу різницю потенціалів U, яку можна змінювати за допомогою потенціометра R, що ділить напругу.

Змінюючи і вимірюючи величину прискорювальної напруги U_{KC}, можна вимірювати і контролювати кінетичну енергію електронів

$$E_e = \Delta E_{1n} = e \cdot U_{1n}.$$

Енергію електронів у цьому випадку зручно вимірювати в електронвольтах (eB). Енергію в $1eB = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж електрони отримують, якщо пройдуть різницю потенціалів в 1 В. Найменша різниця потенціалів, яку повинні пройти електрони в прискорюючому електричному полі, щоб їхня енергія була достатня для збудження (іонізації) атомів, називається потенціалом збудження $U_{зб}$ (іонізації U_i). Наприклад, перший потенціал збудження визначається формулою: $U_{12} = \dfrac{\Delta E_{12}}{e}$.

Між сіткою і анодом було створено слабке електричне поле ($U_{CA} \approx 1B$) таке, що гальмувало рух електронів до анода.

Досліджувалась залежність сили струму I_A в анодному колі від напруги U_{KC} між катодом і сіткою.

При збільшенні напруги U_{KC} кінетична енергія електронів зростає. Пружний характер співударів електронів і атомів газу не призводить до зміни енергії електронів і вони досягають сітки з енергією $\dfrac{1}{2} m\upsilon^2 = eU_{KC}$.

Після проходження сітки електрони потрапляють у простір між сіткою і анодом, де гальмуюча дія поля дуже слабка і швидкість руху електронів υ майже не зміниться. Тобто при пружному характері зіткнення з атомами газу у електронів дістає енергії, щоб подолати відстань «сітка-анод» та досягти аноду. При підвищенні напруги U_{KC} зросте швидкість υ електронів і, відповідно, збільшиться анодний струм I_A (рис. 6.2, ділянка Oa).

А. Визначення потенціалу збудження.

Зростання сили струму на графіку вольт-амперної характеристики лампи $\Delta\varphi_{KC} = U_{KC}$ буде спостерігатись, доки різниця потенціалів між катодом і сіткою не досягне визначеної критичної величини 4,9В і тоді анодний струм різко зменшиться (ділянка кривої ab). (Для прикладу розглядається випадок, коли лампа наповнена парами ртуті).

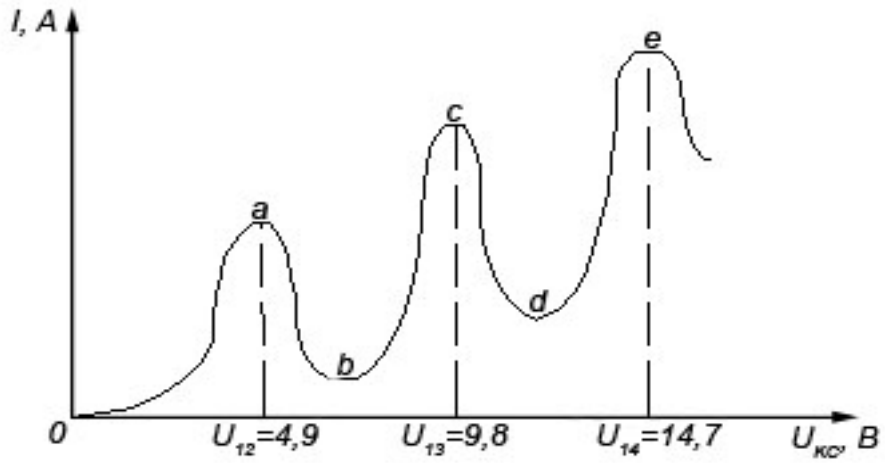


Рисунок 6.2

Це означає, що при потенціалі 4,9В зіткнення електронів з атомами ртуті стають непружними і при співударі електрони, віддаючи атомам ртуті всю свою енергію, не можуть подолати гальмуюче поле між сіткою і анодом, попадають на сітку, тобто не вносять вкладу у величину анодного струму.

При енергії електронів 9,8 еВ і 14,7 еВ електрони зазнають непружні співудари двічі або тричі, що дає другий і третій максимуми.

Такий хід кривої пояснюється тим, що внаслідок дискретності енергетичних рівнів атоми можуть сприймати енергію тільки порціями:

$$\Delta E_{12} = E_2 - E_{1,} \quad \text{або} \quad \Delta E_{13} = E_3 - E_1 \quad \text{та інші,}$$

де E_1, E_2, E_3 - енергія 1-го, 2-го, 3-го і т.д. стаціонарних станів.

Збуджені атоми газу через час порядку $10^{-8} c$ переходять у нормальний стан, а надлишок енергії випускають у вигляді резонансного випромінювання певної довжини хвилі, яку можна знайти за умови:

$$\Delta E_{12} = E_2 - E_1 = e \cdot (U_2 - U_1) = h \cdot \frac{c}{\lambda_{12}},$$
$$\lambda_{12} = \frac{h \cdot c}{e \cdot (U_2 - U_1)}, \tag{6.2}$$

де h – стала Планка, c - швидкість світла, e - заряд електрона, U_2, U_1 - потенціали, яким відповідають максимуми сили струму (рисунок 3.2, максимуми «с» і «а»).

Б. Визначення потенціалу іонізації.

У проміжку «сітка-анод» можна встановити велику напругу U_{CA} поля гальмівного для електронів і потік електронів до аноду зникне – вони будуть відводитись сіткою. Якщо при цьому збільшувати потенціал сітки U_{KC}, прискорені електрони зможуть отримати таку кінетичну енергію, що її буде достатньо для іонізації атомів в лампі, зіткнення з якими будуть траплятися побизу сітки. загальмовані і відірвані електрони потраплять на сітку, а позитивні іони будуть притягнуті до аноду, потенціал якого буде найбільш низьким. Виникне сполох анодного струму, обумовленний лише іонною складовою (рис. 6.3). Його напрямок буде протилежний відносно електронної складової. Напруга U_{KC}, що відповідає сполоху, дорівнює потенціалу іонізації U_i атомів газу.

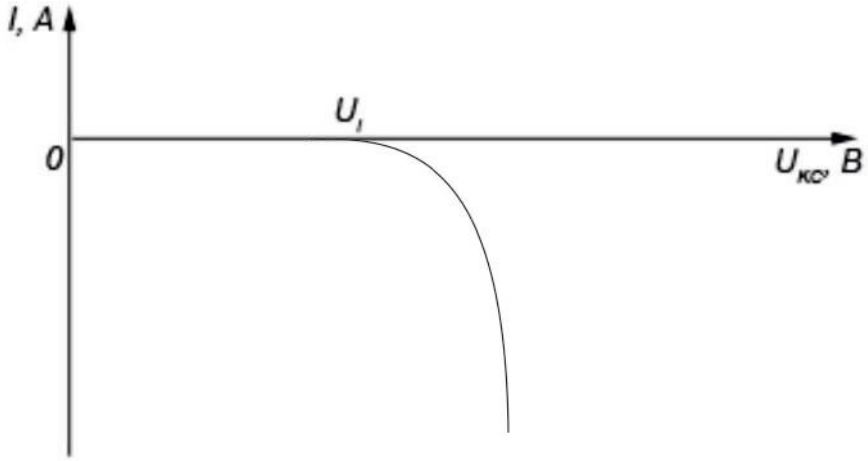


Рисунок 6.3

6.3 Опис лабораторної установки.

Схема установки для дослідження особливостей будови атомів наведена на рис. 6.4.

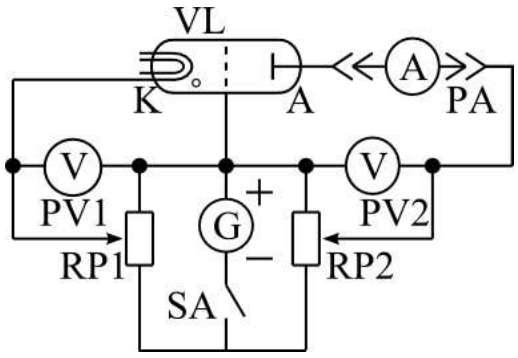


Рисунок 6.4

Атоми досліджуваного газу знаходяться в скляній колбі лампи , що має три електроди: катод *K*, сітку *C*, анод *A*.

Розжарений окремим електричним струмом катод *K* є джерелом електронів, що прискорюються в електричнму полі між катодом і сіткою (U_{KC}) та га-

льмуються у полі між сіткою та анодом (U_{CA}). Енергія електронів залежить від напруги, що подається між сіткою *C* і катодом *K*. Величина напруги U_{KC} змінюється потенціометром *RP1* і вимірюється вольтметром *PV1*.

Потенціометром *RP2* і вольтметром *PV2* змінюється і вимірюється величина напруги U_{CA}, що створює затримуюче поле між сіткою *C* і анодом *A*. Електрони, що пройшли крізь газ, або іони, створені в результаті взаємодії електронів з атомами, створюють струм у колі анода *A*, який вимірюється цифровим мікроамперметром *PA*.

Від джерела струму нагрівається нитка накалу катоду і подається напруга на електроди. Джерело вмикається тумблером.

6.4 Порядок виконання роботи і вказівки з її виконання

6.4.1 Визначення потенціалу збудження атомів $U_{зб}$

1. Підключіть цифровий амперметр *PA* до клем макета. Увімкніть макет і амперметр.

2. Потенціометром *RP2* установіть гальмуючий потенціал $U_{CA} = (1 \div 2)B$ на вольтметрі *PV2*.

3. Потенціометром *RP1* змінюйте, а вольтметром *PV1* вимірюйте напругу, що прискорює електрони. Для кожного значення напруги за допомогою *PA* виміряйте силу струму в колі анода (колектора). Результати вимірювань занесіть у таблицю 6.1.

Таблиця 6.1 – Результати вимірювань для знаходження потенціалу збудження

U_{KC}, В	2	4	6	8	...	44	46	48
I, нА								

4. Побудуйте графік залежності сили струму *I* від енергії електронів $e \cdot U$ і по ньому зробіть висновок про характер взаємодії електронів з атомами. Визначте енергію і потенціал збудження $U_{зб}$ атомів.

5. За допомогою (6.2) обчисліть частоту і довжину хвилі випромінювання збуджених атомів. За цими даними визначте склад досліджуваного газу.

6.4.2 Визначення потенціалу іонізації атома

1. Потенціометром *RP2* установіть затримуючий потенціал $U_{CA} = 20B$.

2. Змінюючи прискорюючу напругу і вимірюючи силу струму, з'ясуйте залежність іонної складової струму від енергії електронів. Результати вимірювань занесіть у таблицю 6.2.

Побудуйте графік I_i від $e \cdot U$.

Таблиця 6.2 – Результати вимірювань для знаходження потенціалу іонізації

U, В	2	4	6	8	...	44	46	48
I, нА								
$e \cdot U$, еВ								

3. Визначте потенціал іонізації й енергію, при якій з'являються іони. Те значення прискорюючої напруги, при якому сила струму різко збільшується, визначає потенціал іонізації атома U_i.

6.5 Зміст звіту

Результати вимірювань подайте у вигляді графіків $I(e \cdot U)$ і обчислених значень потенціалів збудження, іонізації, частоти резонансного випромінювання. За абсолютними значеннями похибок вимірювання струму і напруги оцініть похибку вимірювання потенціалів збудження і іонізації.

Контрольні запитання та завдання

1. Сформулюйте постулати Бора.
2. Накресліть схему енергетичних рівнів атома.
3. Що таке енергія збудження, іонізації? Покажіть їх на схемі енергетичних рівнів.
4. В чому полягає суть досліду Франка-Герца?
5. Чому не рекомендується визначати резонансний потенціал за положенням першого максимуму на вольт-амперній характеристиці?
6. Чому мінімальне значення анодного струму не дорівнює нулю?
7. Як залежить форма вольт-амперної характеристики від тиску газу в балоні лампи?
8. Що таке резонансне випромінювання?
9. Яка роль сітки в балоні лампи з досліду Франка-Герца?
10. Яким чином з'являється іонна складова струму?
11. Як пояснюється світіння газу в електричному розряді?
12. При якому прискорюючому потенціалі спостерігатиметься різке падіння анодного струму в досліді Франка і Герца, якщо балон заповнити атомарним воднем?

7 ДОСЛІДЖЕННЯ АТОМНОГО СПЕКТРА

7.1 Мета роботи

Розрахувати значення енергії електрона в атомі водню і побудувати енергетичну діаграму.

Опанувати експериментальний метод визначення невідомих довжин хвиль у видимій області спектра. Встановити відповідність результатів розрахунків довжини хвиль випромінювання водню за узагальненою формулою Бальмера з експериментальними даними, що одержані за допомогою монохроматора.

7.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Спектри є характеристикою атомів і молекул. Розрізняють лінійчасті, смугасті і суцільні спектри. Атоми характеризуються лінійчастими спектрами, тобто енергетичний спектр атомів має дискретну структуру. Треба зауважити, що часто енергетичні рівні є виродженими і, крім того, існують правила відбору при переході з одного рівня на інший. [1, с. 386-387; 2, с. 338-340]

Борівська теорія атома підтверджується емпірично одержаною узагальненою формулою Бальмера для атома водню:

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\lambda}\left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2}\right), \text{ (м}^{-1}\text{)} \qquad (7.1)$$

де R_{λ} – стала Рідберга, n_k, n_i – квантові числа $\left(n_k = 1,2,3,\ldots;\ n_i = n_k + 1, n_k + 2,\ldots\right)$.

В спектрі випромінювання атома водню спостерігаються окремі групи ліній, які мають назву спектральних серій.

Серією називається сукупність спектральних ліній, хвильові числа яких описуються формулою Бальмера, при $n_k = const$. Кожна серія характеризується головною лінією $\left(n_i = n_k + 1\right)$ і границею серії.

Спектр випромінювання атома водню складається з серій, які подані у таблиці 7.1

Фізичний смисл формула Бальмера одержала в результаті створення Шредінгером квантовомеханічної теорії атома водню. Кожній мікрочастинці зіставляється хвильова функція, яка характеризує її стан і знаходиться з роз'язання рівняння Шредінгера. Для електрона атома водню рівняння Шредінгера розв'язується при дискретних негативних значеннях повної енергії:

$$E_n = -\frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0{}^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2},\ (n = 1,2,3,\ldots),\ (\text{Дж}) \qquad (7.2)$$

де m – маса електрона, e - заряд електрона, ε_0 - електрична стала, h - стала Планка, n - головне квантове число. Тобто атом водню може мати тільки квантовані значення енергії. Схема рівнів енергії зображена на рис. 7.1 (а).

Таблиця 7.1

Серія	Область спектра	Формула серії	Межа серії
Лаймана	Ультрафіолетова	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_i^2}\right),$ $n_i = 2,3,4,...$	$911{,}27\ \overset{0}{A}$
Бальмера	Видима	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2}\right),$ $n_i = 3,4,5,....$	$3645{,}6\ \overset{0}{A}$
Пашена	Інфрачервона	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n_i^2}\right),$ $n_i = 4,5,6,....$	$8201{,}4\ \overset{0}{A}$
Брекета	Інфрачервона	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_i^2}\right),$ $n_i = 5,6,7,....$	$14580\ \overset{0}{A}$
Пфунда	Інфрачервона	$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n_i^2}\right),$ $n_i = 6,7,8,....$	$22782\ \overset{0}{A}$

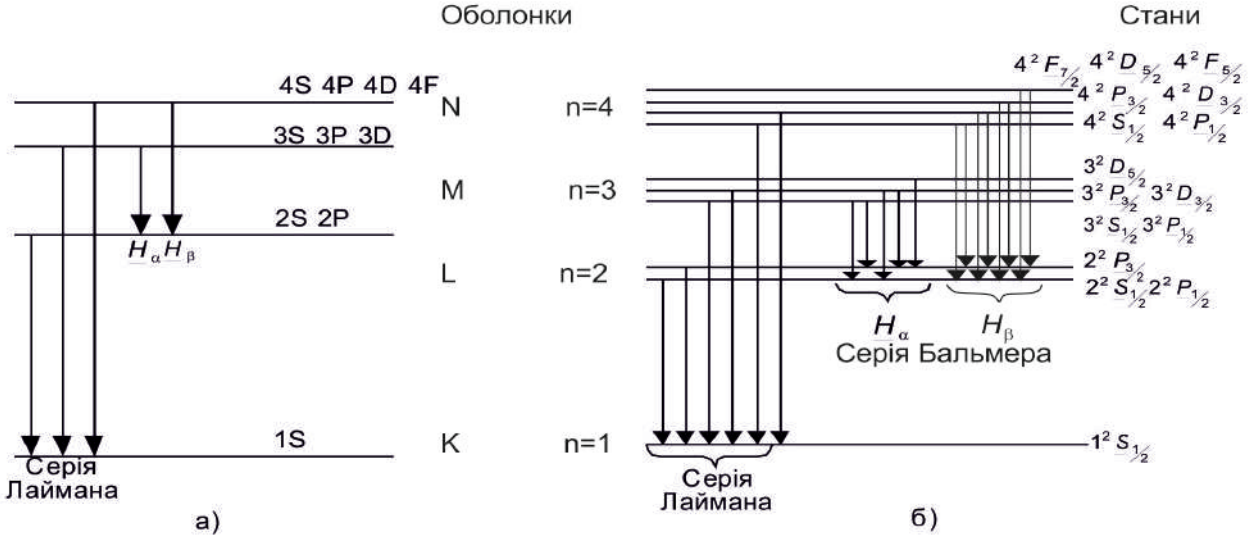


Рисунок 7.1

Згідно з постулатами Бора випромінювання кванта світла можливе при переході електрона з початкового стану з головним квантовим числом n_i і енергією E_i у нижчий стан з n_k і енергією E_k. Частота фотона, який випромінюється (з урахуванням (7.2)):

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{E_i - E_k}{h} = \frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0{}^2 \cdot h^2} \cdot \left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \tag{7.3}$$

Порівнюючи (7.3) з (7.1) одержимо сталу Ридберга

$$R = \frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0{}^2 \cdot h^3 \cdot c}. \tag{7.4}$$

При вивченні спектра водню за допомогою приладу з високою роздільною здатністю виявилось, що лінії мають тонку структуру (рис. 7.1 (б)), що пояснюється, якщо взяти до уваги спін-орбітальну взаємодію. На рис. 7.1 (б) зображена тонка структура головної лінії серії Бальмера.

7.3 Порядок виконання роботи і вказівки з її виконання

7.3.1 Побудова енергетичної діаграми для атома водню

1. Увімкнути лабораторну установку та прогріти 3 хвилини. використовуючи шкалу 6 визначити довжину хвиль усіх ліній серії Бальмера.
2. Використовуючи формулу (8.4) розрахувати сталу Рідберга.
3. Розрахувати довжини хвиль серії Бальмера, виходячи з формули: $\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), n_i = 3,4,5,\ldots 8.$
4. Аналізуючи дані п.1 та п.3 визначити відповідність.
5. Використовуючи формулу (4.2), обчислити значення енергії електрона для $n = (1-8)$ і $n \to \infty$.
6. Побудувати в масштабі рівні енергії з зазначенням головного квантового числа (енергетичну діаграму). Енергію розрахувати у джоулях і електронвольтах.
7. Визначити з енергетичної діаграми енергію фотонів і їх довжини хвиль для серії Бальмера. Порівняти їх з результатами, одержаними в п. 2.

7.3.2 Опис лабораторної установки

Схема установки для дослідження спектра водню наведена на рис. 7.2.

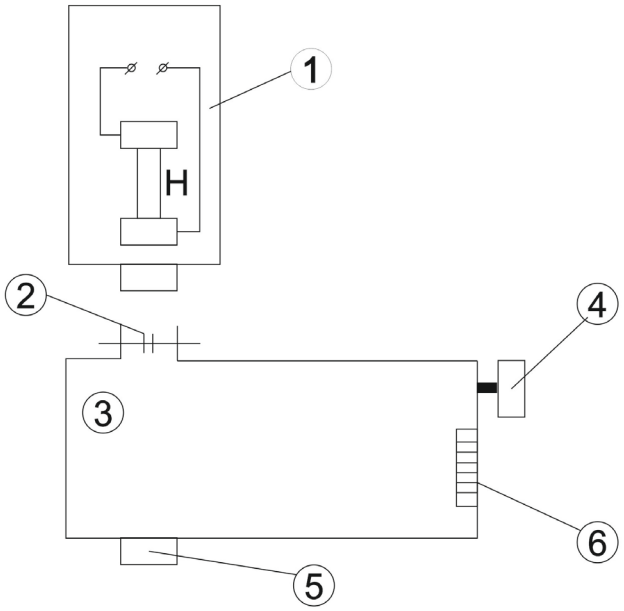


Рисунок 7.2

В експериментальній установці випромінювання водню одержують завдяки електричному розряду в газі водні в розрядному приладі 1. проходячи крізь калібровану щилину 2 промінь потрапляє на дисперсійну призму монохроматора 3, де розкладається в спектр. Повертаючи барабан 4 можна крізь окуляр 5 знайти будь-яку лінію видимого спектру (серія Бальмера) і за допомогою шкали 6 визначити довжину світлової хвилі, що віповідає цій лінії, у нанометрах.

Контрольні запитання та завдання

1. Які серіальні закономірності спостерігаються в спектрі атомарного водню?
2. Чим спектр атомарного водню буде відрізнятись від спектра молекулярного водню?
3. Що таке спектральна серія?
4. Якою формулою описується серія Бальмера?
5. Що таке енергія іонізації атома? Енергія збудження?
6. Поясніть зміст від'ємного значення енергії електрона в атомі?
7. Які ви знаєте квантові числа, який їх фізичний зміст?
8. Які стани називають виродженими? Які виродження можна зняти?
9. Чим обумовлена тонка структура ліній в спектрі водню?
10. Які види спектрів ви знаєте, і в яких випадках кожен з них спостерігається?
11. Сформулюйте постулати Бора.
12. Які правила відбору виконуються при переходах атомів з одних енергетичних рівнів на інші.

8 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИЧНОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА (ЛАЗЕРА)

8.1 Мета роботи

Вивчення принципу роботи і будови оптичного квантового генератора (ОКГ). Вимірювання параметрів і характеристик вимушеного випромінювання. Застосування лазера в оптичних дослідах.

8.2 Вказівки з організації самостійної роботи

Вивчити процеси випромінювання та поглинання випромінювання атомами речовини [1, с. 463-465; 2, с. 373-376; 3, с. 70-78]. Зверніть увагу на те, що інтенсивність спонтанного випромінювання не залежить, а вимушеного (стимульованого, індукованого) залежить від густини випромінювання.

Необхідно вміти визначати основні характеристики і параметри випромінювання [1, с. 461; 2, с.372].

Оптичний квантовий генератор являє собою прилад, в якому створені умови для отримання вимушеного випромінювання. Лазер обов'язково має три основні компоненти:

1. Активне середовище з інверсною заселеністю енергетичних рівнів.
2. Систему накопичування енергії.
3. Оптичний резонатор (пристрій, який формує світловий потік в заданому напрямку).

Система накачування (в твердотільних лазерах це лампа – спалах, в газових – газовий розряд) створює середовище з інверсною заселеністю рівнів. Первинні фотони, які рухаються уздовж осі, як і фотони ними індуковані, викликають лавиноподібне зростання фотонного потоку, чому сприяє відбиття потоку від дзеркал резонатора. Накладання відбитих від дзеркал і "прямих" фотонів утворює стоячу хвилю, яка виконує індукуючу дію. Частина індукованого випромінювання виходить назовні через напівпрозоре дзеркало.

Інтенсивності випромінювання $I_{21}^{СП}$, I_{21}^{*} і поглинання I_{12}^{*} одиниці об'єму збудженого середовища можуть бути розраховані за формулами:

$$I_{21}^{СП} = A_{21} \cdot N_2 \cdot h; \tag{8.1}$$

$$I_{21}^{*} = B_{21} \cdot N_2 \cdot U_\nu \cdot h \cdot \nu; \tag{8.2}$$

$$I_{12}^{*} = B_{12} \cdot N_1 \cdot U_\nu \cdot h \cdot \nu. \tag{8.3}$$

де A_{21}, B_{21}, B_{12} - коефіцієнти Ейнштейна, які визначають ймовірність спонтанного випромінювання, вимушеного випромінювання і вимушеного поглинання відповідно;

N_1, N_2 - густина частинок у станах з енергіями E_1, E_2;

U_ν - густина енергії випромінювання на частоті переходу.

Щоб отримати потужне індуковане випромінювання необхідно створити інверсну заселеність рівнів ($N_2 > N_1$) і забезпечити в середовищі високу густину енергії U_ν на частоті ν, що відповідає переходу між цими рівнями. Висока об'ємна густина енергії випромінювання досягається розташуванням активного середовища в резонаторі.

Розглянемо процес створення активного середовища на прикладі гелій-неонового лазера (суміш гелію і неону з співвідношенням концентрацій 10:1 і тиском близько 1мм рт.ст.). Енергетичні рівні незбуджених атомів гелію і неону (1S - стан) практично однакові. Атоми гелію мають два близьких за енергіями підрівні 2S (рис. 8.1). Перехід $1S \to 2S$ відбувається за рахунок непружних співударянь частинок в газовому розряді (фотонний перехід $2S \to 1S$ заборонено правилом добору). При зіткненнях в газовому розряді енергія від атомів гелію переходить до атомів неону, частина яких опиняється в стані 4S, а гелію і неону (1S - стан) практично однакові. Атоми гелію мають два близьких за енергіями

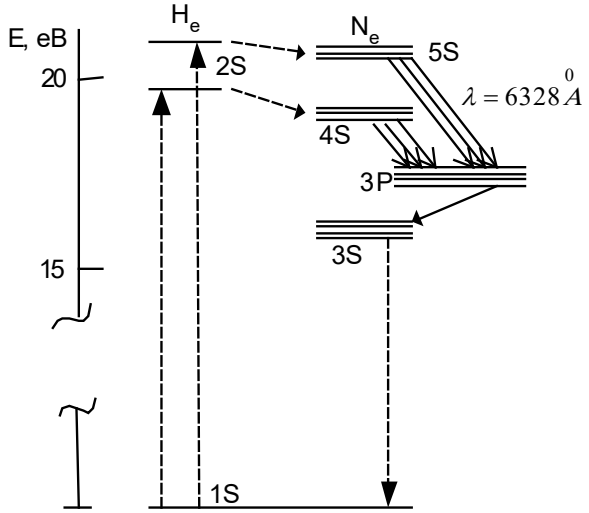


Рисунок 9.1

підрівні 2S (рис. 8.1). Перехід $1S \to 2S$ відбувається за рахунок непружних співударянь частинок в газовому розряді (фотонний перехід $2S \to 1S$ заборонено правилом добору). При зіткненнях в газовому розряді енергія від атомів гелію переходить до атомів неону, частина яких опиняється в стані 4S, а частина в стані 5S. Час життя атомів неону на рівнях 4S і 5S на два порядки більше, ніж на рівнях 3P, внаслідок чого в газовому розряді, при безперервній підкачці енергії, створюється інверсна заселеність рівнів неону 4S і 5S по відношенню

до 3Р. Перехід $5S \to 3P$ призводить до утворення індукованого червоного світла ($\lambda = 0{,}6328$ мкм), а перехід $3P \to 3S$ відіграє роль очисника рівнів 4S і 5S, що збільшує відносну інверсну заселеність рівнів 4S і 5S.

Інтенсивність вимушеного випромінювання дорівнює

$$I = I_{21}^{*} - I_{12}^{*} = B \cdot \Delta N \cdot U_{\nu} \cdot h \cdot V, \qquad (8.4)$$

де $B = B_{21} = B_{12}$, $\Delta N = N_2 - N_1$.

З формули (8.4) видно, що інтенсивність лазерного випромінювання пропорційна U_{ν} і ΔN.

8.3 Опис лабораторної установки

Обладнання: газовий ОКГ з регульованим блоком живлення, монохроматор, аналізатор, екран, таблиці спектральних ліній.

Схема лабораторного макета наведена на рис. 8.2. Активне середовище (газ під низьким тиском) знаходиться в скляній трубці 1, закритій з торців вікнами 2, встановленими під кутом Брюстера. До двох електродів 3 підводиться високовольтна напруга. Під її дією в газі відбувається електричний розряд, що збуджує атоми газу. Трубка з газом розташована між дзеркалами 4 високодобротного відкритого резонатора (рис. 8.2). Одне з дзеркал резонатора напівпрозоре і через нього виходить випромінювання. Фотодіод *VD* разом з цифровим мікроамперметром *PA2* дозволяє реєструвати зміну інтенсивності вимушеного випромінювання. За допомогою монохроматора *M* можна спостерігати спектр випромінювання активного середовища ОКГ, знайти в ньому лінію вимушеного випромінювання і визначити довжини хвиль. Таблиці спектральних ліній або зразкові спектри атомів знаходяться на робочому місці.

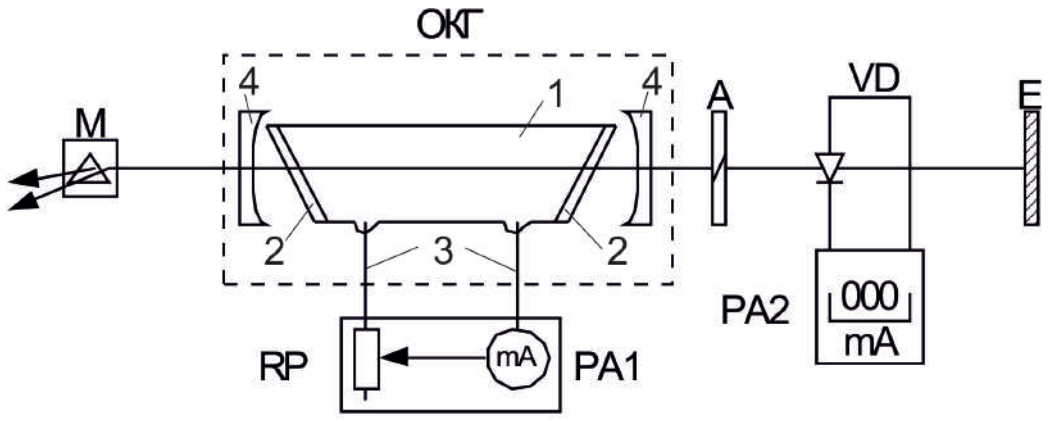


Рисунок 8.2

Поляризація вимушеного випромінювання визначається за допомогою аналізатора *A* і приймача променевої енергії *VD*. Шкала, нанесена на обойму

аналізатора, дозволяє вимірювати кути повороту аналізатора навколо осі. Екран *E* дозволяє визначати кут розходження вимушеного випромінювання.

8.4 Порядок виконання роботи і вказівки з її виконання

8.4.1 Підготовка макета до роботи

Увімкніть блок живлення ОКГ. З випромінювача повинен з'явитися яскравий червоний промінь випромінювання.

8.4.2 Визначення складу активного середовища

Установіть ОКГ перед вхідною щілиною монохроматора *M* так, щоб в нього попадало випромінювання збудженого середовища. Підбором ширини вхідної щилини, фокусуванням окуляра досягніть чіткого зображення спектра. Обертаючи відрахунковий барабан монохроматора проскануйте спектр випромінювання. Для найбільше яскравих ліній зареєструйте показники по відрахунковому барабану. Використовуючи градуювальну криву монохроматора, визначте довжини хвиль найбільш яскравих ліній випромінювання. Калібровку монохроматора проведіть по відомій довжині хвилі вимушеного випромінювання лазера $6328\overset{o}{A}$. Результати вимірювань занесить у таблицю 8.1.

Таблиця 8.1 - Визначення складу активного середовища

№	Колір лінії спектру	Показник	Довжина хвилі, λ, нм	Середовище
1	червоний			
...				
7				

Порівнюючи лінії випромінювання активного середовища з еталонною спектрограмою різних атомів, що знаходиться на монохроматорі, визначте склад активного середовища.

8.4.3 Визначення поляризації вимушеного випромінювання

Між ОКГ і приймачем випромінювання *VD* розташуйте оптичний аналізатор *A*. Повертаючи аналізатор навколо осі на 360^0, виміряйте інтенсивність випромінювання, що пройшло крізь аналізатор, при різних кутах повороту $I_B(\varphi)$. Результати занесить у таблицю 8.2.

Таблиця 8.2 – Залежність інтенсивності випромінювання від кута повороту аналізатора

φ, град	0	10	20	30	...	340	350	360
I_B, нА								

Побудуйте графік одержаної залежності і перевірте, чи виконується закон Малюса. Якщо закон Малюса не виконується, підрахуйте ступінь полярізації за формулою

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{8.5}$$

де $I_{\max}$ і $I_{\min}$ - максимальна і мінімальна інтенсивність випромінювання.

8.5 Зміст звіту

Результати вимірювань подайте у вигляді графіка залежності інтенсивності випромінювання від кута повороту аналізатора. Наведіть дані ступеня поляризації лазерного випромінювання.

Контрольні запитання та завдання

1. У чому суть вимушеного випромінювання?
2. Що таке принцип детальної рівноваги?
3. У чому полягає фізичний зміст коефіцієнтів Ейнштейна?
4. Що таке інверсна заселеність енергетичних рівнів?
5. Як в ОКГ отримується інверсна заселеність рівнів?
6. Що таке від'ємна абсолютна температура?
7. Які умови потрібні для отримання інтенсивного вимушеного випромінювання?
8. Назвіть основні елементи ОКГ.
9. Який принцип будови та роботи лазера?
10. Які властивості має випромінювання лазера? Що таке когерентність?
11. Які прямі вимірювання потрібно провести в роботі?
12. Сформулюйте закон Малюса.

9 ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ ТВЕРДИХ ТІЛ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЕНЕРГІЇ АКТИВАЦІЇ НАПІВПРОВІДНИКА

9.1 Мета роботи

Експериментальне встановлення законів залежності питомої електропровідності металів та напівпровідників від температури, визначення енергії активації напівпровідника.

9.2 Вказівки до організації самостійної роботи студентів

Вивчаючи основні положення зонної теорії твердих тіл та теорії електропровідності [2, с. 385-393; 3, с. 95-102], зверніть особливу увагу на відмінність зонної структури та механізму електропровідності металів та напівпровідників; поняття валентної зони, зони провідності, забороненої зони. Уясніть механізм власної та домішкової провідності напівпровідників.

У даній роботі вимірюють питому електропровідність σ трьох зразків твердих тіл в залежності від температури T. Питома електропровідність металів, в яких носіями електричного струму є вільні електрони, дорівнює

$$\sigma = ne\mu, \tag{9.1}$$

де n – концентрація носіїв струму, e – заряд електрона, μ – рухливість носіїв струму.

Рухливість носіїв струму в твердих тілах μ – величина, що характеризує динамічні властивості носіїв струму, вона дорівнює відношенню середньої швидкості спрямованого руху носіїв струму (швидкості дрейфу) до напруженості електричного поля E, яке викликало появу цього руху. Рухливість μ носіїв струму не залежить від концентрації n. Величина μ визначається процесами розсіювання носіїв струму. Так, для металів із збільшенням температури μ зменшується внаслідок розсіяння електронів на теплових коливаннях кристалічної решітки (фотонах) обернено пропорційно температурі:

$$\mu \sim \frac{1}{T}.$$

Концентрація вільних електронів майже не залежить від температури і є сталою в широкому інтервалі температур. Тому із (9.1) витікає, що у металів питома електропровідність при збільшенні температури зменшується.

Для напівпровідників питома електропровідність визначається концентрацією n негативних носіїв струму (електронів) і їх рухливістю μ_n та концентрацією p позитивних носіїв струму (дірок) та їх рухливістю μ_p:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p).$$

У власних напівпровідників $n \approx p$, а рухливість носіїв струму зменшується при зростанні температури за степеневим законом. Але концентрація носіїв струму зростає із збільшенням температури за експоненціальним законом:

$$n \sim \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right),$$

де ΔE - ширина забороненої зони, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{K}$ - стала Больцмана.

Тоді питома електропровідність власних напівпровідників визначається залежністю

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \tag{9.2}$$

де σ_0 - питома електропровідність при $T \to \infty$. σ_0 дещо змінюється з температурою, але ця залежність набагато менша, ніж експоненціальна.

Для виникнення електропровідності необхідно затратити енергію, яка дорівнює ширині ΔE забороненої зони – енергію активації напівпровідника. За графіком залежності $\ln\sigma$ від $1/T$ (рис. 10.1) можна знайти енергію активації.

Якщо на залежності $\ln\sigma(1/T)$ взяти дві точки 1 та 2, то

$$\ln\sigma_2 - \ln\sigma_1 = -\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right);$$

$$\Delta E = 2k \cdot \frac{\ln\sigma_2 - n\sigma_1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = 2k\frac{\Delta(\ln\sigma)}{\Delta(1/T)}. \tag{9.3}$$

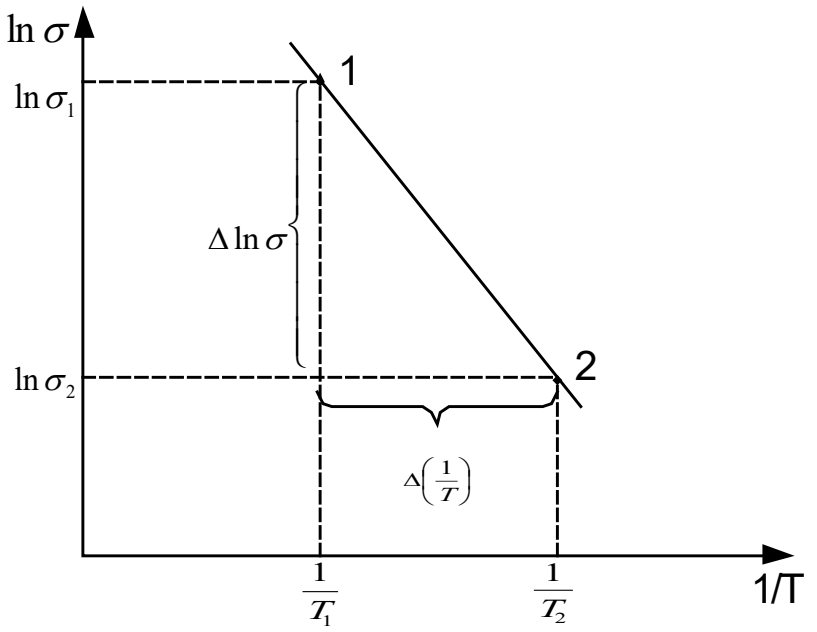


Рисунок 9.1

9.3 Опис лабораторної установки

Обладнання: регульоване джерело живлення, вольтметр, амперметр, термостат зі зразками, термометр.

Електропровідність зразків *РК* при їхньому нагріванні вимірюється за допомогою макета, схема якого наведена на рис. 9.2.

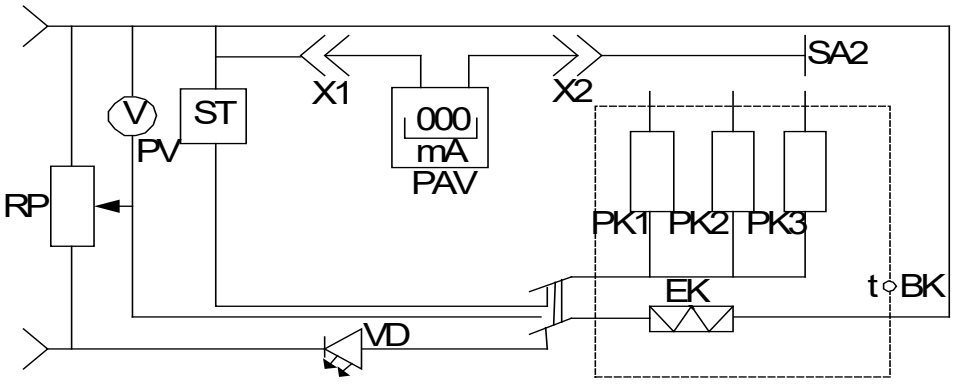


Рисунок 9.2

Досліджувані зразки *РК1, РК2, РК3* поміщені до термостата з нагрівальним елементом *ЕК і* термометром *ВК.* Перемикач *SA2* дозволяє підключити їх до вимірювальної схеми по черзі.

Зміна електропровідності σ зразків визначається побічним (непрямим) методом: шляхом виміру сили струму при постійній величині напруги на зразку, або при зміні напруги при постійній величині струму.

Напруга на зразках у першому випадку (або сила струму в другому) підтримується постійним електронним стабілізатором *ST*.

Електронний стабілізатор і нагрівач E_k вмикаються тумблером *SA1*, про що сигналізує світлодіод *VD*. Вимірювальний прилад *PVA* підключається до схеми за допомогою клем *X1* і *X2*.

При увімкненому нагрівачі зразки підключаються до потенціометра *RP*, який дозволяє вимірювати на них напругу для отримання вольт-амперної характеристики.

9.4 Порядок виконання роботи і вказівки з її виконання

1. Підключити до клем *X1* та *X2* амперметр або вольтметр. Тумблер *SA1* вимкнути.

2. Увімкнути макет. Змінюючи напругу потенціометром *RP*, виміряти залежність сили I струму від напруги U для кожного із зразків при кімнатній температурі.

3. Побудувати графіки залежності $I(U)$ та визначити із графіків питому електропровідність $\sigma_k = \dfrac{\Delta I}{\Delta U}$ зразків при кімнатній температурі.

4. За час проведення експерименту можливо лише один раз провести вимірювання температурної залежності $\sigma(T)$, тому тумблер *SA1* вмикайте тільки після того, як підготуєтесь до вимірювань.

Вимірювання $\sigma(T)$ здійснюються за визначеною залежністю сили струму $I(T)$ від температури для фіксованої напруги $U_k = 0{,}5B$.

Якщо $U = U_k$, то

$$\frac{\sigma}{\sigma_k} = \frac{IU_k}{I_k U} = \frac{I}{I_k}.$$

де I_k, U_k, σ_k - величини, виміряні при кімнатній температурі T_k.

5. Підготуйте таблицю для результатів вимірювань

6. Тумблером *SA1* увімкніть нагрівач *EK* та електронний стабілізатор.

7. При підвищенні температури до 50^oC через 5^oC вимірювати залежність сили струму від температури. Для даної температури по черзі вмикати зразки за допомогою *PK1, PK2* та *PK3*.

8. За виміряними залежностями визначити $\sigma(T)$ та побудувати графіки $\dfrac{\sigma}{\sigma_k}(T)$. Визначити яка з речовин є напівпровідником.

9. Для напівпровідника побудувати графік залежності $\ln(\sigma/\sigma_k)$ від $(1/T)$.

Таблиця 9.1

t, ^0C	$I(U)$			TK	$\frac{1}{T}K^{-1}$	$\frac{\sigma}{\sigma_k}$			$\ln\frac{\sigma}{\sigma_k}$
	Зразок №1	Зразок №2	Зразок №3			1	2	3	
t_k 20 25 30 35 40 45 50	$I_k(U_k)$	$I_k(U_k)$	$I_k(U_k)$						

10. На графіку цієї залежності вибрати дві точки для яких визначити $\Delta\ln(\sigma/\sigma_k)$ та $\Delta(1/T)$ (рис. 9.1).

Використовуючи формулу (9.3), знайти енергію активації напівпровідника.

Контрольні запитання та завдання

1. Як відрізняються метали, діелектрики та напівпровідники за зонною теорією?

2. Що таке питома електропровідність?

3. Як питома електропровідність металів залежить від температури?

4. Як знайти питому електропровідність металу, використовуючи вольтамперну характеристику металу (графічну залежність сили струму від напруги)?

5. Яка величина називається рухомістю носіїв струму? Від чого вона залежить?

6. Як змінюється концентрація носіїв струму із зміною температури в металах; в напівпровідниках?

7. Як вимірюється питома електропровідність речовин у даній роботі?

8. Що таке заборонена зона для власних напівпровідників? Як знайти енергію активації напівпровідника в даній роботі?

9. За яким законом змінюється питома електропровідність власних напівпровідників?

10. Поясніть фізичні причини такої залежності.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Кармазін В.В., Семенець В.В. Курс загальної фізики / Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. – К.: Кондор, 2008 – 524 с.

2. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.

3. Квантова та ядерна фізика: Навч. Посібник / Упоряд. М.І. Українець, Т.Б. Ткаченко та ін.. – Харків: ХНУРЕ, 2005. – 124 с.

Додаткові джерела

4. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т.3. – 304 с.

5. Гольдин Л.Л. Лабораторные занятия по физике.– М.: Наука, 1983.–704 с.

6. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976. – 926 с.

7. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т. 2. – 480 с.

8. Кортнев А.В., Рубльов Ю.В., Куценко А.Н. Практикум з фізики. М., Вища школа, 1963.

9. Иверонова В.И. Физический практикум. Электричество и оптика. – М.: Наука, 1968. –815 с.

10. Ищенко Е.Ф., Климков Ю.М. Оптические квантовые генераторы. – М.: Сов. Радио, 1968. – 472 с.

11. Солоухин Р.И. Методы физических измерений. – Новосибирск: Наука, 1975. – 292 с.

12. Шпольский Э.В. Атомная физика. – М.: Наука, 1974. Т.1. – 575 с.

13. Шпольский Э.В. Атомная физика. – М.: Наука, 1974. Т.2. – 575 с.

14. Герцрберг Г.В. Электронные спектры и строение многоатомных молекул. – М.: Мир, 1969. – 772 с.

15. Мухин К.Н. Экспериментальная ядерная физика. – М.: Атомиздат, 1974. – Т.1. – 584 с.

16. Ершов В.С. Внедрение международной системы единиц. – М.: Изд-во стандартов, 1986. – 295 с.

17. Государственный комитет СССР по стандартам. Методические указания (внедрение и применение ГОСТ 8.417-81 “ГСИ. Единицы физических величин” в области ионизирующих излучений. РД 50-454-84). – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 34 с.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО КОМП'ЮТЕРНИХ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ

«ФІЗИКА»

Харків 2021

Методичні вказівки до комп’ютерних лабораторних робіт з фізики для студентів усіх спеціальностей і форм навчання / Упоряд. Р.П. Орел, О.М. Коваленко, А.І. Рибалка та ін. – Харків: ХНУРЕ, 2021. – 133 с.

Упорядники: Р.П. Орел,
О.М. Коваленко,
А.І. Рибалка,
С.М. Мешков,
В.В. Калінін,
А.А. Онищенко,
О.В. Мягкий,
О.С. Чубукін,
Ю.Д. Приймачов.

ЗМІСТ

Загальні положення 4

Частина I. Механіка і молекулярна фізика 6
1 Вивчення вільного падіння 6
2 Визначення середньої довжини вільного пробігу молекули 10
3 Перевірка основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії 18
4 Вимірювання коефіцієнта в‘язкості рідини за методом Стокса 24

Частина II. Електрика 29
5 Осцилографування фізичних процесів 29
6 Вивчення графічного зображення електричного поля точкового заряду та системи точкових зарядів 37
7 Вимірювання електричного опору провідників за методом моста Уітстона 43

Частина III. Магнетизм 49
8 Вивчення магнітного поля кругового витка та соленоїда 49
9 Визначення питомого заряду електрона методом фокусування пучка електронів поздовжнім магнітним полем 55
10 Визначення питомого заряду електрона методом магнетрона 62
11 Дослідження явища самоіндукції 69
12 Дослідження явища взаємоіндукції 75

Частина IV. Оптика 83
13 Вивчення явища інтерференції від двох щілин та системи паралельних щілин 83
14 Вивчення дифракції світла на одній щілині та системі паралельних щілин 92

Частина V. Атомна фізика 99
15 Дослід Резерфорда з розсіювання а-частинок 99
16 Вивчення руху мікрочастинки в потенціальній ямі скінченної глибини 106
17 Вивчення будови та спектру атому водню 115

Додатки 125

Рекомендована література 131

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Фізика – наука експериментальна, а тому на першому плані при її вивченні завжди стоїть фізичний практикум.

В даній роботі пропонується комп’ютерний практикум, який включає віртуальні лабораторні роботи з усіх основних розділів та тем курсу фізики і дозволяє після його виконання отримати тверді знання з основних явищ та законів фізики та скласти загальну уяву про предмет фізики.

Методичні вказівки до кожної роботи містять: основні теоретичні відомості про явища, які вивчаються, основні фізичні закони, які їх описують; стислий опис алгоритму комп’ютерної програми та її можливостей; вказівки до виконання роботи; вказівки щодо змісту звіту; питання та завдання для самоконтролю.

Лабораторні роботи виконуються відповідно до семестрового графіка, який знаходиться у пакеті контрольних завдань для студентів відповідної освітньої програми або на інтернет-сторінці дистанційного курсу дисципліни, тому кожен студент має можливість підготуватися до них заздалегідь.

Виконання лабораторного завдання складається із попередньої підготовки, проведення комп'ютерного експерименту і складання звіту про результати роботи. До виконання лабораторної роботи необхідно готуватись заздалегідь, вивчити конспект лекцій і рекомендовані розділи навчальних посібників [1...8].

Допуск до виконання лабораторної роботи проводиться викладачем перед початком роботи опитуванням (письмово чи усно) або у вигляді комп’ютерного тесту. Для успішного проходження вказаної формі контролю необхідно знати відповіді на наступні питання:

– назва та мета роботи;

– опис комп’ютерної програми, що використовується для виконання лабораторної роботи;

– порядок виконання роботи;

– фізичні величини, що вивчаються та досліджуються в даній лабораторній роботі, їх розмірність;

– загальний вигляд законів і залежностей, що планується використати в ході виконання лабораторної роботи;

– дані, що вводяться у програмі роботи;

– результати, які видає програма при виконанні роботи;
– формули для розрахунків похибок прямих та непрямих вимірювань.

Після проведення комп’ютерного експерименту у разі очної форми навчання результаті розрахунків необхідно показати викладачеві та отримати відповідну відмітку про виконання. У разі дистанційної форми навчання результаті експерименту і розрахунків необхідно завантажити за відповідним посиланням на інтернет-сторінку курсу.

Звіт з кожної лабораторної роботи оформляється згідно ДСТУ 3008-2015 і має містити назву та мету роботи, опис програми роботи та вихідні дані для свого варіанту, результати вимірювань (у вигляді таблиць), робочу формулу та результати розрахунків у вигляді графіків та/або таблиць, формулу для розрахунку похибок та результат цього розрахунку, висновки з результатів, що одержані в роботі. Захист оформлених звітів проводять у вигляді здачі циклу лабораторних робот (3–4 роботи) на підсумковому занятті згідно з графіком.

До здачі циклу допускають студентів, які виконали лабораторні роботи циклу, отримали відмітки про виконання і оформили звіти по всім роботам. Захист лабораторних робіт проводиться у формі опитування по змісту виконаних лабораторних завдань, а також теоретичного матеріалу, пов’язаному з темами виконаних робіт. Перелік контрольних запитань та завдань наведений у кінці опису кожної роботи.

ЧАСТИНА І. МЕХАНІКА І МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

1 ВИВЧЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ

1.1 Мета роботи

Вивчити закономірності вільного падіння тіл в полі тяжіння, визначити прискорення вільного падіння. Ознайомитись з методом обчислення похибок прямих та непрямих вимірювань.

1.2 Вказівки з організації самостійної роботи студентів

Прискорення вільного падіння — це прискорення, якого набуває тіло при русі в полі сили тяжіння. Поблизу поверхні Землі сила тяжіння залежить від географічної широти місцевості та від висоти над рівнем моря. Із збільшенням висоти над поверхнею Землі сила тяжіння зменшується обернено пропорційно квадратові відстані між центрами тіла та Землі [1, 5, 6].

В даній роботі прискорення вільного падіння g визначається за прямими вимірюваннями часу t та висоти падіння h. Відстань h, яку тіло проходить за час t від моменту початку вільного падіння визначається за кінематичним законом руху:

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2}, \qquad (1.1)$$

звідки $g = \frac{2h}{t^2}$, або

$$\sqrt{h} = t \cdot \sqrt{\frac{g}{2}}. \qquad (1.2)$$

Якщо виміряти час падіння кульки з різної висоти та побудувати графік залежності $\sqrt{h}$ від t, то згідно з (1.2) отримаємо пряму, тангенс кута нахилу якої до осі t буде дорівнювати $\sqrt{g/2}$.

Графік залежності $\sqrt{h}$ від t (рис.1.1) дає можливість обчислити значення g за формулою:

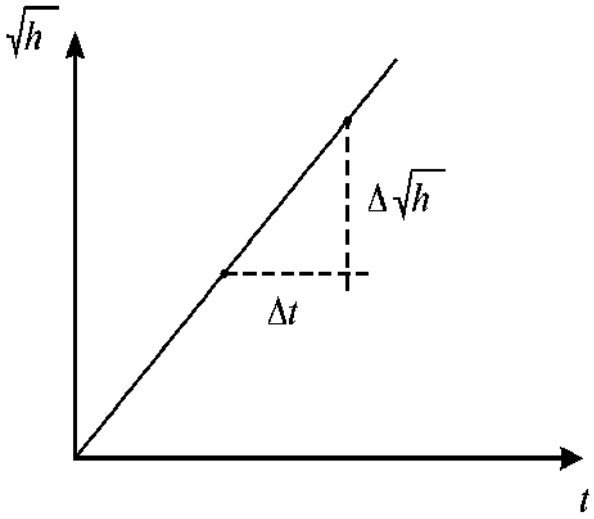


Рисунок 1.1

$$g = 2 \cdot \left(\frac{\Delta\sqrt{h}}{\Delta t} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}}{t_2 - t_1} \right)^2 . \qquad (1.3)$$

1.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 1.2. Програма моделює рух тіла в середовищі в широких межах зміни густини середовища ρ та коефіцієнта в'язкості, а також в частинному випадку, коли $\rho \approx 0$, $\eta \approx 0$, тобто, у вакуумі. Шлях падіння кульки вимірюється за шкалою, на якій нанесені поділки в м. Час падіння кульки вимірюється секундоміром. На екрані дисплею виведені кнопки управління секундоміра для вмикання, вимикання та скидання до нуля. Програма дозволяє зупинити процес падіння в будь-який момент, а потім або продовжити із збереженими значеннями величин на цей момент часу, або повернутися до початкового моменту.

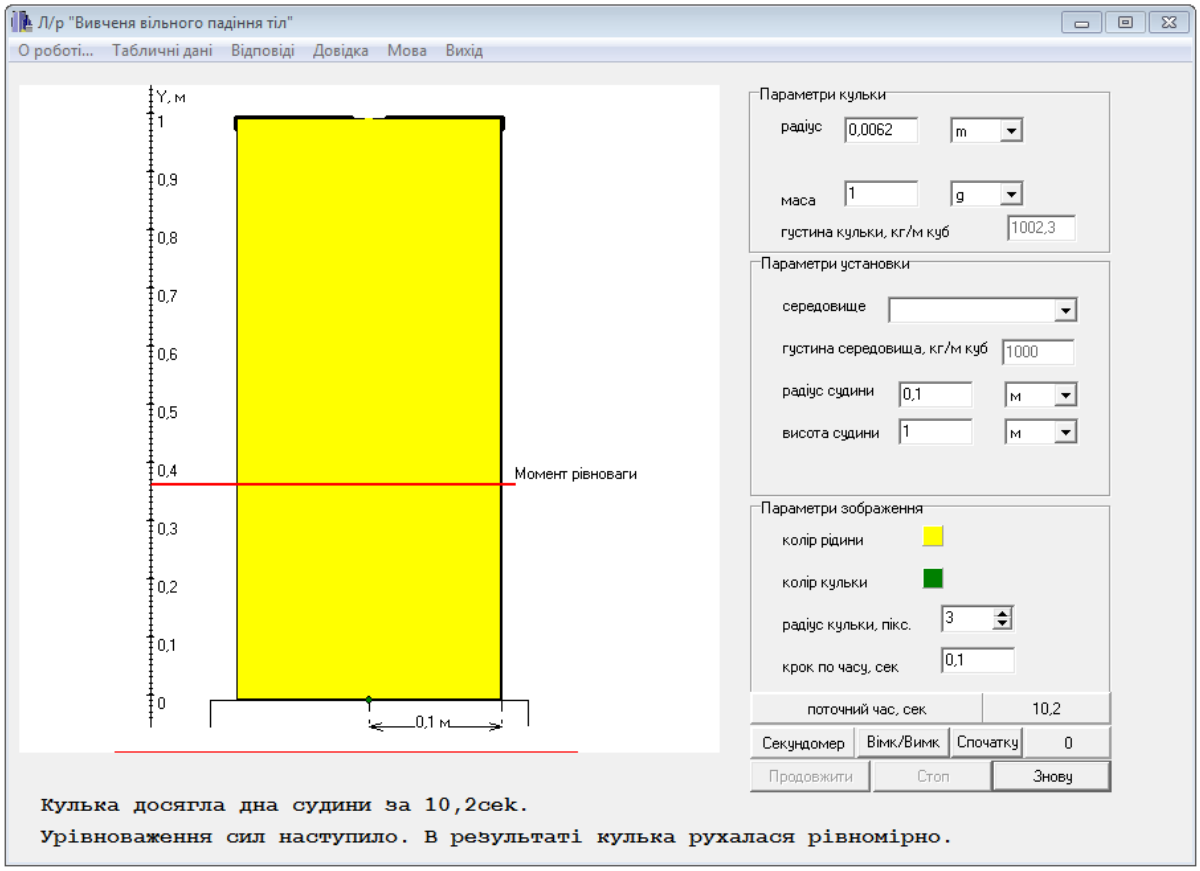


Рисунок 1.2

1.4 Інструкція користувачу

Розрахунок прискорення вільного падіння необхідно виконати для випадків середовища “вакуум” і “повітря”.

1. Встановити у вікні інтерфейсу “Параметри установки, середовище” – “інше середовище”. Задати значення густини $\rho = 10^{-6}$ кг/м^3 (вводити $0,000001$), значення в’язкості (вакуум) – $\eta = 10^{-8}$ Па·с (вводити $0,00000001$). Обнулити показання секундоміру, натиснувши на “Знову”.

2. Натиснути кнопку “Запуск” і після того, як кулька досягне дна посудини встановити висоту посудини 100 м, масу кульки m та її радіус R згідно номеру варіанту з таблиці 1.1.

3. Встановити червону риску лівою кнопкою “миші” на рівні $(100 - h)$ м, h взяти з таблиці 1.1. згідно номеру варіанту и занести у таблицю 1.2.

4. Натиснути кнопку “Запуск”. Одразу ж після натискання кнопки “Запуск”, ввімкнути секундомір. В момент досягнення кулькою червоної риски, вимкнути секундомір. Занести в таблицю 1.2 значення часу падіння.

5. Повторити пункти 3 і 4 чотири рази, збільшуючи кожного разу висоту падіння h на 5 м, починаючи з початкового значення. Занесіть дані у таблицю 1.2 для вакууму.

6. Повторити пункти 2 – 5 для випадку, коли кулька падає в реальних умовах – у повітрі. Для цього задати значення густини середовища $\rho = 1,29$ кг/м^3, коефіцієнта в’язкості $\eta = 17,2 \cdot 10^{-6}$ Па·с.

7. Обчислити середнє значення часу $< t >$ для кожного значення висоти.

Таблиця 1.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R, см	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
h, м	30	30	30	30	30	30	35	35	35	35	35	35
m, г	1	2	4	6	9	11	1	2	4	6	9	11

8. Побудувати графік залежності $\sqrt{h}$ від $< t >$ для обох випадків. При побудові графіка необхідно виконати розриви осей, щоб точки залежності були розташовані уздовж діагонального напрямку всієї координатної площині, а не тільки в одному місці. По точках залежності необхідно побудувати пряму лінію. і саме з цієї прямої брати дві точки для розрахунку g.

9. З побудованих графіків (саме з прямих) взяти дві точки і обчислити величину g за формулою (1.3) для для обох випадків.

10. Обчислити похибки вимірювань прискорення вільного падіння.

Таблиця 1.2 – Результати розрахунків для вакууму / повітря.

№	h, м	$\sqrt{h}$, $\sqrt{\text{м}}$	Час падіння, с						
			t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$< t >$	Δt
1									
2									
3									
4									
5									

1.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, дані вимірювань, занесені до таблиць, залежності $\sqrt{h}$ від t для вакууму та повітря, представлених на різних рисунках, результати обчислення прискорення вільного падіння і його похибки для вакууму та повітря у вигляді $g = g_{розрах} \pm \Delta g$, висновки.

1.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яка мета даної роботи?
2. Що таке прискорення?
3. Як залежить величина прискорення вільного падіння від географічної широти місцевості та висоти над рівнем моря?
4. Яким кінематичним законом описується вільне падіння тіл?
5. Під дією якої сили відбувається вільне падіння? Від чого залежить ця сила?
6. Запишіть закон всесвітнього тяжіння.
7. Запишіть формулу, за якою визначається прискорення вільного падіння в даній роботі.
8. Які вимірювання називають прямими?
9. Які вимірювання називають непрямими?
10. Як обчислюються похибки при прямих вимірюваннях?
11. Як обчислюються похибки при непрямих вимірюваннях?

2 ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ ДОВЖИНИ ВІЛЬНОГО ПРОБІГУ МОЛЕКУЛИ

2.1 Мета роботи

Ознайомитись з основними положеннями молекулярно-кінетичної теорії (МКТ). Вивчити хаотичний рух молекул, визначити середню довжину вільного пробігу молекул.

2.2. Вказівки до організації самостійної роботи

В основі молекулярно-кінетичної теорії (МКТ) лежать три положення [1, 5, 6]:

1. Всі речовини складаються з мікрочастинок (атомів, молекул, іонів та ін.)
2. Частинки знаходяться в неперервному хаотичному русі.
3. Частинки взаємодіють між собою та з зовнішніми тілами. Характер взаємодії врешті решт і визначає чи буде речовина газом, рідиною або твердим тілом.

Внаслідок хаотичного (теплового) руху між молекулами безперервно відбуваються зіткнення. Рухаючись рівномірно і прямолінійно молекула проходить деякий шлях між двома послідовними зіткненнями, який називається *довжиною вільного пробігу*. Довжина вільного пробігу весь час змінюється. Середня відстань, яку проходить молекула між двома послідовними ударами, носить назву *середньої довжини вільного пробігу молекули* λ_2. Для визначення λ_2 досить розділити шлях, який проходить молекула за 1с, що чисельно дорівнює середній швидкості V, на середнє число зіткнень z_2, яких молекула зазнає за 1с: $\lambda_2 = V / z_2$.

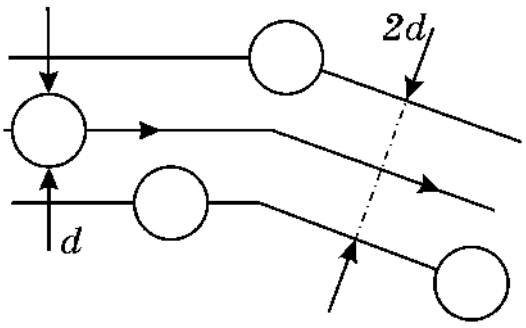


Рисунок 2.1

Розглянемо двовимірну модель ідеального газу. Для визначення z_2 будемо вважати молекулу диском, діаметр якого дорівнює d. Зобразимо шлях диска всередині ламаної смуги шириною $2d$ (рис.2.1).Інші молекули вважаємо нерухомими. Молекула, що рухається, зіткнеться тільки з тими молекулами, центри яких знаходяться на відстанях рівних або менших d. Середнє число

зіткнень z_2 за 1с дорівнює числу молекул в площі ламаної смуги: $z_2 = n_2 S$, де n_2 – концентрація молекул (в даному випадку n_2 – це число молекул (дисків), яке припадає на одиницю площі). Площу ламаної смуги можна прирівняти площі спрямленої смуги довжиною V та шириною $2d$, отже $z_2 = n_2(2d)V$. Тоді середня довжина пробігу

$$\lambda_2 = \frac{1}{2dn_2}. \tag{2.1}$$

Подібні міркування приводять для тривимірної моделі до формули вигляду

$$\lambda = \frac{1}{\pi n d^2} \tag{2.2}$$

де n – концентрація молекул, тобто кількість молекул в одиниці об'єму газу.

Порівнюючи формули (2.1) та (2.2) можна встановити зв'язок між довжинами вільного пробігу для дво- та тривимірної моделі

$$\lambda = \frac{2n_2}{\pi n d}\lambda_2. \tag{2.3}$$

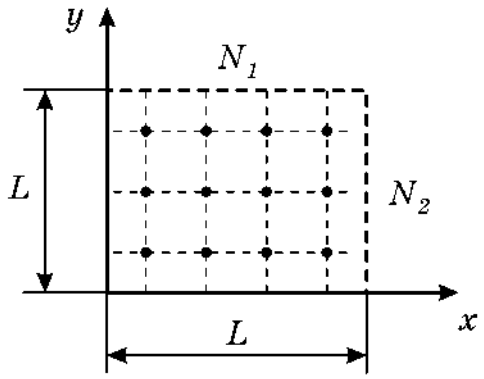


Рисунок 2.2

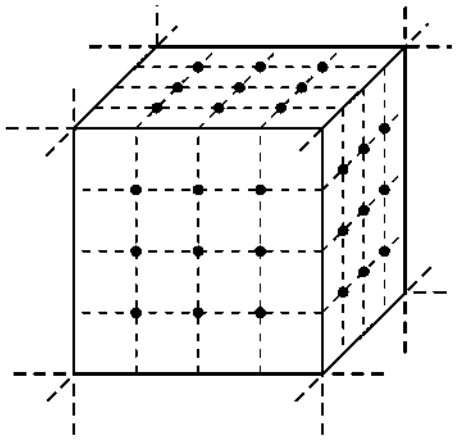


Рисунок 2.3

Встановимо зв'язок між n_2 та n.

Розглянемо двовимірний випадок. Визначимо концентрацію молекул n_2 на площині (грані куба) (рис.2.2)

$$n_2 = \frac{N_1 N_2}{L^2},$$

де N_1 та N_2 – кількості молекул в напрямку осей x та y відповідно, L – довжина сторони куба. Якщо розглядати куб з однаковою кількістю молекул в обох напрямках, то

$$n_2 = \frac{N^2}{L^2}.$$

Якщо розглядати куб з однаковою кількістю молекул в трьох напрямках (тривимірна модель) (рис.2.3), то

$$n = \frac{N^3}{L^3};$$

тоді

$$\frac{n}{n_2} = \frac{N^3}{L^3} \cdot \frac{L^2}{N^2} = \frac{N}{L}. \qquad (2.4)$$

Порівнюючи вирази (2.1) та (2.2), можна зробити висновок, що залежність λ від концентрації молекул та розмірів молекули в обох випадках (дво- і тривимірному) залишається однаковою. Звичайно, при цьому треба враховувати, що у двовимірному випадку $n_2 = N^2 / L^2$, розміри молекули характеризуються діаметром d, а в тривимірному – $n = N^3 / L^3$, розміри $\sim d^2$.

2.3 Опис комп'ютерної програми

Програма створює масиви даних: координати N^2 молекул x_i, y_i на площині xy та їх початкові складові швидкостей V_{xi}, V_{yi}. Початкові швидкості молекул задаються однаковими за величиною та рівними найбільш імовірній швидкості при даній температурі

$$V_{iм} = \sqrt{\frac{kT}{m}}, \qquad (2.5)$$

де m – маса молекули, T – абсолютна температура, k – стала Больцмана. Найбільш імовірна швидкість (2.5) для двовимірного випадку відрізняється від тривимірного випадку (Додаток В). Напрям швидкості кожної молекули визначається в межах кутів 0...2π за допомогою генератора випадкових чисел. Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 2.4.

Розподіл молекул на площині в початковий момент та під час руху відображається на екрані дисплею. Наступні координати молекул визначаються за кінематичними формулами Ейлера (додаток Б)

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + V_{ix}\Delta t, \quad y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + V_{iy}\Delta t, \qquad (2.6)$$

де $x_i(t)$, $y_i(t)$ – положення *i*-тої молекули в момент часу t, $x_i(t + \Delta t)$, $y_i(t + \Delta t)$ – положення молекули в наступний момент часу $(t + \Delta t)$. Зіткнення молекул між собою описується як нецентральний удар твердих пружних кульок. Так називають зіткнення, коли в момент удару початкові швидкості куль V_1, V_2 не співпадають за напрямком з лінією, яка з'єднує їхні центри (рис.2.5). Оскільки $V_{1t} \neq V_{2t}$, при зіткненні розвивалися б сили тертя ковзання, що приводило б кулі в обертальний рух і тоді б енергія поступального руху кульок не зберігалася б. А тому, приймаючи удар абсолютно пружним, ми

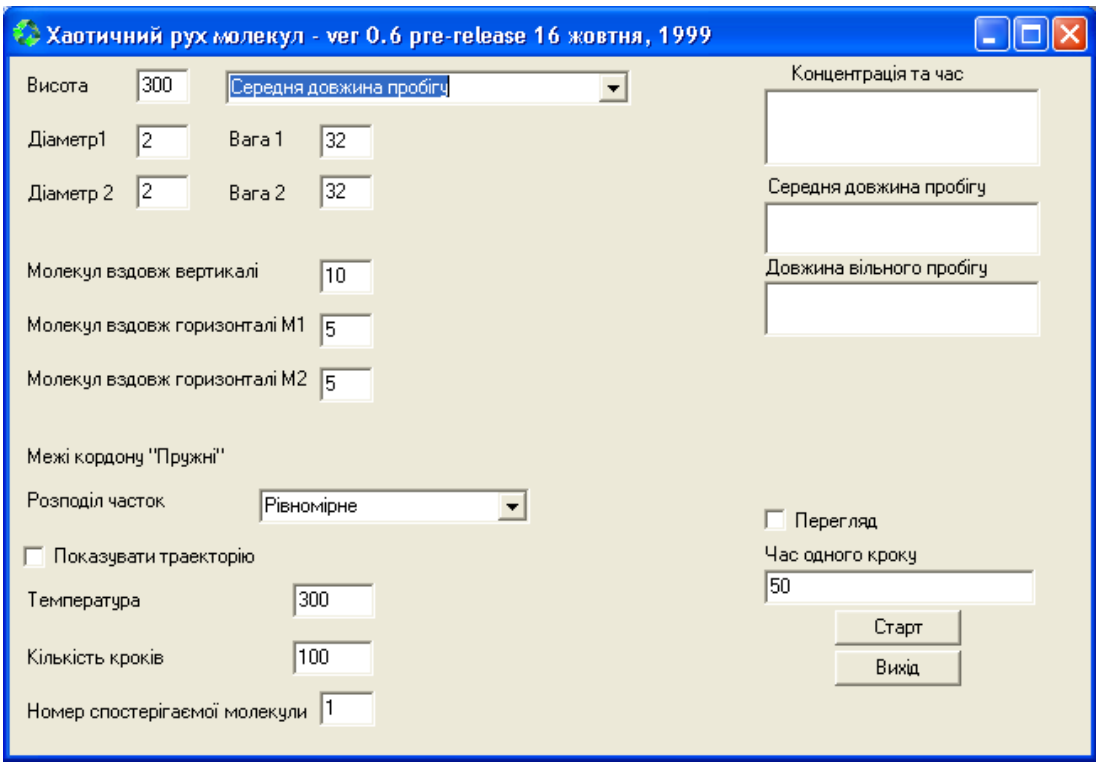


Рисунок 2.4

вважаємо кульки ідеально гладкими. При їх зіткненні тангенціальні сили не виникають, а значить, для тангенціальних швидкостей можна записати

$$V'_{1t} = V_{1t}, \quad V'_{2t} = V_{2t}, \tag{2.7}$$

де V_{1t}, V_{2t} – тангенціальні складові швидкостей до зіткнення, V'_{1t}, V'_{2t} – після зіткнення.

У випадку абсолютно пружного удару виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2, \tag{2.8}$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1V'^2_1}{2} + \frac{m_2V'^2_2}{2}, \tag{2.9}$$

де V'_1, V'_2 – швидкості кульок після удару.

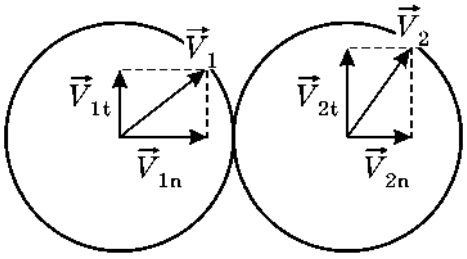


Рисунок 2.5

Для нормальних складових швидкостей після удару, маємо співвідношення:

$$V'_{1n} = -V_{1n} + 2\cdot\frac{m_1V_{1n} + m_2V_{2n}}{m_1 + m_2},$$

$$V'_{2n} = -V_{2n} + 2\cdot\frac{m_1V_{1n} + m_2V_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

2.4 Інструкція користувачу

1. Встановити режим роботи програми “Середня довжина пробігу”, виберіть “Розподіл частинок” – “рівномірний”, ввімкнути “Перегляд” та “Показувати траєкторію”.

2. Задати числові дані у відповідності з номером варіанту завдання, згідно з таблицею 2.1, де маса молекули m вибирається однаковою “Вага 1”, “Вага 2”, N – число молекул вздовж осі y (“Вздовж вертикалі”), $M = M_1 + M_2$, (M_1 – число молекул в першій половині площини, M_2 – число молекул в другій половині площини вздовж осі x – вибираються однаковими $M_1 = M_2$), d – діаметр молекули (“Діаметр 1”, “Діаметр 2” – вибираються однакові), T – температура. Задайте “Кількість кроків” – 1000.

Таблиця 2.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4
N	10	10	10	12	12	12	10	10	10	10	10	10
M_1	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5
M_2	5	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5
d	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4

3. Нажати кнопку “Старт”. Спостерігати хаотичний рух молекул та траєкторію виділеної молекули (вона виділяється синім кольором).

4. Середню довжину вільного пробігу, отриману для ваших даних, записати в таблицю 2.2. Не змінюючи вихідних даних повторити вимірювання чотири рази. Для прискорення вимірювань можна вимкнути “Перегляд” та “Показати траєкторію”.

5. Повторити п.4 ще для шести значень діаметру, збільшуючи його від початкового значення з кроком $\Delta d = 1$ (10^{-10} м). При появі помилки роботи програми зменшити кількість кроків удвічі. Програма видає значення середньої довжини пробігу молекули перераховане для трьохвимірної моделі. Результати записати до таблиці 2.2.

6. Встановити числові дані всіх величин згідно таблиці 2.1 і номеру варіанта. Провести вимірювання середньої довжину вільного пробігу 5 разів та записати результати в таблицю 2.3.

Таблиця 2.2 – Результати вимірювань та розрахунків при $n = const$

N	$n = const$									
	d, $\times 10^{-10}$ м	λ, $\times 10^{-9}$ м							$\lg\lambda$	$\lg d$
		1	2	3	4	5	$<\lambda>$	$\Delta\lambda$		
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

Таблиця 2.3 – Результати вимірювань та розрахунків при $d = const$

N	$d = const$									
	n, $\times 10^{24}$ м$^{-3}$	λ, $\times 10^{-9}$ м							$\lg\lambda$	$\lg n$
		1	2	3	4	5	$<\lambda>$	$\Delta\lambda$		
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										

7. Збільшуючи концентрацію молекул шляхом зміни чисел N та M одночасно від початкових значень з кроком $\Delta N = \Delta M = 2$, отримати значення λ для семи значень концентрації n при сталому значенні діаметра молекул d (згідно таблиці 2.1 і номеру варіанта). Записати результати в таблицю 2.3.

8. Розрахувати середнє значення величини $<\lambda>$ для кожного значення діаметру (при $n = const$) та для кожного значення концентрації (при $d = const$). Якщо якесь з п’яти значень λ суттєво відрізняється від чотирьох інших (у декілька разів), то його необхідно виключити з розрахунку середнього. Отримані результати занести до таблиць 2.2 і 2.3.

9. Розрахувати абсолютну та відносну похибки вимірювання середньої довжини вільного пробігу молекул.

10. За підрахованими значеннями логарифмів величин побудувати графіки залежностей: $\lg\lambda = f(\lg d)$ при $n = const$ та $\lg\lambda = f(\lg n)$ при $d = const$.

11. Порівняти результати, отримані з модельного експерименту, з теоретичними. З теоретичної формули (2.2), беручи десятковий логарифм, маємо для $n = const$:

$$\lg\lambda = \lg(C_1 d^{-2}) = \lg C_1 - 2\lg d,$$

де $C_1 = 1/(\pi n)$, тобто маємо лінійну залежність $\lg\lambda$ як функції від аргументу $\lg d$, коефіцієнт нахилу якої дорівнює $k_T = -2$. Якщо з експериментального графіка $\lg\lambda = f(\lg d)$ визначити коефіцієнт нахилу $k_C = \Delta\lg\lambda / \Delta\lg d$ (рис.2.6), то з порівняння k_T та k_C можна зробити висновок, як узгоджуються теоретичні результати з експериментальними (як залежить λ від d). Аналогічно перевірити, як залежить λ від n. Зробити висновки.

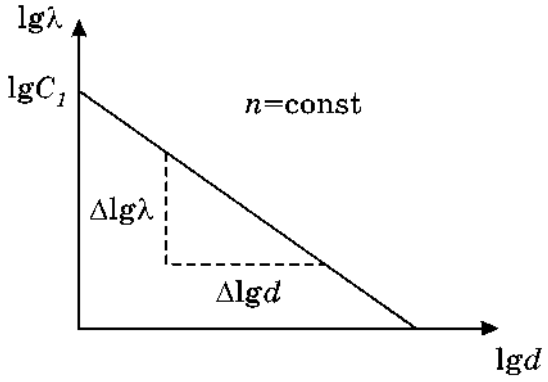


Рисунок 2.6

2.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, зведені в таблицю, похибки вимірювань, графіки залежностей $\lg\lambda = f(\lg d)$ при $n = const$ та $\lg\lambda = f(\lg n)$ при $d = const$, розрахунок коефіцієнтів k_C для обох графіків квисновки.

2.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте три основні положення МКТ.
2. Що таке довжина вільного пробігу молекули?
3. Що таке середня довжина вільного пробігу молекули?
4. Як визначається середня довжина вільного пробігу λ в двовимірній моделі хаотичного руху?
5. Як визначається λ в тривимірній моделі?
6. Як зв'язані концентрації молекул в двовимірній та тривимірній моделях?

7. Який удар тіл називається нецентральним?

8. Як записується закон збереження імпульсу при пружному ударі двох кульок?

9. Як записується закон збереження енергії при пружному ударі двох кульок?

10. За якими формулами обчислюються наступні значення координат молекули через попередні?

3 ПЕРЕВІРКА ОСНОВНОГО РІВНЯННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

3.1 Мета роботи

Ознайомитись з основними положеннями молекулярно-кінетичної теорії (МКТ). Переконатись у справедливості основного рівняння МКТ.

3.2 Вказівки з організації самостійної роботи

З точки зору МКТ внаслідок хаотичного руху молекул, газ, який знаходиться в посудині, тисне на її стінки [1, 5, 6]. Тиск обумовлений тим, що молекули стикаються зі стінками посудини і діють на неї з деякою силою, яка направлена перпендикулярно до стінки. Вивчення цього процесу базується на двовимірній моделі ідеального газу. Спрощені положення, закладені в цю модель, сформулюємо у наступному вигляді:

1.Молекули – пружні кульки малого розміру.

2.Силами взаємодії між молекулами можна знехтувати.

3. Взаємодія між молекулами виникає тільки при ударі між ними або при зіткненні молекули зі стінками посудини. Удар при зіткненнях вважаємо абсолютно пружним.

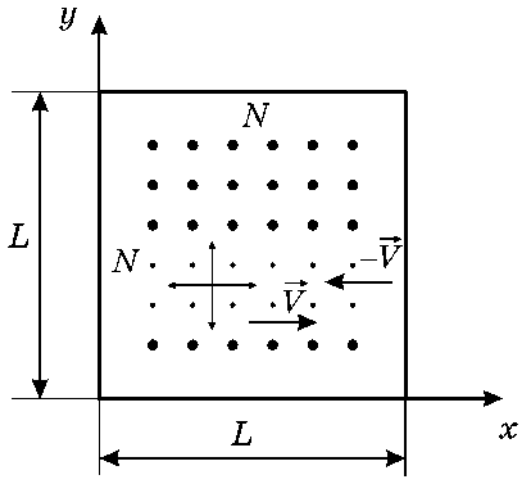


Рисунок 3.1

Виведемо рівняння для випадку двовимірного руху молекул. Нехай в квадратній “посудині” з ребром L, яка являє собою контур квадрату (рисунок 3.1) перебуває ідеальний газ, молекули якого можуть рухатися в площині x, y в межах $0 < x < L$, $0 < y < L$. Кількість молекул дорівнює N^2, де N – кількість молекул в напрямку x і в напрямку y (в межах квадрата) однакова. Тоді концентрація молекул на площині квадрата $n_2 = \frac{N^2}{L^2}$.

Припустимо, що число молекул, які рухаються в двох взаємно перпендикулярних напрямках до сторін квадрата, дорівнює $N' = \frac{1}{2} \cdot N^2$ (можливість такого припущення підтверджується строгим розрахунком).

Імпульс сили при ударі молекули об "стінку" дорівнює зміні імпульсу молекули:

$$\Delta F_i \Delta t = mV_i - (-mV_i) = 2mV_i .$$

Очевидно, що імпульс, який отримує "стінка" за 1 секунду від i-тої молекули

$$\Delta F_i \cdot 1 = 2mV_i \cdot k ,$$

де k – число ударів i-тої молекули об одну й ту ж (наприклад, праву) стінку за 1 секунду: $k = \frac{V_i}{2L}$. Тоді

$$\Delta F_i = 2mV_i \frac{V_i}{2L} = \frac{mV_i^2}{L} .$$

Враховуючи, що в одному напрямку рухається N' молекул, знайдемо сумарну силу, з якою газ діє на праву стінку

$$F = \sum_1^{N'} \Delta F_i = \sum_1^{N'} \frac{mV_i^2}{L} .$$

Розділимо та помножимо праву частину рівняння на N'

$$F = \frac{mN'}{L} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N'} V_i^2}{N'} .$$

Величина $\frac{1}{N'} \cdot \sum_{i=1}^{N'} V_i^2$ є не що інше, як квадрат середньоквадратичної швидкості $V_{кв}^2 = \frac{1}{N'} \cdot \sum_{i=1}^{N'} V_i^2$. Тоді $F = \frac{mN'V_{кв}^2}{L} = \frac{1}{2} N^2 m \frac{V_{кв}^2}{L} .$

Розділимо обидві частини останнього рівняння на L, тоді

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{mN^2}{L^2} \cdot V_{кв}^2 = \frac{1}{2} \cdot mn_2 V_{кв}^2 .$$

Очевидно, що $\frac{F}{L} = p_2$ – "тиск" газу на "стінку", тобто сила, яка діє на одиницю довжини сторони квадрата. Отже,

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot mV_{кв}^2 \cdot n_2 = n_2 W_k , \qquad (3.1)$$

де W_k – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Аналогічні міркування приводять до закону залежності тиску у трьохвимірному випадку

$$p = \frac{2}{3} \cdot nW_k . \qquad (3.2)$$

Вираз (3.2) носить назву основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу.

Порівнюючи вирази (3.1) та (3.2), можна зробити висновок, що залежність тиску від концентрації молекул та середнього значення енергії залишається однаковою як у двохвимірному, так і в трьохвимірному випадку.

Якщо врахувати, що кінетична енергія поступального руху молекули дорівнює $\frac{3}{2} \cdot kT$, тобто на одну ступінь свободи приходиться $\frac{1}{2} \cdot kT$, рівняння (3.2) можна записати у вигляді

$$p = nkT , \qquad (3.3)$$

а рівняння (3.1) теж матиме такий же точно вигляд, бо у двохвимірному випадку число ступенів свободи дорівнює двом

$$p_2 = n_2 kT .$$

3.3 Опис комп'ютерної програми

В даній роботі використовується та ж сама комп'ютерна програма, що і в роботі 4 з тією різницею, що вибирається режим роботи "Визначення тиску". Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 3.2.

3.4 Інструкція користувачу

1. Встановити режим роботи "Тиск", ввімкнути "Перегляд".
2. Встановити значення вихідних параметрів у відповідності з таблицею 3.1. Маса молекули *m* вибирається однаковою "Вага 1", "Вага 2", N – число молекул вздовж осі у ("Вздовж вертикалі"), M_1 – число молекул в першій половині площини, M_2 – число молекул в другій половині площини вздовж осі x (вибираються однаковими $M_1 = M_2$), d – діаметр молекули ("Діаметр 1", "Діаметр 2" – вибираються однакові), T – температура.

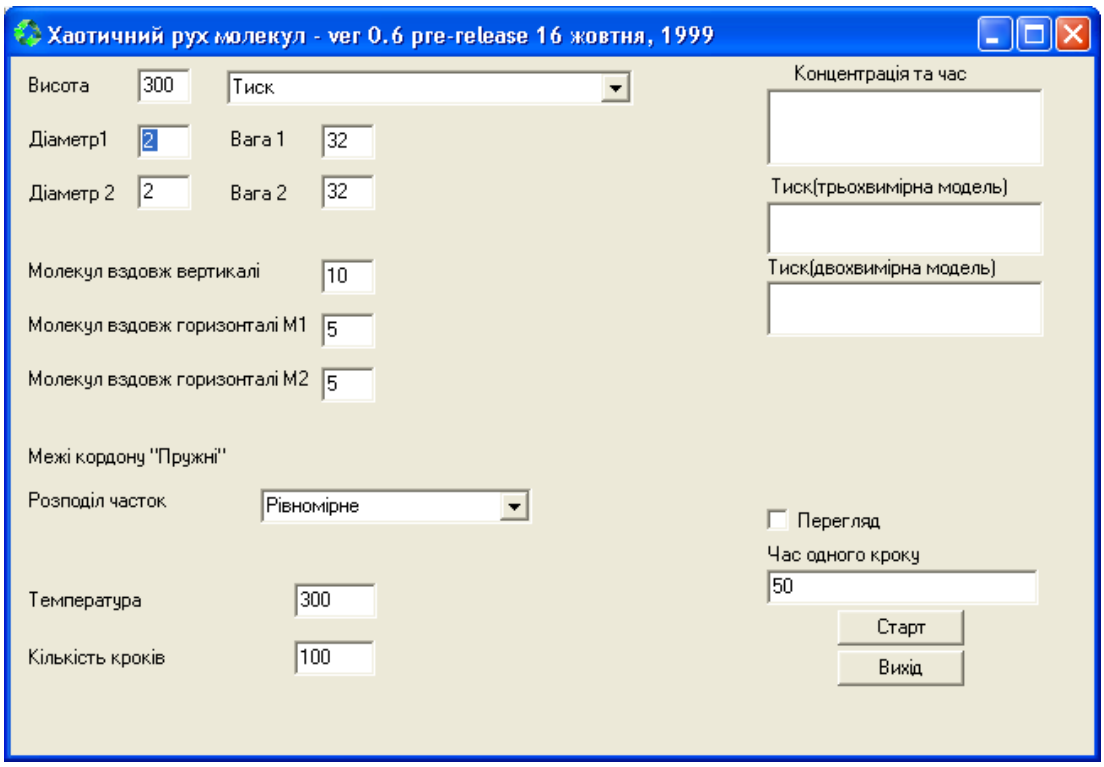


Рисунок 3.2

Таблиця 3.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m_1 = m_2$	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4
$d_1 = d_2$	2											
N	4											
$M_1 = M_2$	2											
T, К	600	500	400	300	200	100	600	500	400	300	200	100

3. Обчислити тиск (тривимірна модель) та концентрацію молекул, натиснувши кнопку “Старт”. Не змінюючи вихідних даних, повторити вимірювання чотири рази. Результати записати в таблицю 3.2.

4. Збільшуючи N, M_1 та M_2 на дві одиниці, отримати залежність тиску p від концентрації молекул n. Для кожного значення концентрації повторювати вимірювання p п’ять разів. Визначити середнє значення $< p >$. Результати для семи значень n занести в таблицю 3.2.

5. За отриманими даними пунктів 3 і 4 побудувати графік залежності тиску від концентрації молекул $< p >= f(n)$ при сталій температурі $T = const$.

6. При сталому значенні концентрації n (повернути значення N, M згідно таблиці (3.1)) виміряти сім значень p, збільшуючи температуру на 100 К. Початкове значення T взяти з таблиці 3.1. При кожному значенні T повторювати вимірювання тиску p п'ять разів. Визначити середнє значення $< p >$. Результати вимірювань занести в таблицю 3.3.

7. За отриманими даними п.6 побудувати графік залежності тиску від температури $< p >= f(T)$ при сталій концентрації молекул $n = const$.

8. Розрахувати абсолютну та відносну похибки вимірювання тиску.

Таблиця 3.2 – Результати вимірювань та розрахунків для $T = const$

N	$T = const$							
	n, $\times 10^{24}$ м$^{-3}$	p, $\times 10^3$ Па						
		1	2	3	4	5	$< p >$	Δp
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Таблиця 3.3 – Результати вимірювань та розрахунків для $n = const$

N	$n = const$							
	T, К	p, $\times 10^3$ Па						
		1	2	3	4	5	$< p >$	Δp
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

3.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, зведені в таблиці, похибки вимірювань, графіки залежностей $< p >= f(n)$ при $T = const$ та $< p >= f(T)$ при $n = const$, висновки.

3.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте основні положення моделі ідеального газу.
2. Сформулюйте основні положення МКТ.
3. Як в роботі визначається концентрація молекул на площині?
4. Який імпульс отримує стінка посудини при ударі молекули?
5. Як визначається квадрат середньоквадратичної швидкості?
6. Дайте визначення тиску (для двохвимірного простору).
7. Порівняйте вирази (5.1) та (5.2). Зробіть висновок, як залежить тиск від величини концентрації та середнього значення енергії молекули.
8. Чому дорівнює середня кінетична енергія поступального руху молекули?
9. Сформулюйте закон рівнорозподілу молекул по ступеням вільності.
10. Запишіть основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу.

4 ВИМІРЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТА В‘ЯЗКОСТІ РІДИНИ ЗА МЕТОДОМ СТОКСА

4.1 Мета роботи

Вивчити явище в'язкості на прикладі руху кульки в в‘язкій рідині, ознайомитись з особливостями цього руху та визначити в’язкість рідини за методом Стокса.

4.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Існують різні методи визначення коефіцієнта в‘язкості рідини. Один із них, метод Стокса, базується на спостереженні падіння малої кульки в досліджуваній рідині [1, 5, 6].

При русі тіла в рідині сила тертя, яка обумовлена в‘язкістю рідини, виникає не між тілом та рідиною, а між шарами рідини, бо її шар, що безпосередньо прилягає до поверхні тіла, прилипає до тіла і рухається із швидкістю тіла. Швидкість, якої набуває кожний наступний шар, тим менше, чим далі шар рідини від тіла. Таким чином, в цьому випадку ми маємо справу з так званим внутрішнім тертям.

Стокс розглядав повільний рух малої кульки в необмеженому середовищі, при відсутності завихрення рідини та вивів теоретично таку формулу для сили внутрішнього тертя:

$$F_C = 6\pi r\eta V\,, \tag{4.1}$$

де r – радіус кульки, η – коефіцієнт в‘язкості рідини, V – швидкість кульки відносно рідини.

Розглянемо падіння малої кульки в рідині (рис.4.1). В будь-який момент часу на кульку діють три сили:

1) сила тяжіння, яка спрямована вертикально вниз

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g\,, \tag{4.2}$$

де m – маса кульки, g – прискорення вільного падіння, ρ – густина речовини кульки;

2) сила, що виштовхує – сила Архімеда, яка спрямована вертикально вгору і дорівнює вазі витісненої тілом рідини [1, 5]:

$$F_A = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \delta g \,, \tag{4.3}$$

де δ – густина рідини;

3) сила внутрішнього тертя F_C, що спрямована проти напряму швидкості кульки.

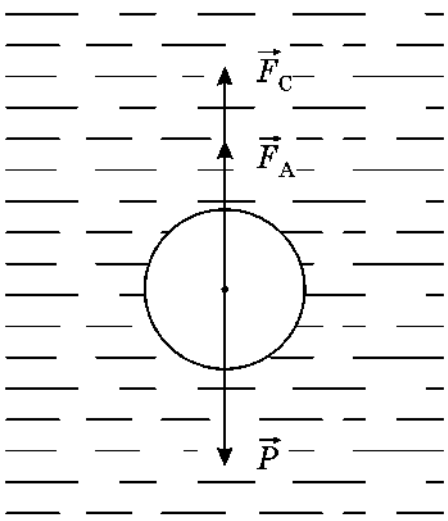


Рисунок 4.1

Рівняння руху кульки, виходячи з другого закону Ньютона, можна записати у вигляді

$$\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_C = m\vec{a} \,. \tag{4.4}$$

Сили $\vec{P}$ і $\vec{F}_A$ на протязі руху падіння кульки залишаються незмінними, а сила $\vec{F}_C$ залежить від швидкості кульки. На початку руху, коли її швидкість в початковий момент $V = 0$, ($\vec{F}_C = 0$), а в подальшому вона зростає пропорційно швидкості (4.1). Різниця $P - F_A$, яка спрямована вертикально вниз, викликає прискорення кульки.

Кулька буде рухатися прискорено доти, доки всі сили, що діють на кульку, не врівноважаться. В результаті зростання швидкості кульки наступає такий момент, коли

$$P - \mathrm{F_A} - F_C = 0 \,. \tag{4.5}$$

Підставляючи (4.1), (4.2), (4.3) до (4.5), отримаємо рівняння

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \delta g = 6\pi r \eta V \,,$$

з якого в‘язкість

$$\eta = \frac{2}{9} r^2 g (\rho - \delta) \frac{1}{V} \,. \tag{4.6}$$

Для рівномірного руху швидкість падіння кульки:

$$V = \frac{h}{t}, \tag{4.7}$$

тоді підставляючи (4.7) у (4.6) отримаємо для в’язкості:

$$\eta = \frac{2}{9} r^2 g (\rho - \delta) \frac{t}{h} \,. \tag{4.8}$$

Одновимірний рух кульки описується за наближеними кінематичними формулами за модифікованою схемою Ейлера (див. додаток Б).

4.3 Опис комп‘ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 4.2. Програма моделює одновимірний рух кульки у в‘язкій рідині за модифікованим алгоритмом Ейлера (додаток Б) з урахуванням всіх сил, які діють на кульку: сили тяжіння, сили Архімеда та сили внутрішнього тертя. Оскільки вимірювання часу треба виконувати для рівномірного руху, програмою передбачено виведення на екран риски в момент, коли всі сили, що діють на кульку, врівноважуються. З цього моменту рух кульки стає рівномірним. На екран виведено два секундоміри. Один вмикається з початком руху кульки і вимикається автоматично, коли кулька досягає дна посудини. Другий можна вмикати і вимикати від руки, клацаючи мишкою на кнопки вмикання та вимикання. Радіус, масу кульки, висоту посудини можна змінювати як завгодно, маючи тільки на увазі, що радіус кульки повинен залишатися меншим за діаметр посудини. Якщо ви виберете кульку з питомою вагою меншою за питому вагу рідини, відразу ж висвітиться віконце з зауваженням, що кулька падати не буде.

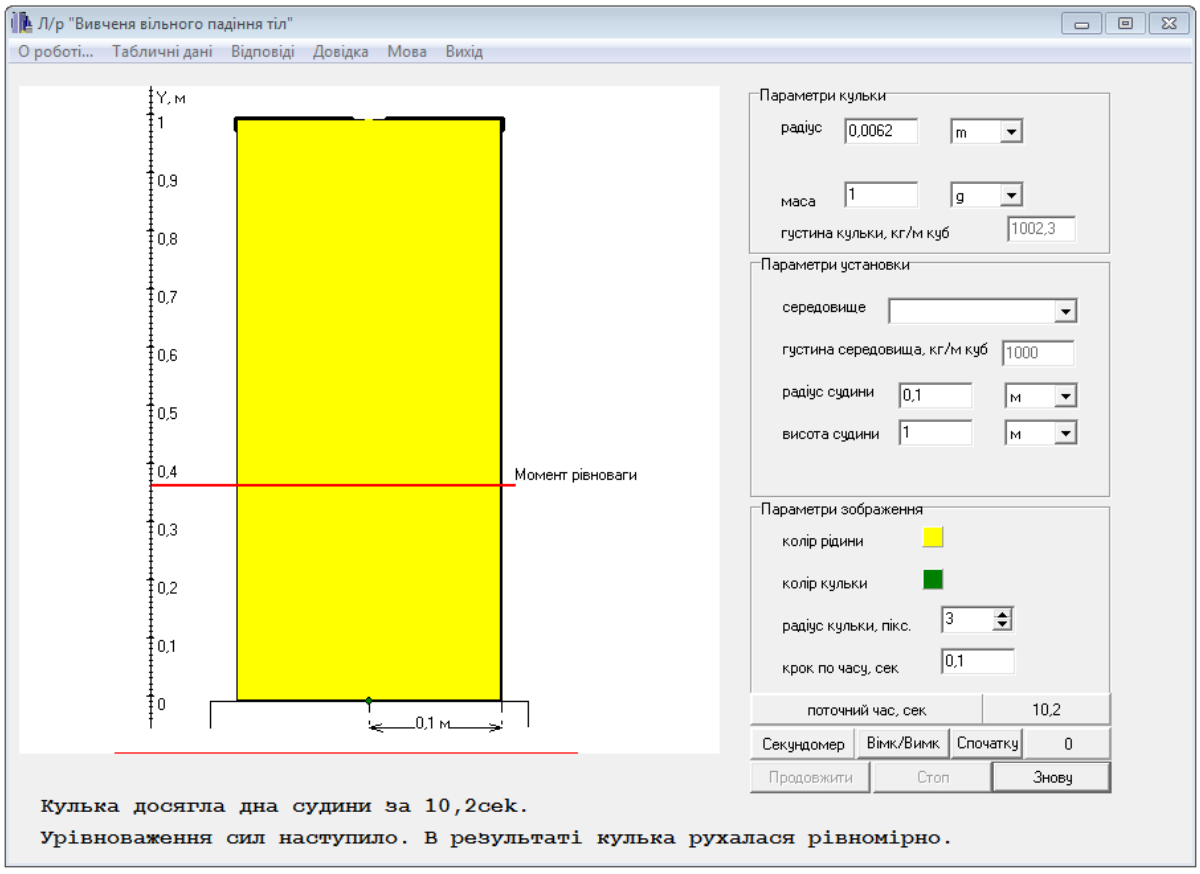


Рисунок 4.2

При малій різниці між густиною кульки та густиною рідини кулька може пройти всю відстань, так і не досягнувши стану рівномірного руху. На панелі інтерфейсу також виведені параметри зображення, які можна змінювати, такі, як колір рідини, колір кульки, радіус зображення кульки. Тертя рідини об стінки посудини, яке може виникати в реальному експерименті, коли радіус кульки та діаметр посудини – величини одного порядку, не враховується.

4.4 Інструкція користувачу

1. Ознайомитись з інтерфейсом програми. На панелі “Параметри установки, середовище” виберіть номер рідини у відповідності з вашим номером варіанту. Встановіть значення радіусу кульки R та її масу m у відповідності з таблицею 4.1 – таблицею варіантів завдань. Значення величин в віконцях можна змінювати після натискання на кнопку “Знову”. Кнопка “Стоп” зупиняє експеримент із збереженням всіх величин в даний момент часу. Натиснувши кнопкою “Запуск”, можна його продовжити або припинити, натиснувши мишкою на кнопку “Знову”.

Таблиця 4.1 – Вихідні данні

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ рідини	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4
R, мм	6,1	6,2	5,7	5,7	5,8	5,9	6,0	6,0	6,3	6,4	6,4	6,5
m, $\times 10^{-3}$ кг	1	1	1	1,1	1,1	1,2	1,3	1	1	1	1,1	1

2. Підібрати висоту падіння таку, щоб не менше половини шляху кулька рухалася із сталою швидкістю. Поставити мітку (нижче мітки, яка висвічується в момент, коли рух стає рівномірним). У випадку, коли момент рівноваги настає одразу після натискання кнопки “Старт” – збій роботи програми, потрібно швидко натиснути кнопку “Стоп”, потім повторити опит.

3. Вимірювати за шкалою та фіксувати шлях, який кулька проходить між встановленою міткою та дном посудини.

4. Визначити час проходження кулькою шляху п’ять разів. Занести дані в таблицю 4.2.

5. Обчислити значення в’язкості рідини η та занести до таблиці 4.2.

6. Обчислити похибки вимірювання t та η. За похибку вимірювання висоти Δh взяти ціну найменшої поділки шкали висоти. При обчисленні η змінними вважати величини h та t.

7. Повторити пункти 2 –6 ще двічі, збільшуючи висоту посудини кожного разу у півтора рази.

Таблиця 4.2 – Результати розрахунків

№	h, м	Час падіння, с							В’язкість, Па·с	
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$< t >$	Δt	η	$< \eta >$
1										
2										
3										

4.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати вимірювань, зведені в таблиці, обчислення похибок прямих вимірювань (часу), результати обчислення в’язкості рідини та її похибки у вигляді $\eta =< \eta > \pm \Delta \eta$, порівняння результату з табличними даними, після встановлення, яка рідина була використана в модельному експерименті, висновки.

4.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає мета роботи?
2. Що таке сила внутрішнього тертя?
3. Які сили діють на кульку при її русі в рідині?
4. Запишіть формулу для сили Стокса.
5. Запишіть формулу для сили тяжіння.
6. Запишіть формулу для сили Архімеда.
7. Запишіть рівняння руху кульки.
8. Яким буде рух кульки на початку руху? Чому?
9. Запишіть рівняння рівномірного руху кульки.

ЧАСТИНА ІІ. ЕЛЕКТРИКА

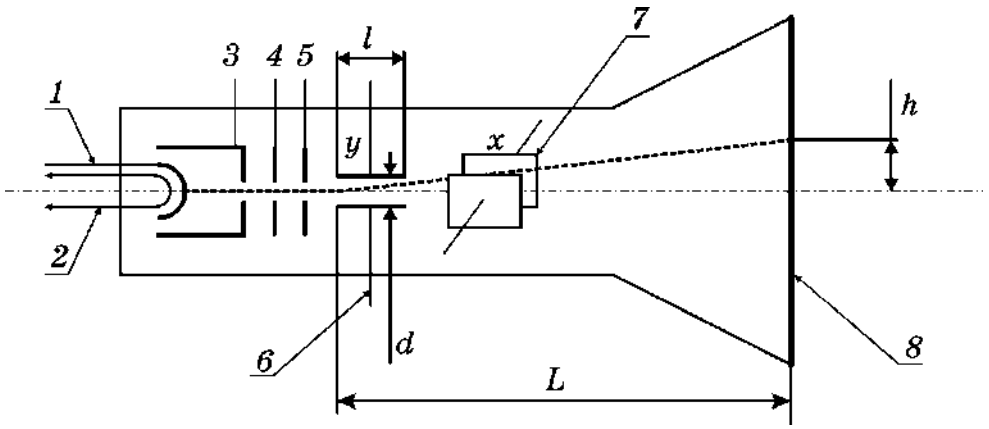
5 ОСЦИЛОГРАФУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Мета роботи

З’ясувати принцип дії електронного осцилографа, ознайомитись з застосуванням електронного осцилографа для спостереження форми сигналу, вимірювання напруги, частоти, різниці фаз, вивчити явища, що виникають при складанні взаємно перпендикулярних коливань.

5.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Принцип дії електронно-променевої трубки. Найважливішою деталлю осцилографа є електронно-променева трубка (ЕПТ). Вона складається (рис.5.1) з скляної колби, всередині якої міститься джерело електронів – катод 1, який нагрівається ниткою розжарення 2. Катод знаходиться всередині керуючого (циліндричного) електрода 3. Зміною негативного потенціалу на електроді 3 регулюється кількість електронів, які проходять через його отвір, що змінює яскравість плями на екрані 8 ЕПТ. Перший анод 4 служить для фокусування, а другий 5 для прискорення електронів. Деталі 1…5 складають електронну гармату.



1 – катод;
2 – волосок розжарення;
3 – циліндричний електрод;
4 – перший анод;
5 – другий анод;
6 – вертикально відхиляючі;
7 – горизонтально відхиляючі пластини;
8 – екран

Рисунок 5.1

Дві пари пластин 6 та 7 служать для відхилення променю: вертикально відхиляючі пластини (пластини Y) – у вертикальній площині, горизонтально відхиляючі пластини (пластини X) – у горизонтальній площині.

Якщо прикласти між катодом та другим анодом U_a (при напрузі між парами пластин $U_x = 0$, $U_y = 0$) пучок електронів буду попадати в центр екрану.

Якщо тепер подати на пластини Y напругу U_y, то між ними виникне однорідне поле напруженістю

$$E_y = \frac{U_y}{d}, \tag{5.1}$$

де d – відстань між пластинами. На кожний електрон, що рухається між пластинами, тепер буде діяти сила F_y, яка спричинятиме його прискорення у вертикальному напрямі

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{e \cdot E_y}{m} = \frac{e \cdot U_y}{md} \tag{5.2}$$

де m – маса електрона, e – його заряд.

Вертикальна складова швидкості електрона

$$V_y = a_y \Delta t_y \tag{5.3}$$

залежить від прискорення a_y та проміжку часу Δt, протягом якого електрон перебуває між пластинами. Цей проміжок часу залежить від довжини пластини l та повздовжньої швидкості електрона V_z

$$\Delta t_y = \frac{l}{V_z} \tag{5.4}$$

Підставляючи значення a_y (5.2) у вираз (5.3), а також Δt_y із співвідношення (5.4) отримаємо:

$$V_y = \frac{eU_y l}{mV_z d} \tag{5.5}$$

Від переднього краю пластин до екрану електрон проходить відстань L, яка значно більша за довжину пластин l (див.рис.5.1). В зв'язку з цим можна знехтувати зміщенням траєкторії електрона в полі пластин порівняно з відхиленням h плями на екрані трубки і записати

$$\frac{V_y}{V_z} = \frac{h}{l} \tag{5.6}$$

Підставляючи у співвідношення (5.6) значення V_y (5.5) знайдемо повздовжню складову швидкості електрона

$$V_z = \sqrt{\frac{eU_y LE}{mdh}} \tag{5.7}$$

Повздовжню складову швидкості Vz можемо визначити також із умови, що робота анодної напруги над прискоренням електрона eU_a іде на зміну кінетичної енергії електрона. Таким чином:

$$eU_a = \frac{mV_z^2}{2}, V_z = \sqrt{\frac{2eU_a}{m}} \tag{5.8}$$

Прирівнюючи (5.7) до (5.8) отримаємо, що відхилення h електрона

$$h = \frac{U_y LE}{2dUa} = U_y S \tag{5.9}$$

де S – константа для даної ЕПТ (якщо U_a – фіксована). Величина S носить назву чутливості ЕПТ:

$$S = \frac{h}{U_y} \tag{5.10}$$

Із визначення (5.10) виходить, що чутливість S ЕПТ відносно напруги кількісно дорівнює величині зміщення променю на екрані, що приходиться на один вольт напруги, прикладеної до пластин.

Принцип дії генератора розгортки. Для спостереження ходу процесів в часі (наприклад зміни напруги) на горизонтально відхиляючі пластини необхідно подавати напругу, яка лінійно зростає з часом – напругу розгортки. Якщо при цьому на y-пластини подати напругу, яка вивчається, то електронний пучок опише на екрані графік зміни напруги в часі. Для спостереження періодичних процесів необхідно, щоб напруга розгортки змінювалась періодично. Причому період розгортки T був кратний періоду сигналу T_0, тобто $T = nT_0$ (де n – ціле число).

В цьому разі електронний промінь на екрані з кожним повторенням циклу розгортки буде викреслювати одну й ту ж траєкторію.

Після проходження по горизонталі до певної точки на екрані, по горизонталі до певної точки на екрані, промінь повинен повертатись в початкове положення (обернений хід). Викладеним вимогам можна задовольнити, якщо напруга U_x розгортки буде змінюватись за законом,

зображеним на рис.5.2, де t_1 – час прямого ходу, t_2 – час оберненого ходу променю. Така напруга називається пилкоподібною.

Складання взаємно-перпендикулярних коливань. Маємо два коливання – одне вздовж осі x, друге – вздовж осі y:

$$\begin{aligned} x &= a\sin(\omega t + \varphi) \\ y &= b\cos(\omega t + \vartheta) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Виключаючи з системи рівнянь (5.11) параметр t отримаємо рівняння еліпса у вигляді:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB}\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{5.12}$$

де $\delta = \varphi - \vartheta$ - різниця фаз коливань (5.11).

Точку перетину еліпса з віссю Y можна знайти з (5.12) поклавши $x = 0$ (див.рис.5.3), тоді

$$y_0 = B\sin\delta. \tag{5.13}$$

Таким чином:

$$\delta = \arcsin\frac{y_0}{B}. \tag{5.14}$$

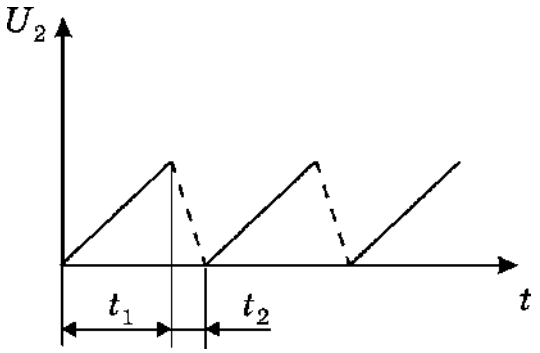


Рисунок 5.2

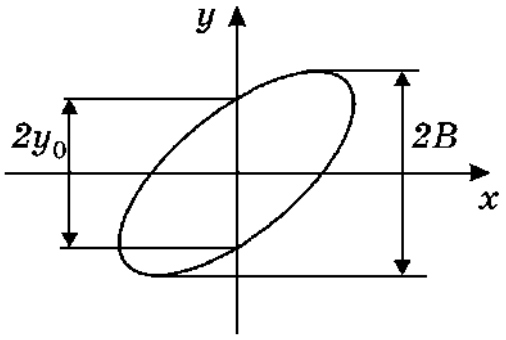


Рисунок 5.3

5.3 Опис комп’ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 5.4. Програма має два режими роботи: в першому можна вивчити призначення відхиляючих пластин ЕПТ, в другому − принцип дії генератора розгортки, та проаналізувати складання двох взаємно перпендикулярних коливань.

В першому режимі (рис.5.4) на панель інтерфейсу програми виведені вікна для завдання параметрів регулювання: напруги на відхиляючих пластинах U_y, анодної (прискорювальної) напруги U_a, відстані між пластинами d, ширини пластин l, відстаней між анодом та катодом B, пластинами та екраном L, початкової "теплової" швидкості електрона, величини яких можна змінювати в широких межах. При цьому на екрані можна спостерігати траєкторію електрона. Рух електрона в ЕПТ описується за допомогою модифікованого алгоритму Ейлера (додаток Б).

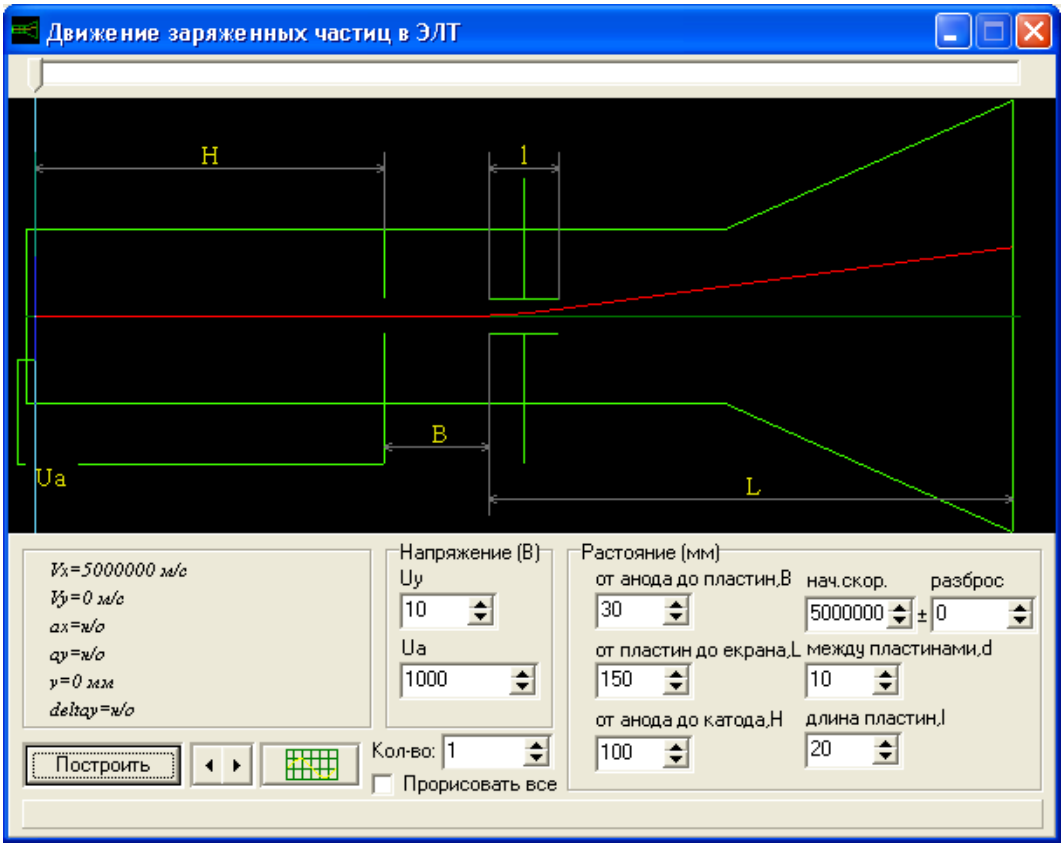


Рисунок 5.4

В другому режимі (рис.5.5) на екрані ЕПТ, який розміщується в площині екрану дисплея, можна спостерігати криві напруги, яка подається на вертикальні відхиляючі пластини при увімкненій розгортці, коли подається пилкоподібна напруга на горизонтально відхиляючі пластини. Також можливо вимкнути розгортку та на x- та y-пластини подаючи два синусоїдальних сигнали, амплітуди, частоти та початкові фази, яких можна змінювати в широких межах, спостерігаючи фігури Лісажу.

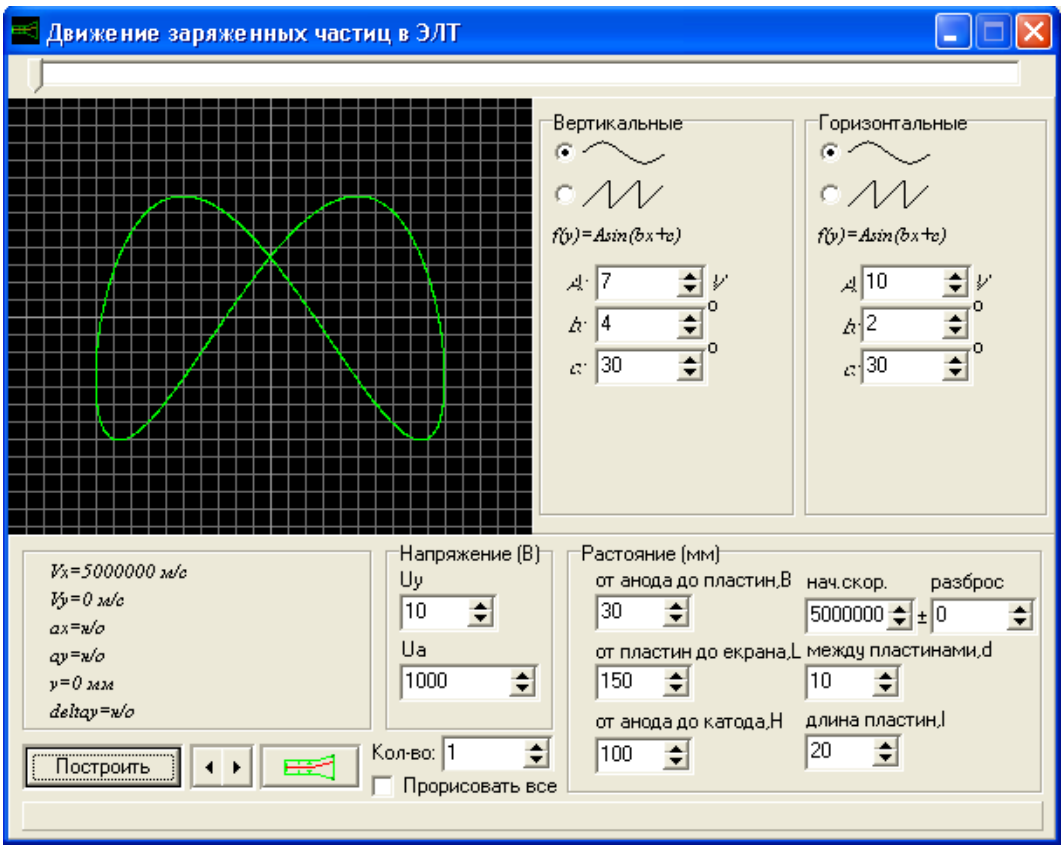


Рисунок 5.5

5.4 Інструкція користувачу

1. За допомогою кнопок на інтерфейсі встановіть значення параметрів у відповідності з табл. 5.1. Отримайте на екрані траєкторію електрона.

2. Змініть полярність U_y. Як змінилася траєкторія?

3. Задайте декілька послідовних значень напруги U_y від максимального значення $+U_y$ до мінімального значення $-U_y$. Зробіть висновок, яку лінію буде викреслювати електронний промінь на ЕПТ.

4. За даними пункту 1 обчисліть чутливість ЕПТ за формулою (5.9).

5. Змініть режим програми натиснувши кнопку за зеленим зображенням решітки (знаходиться в нижньому лівому куті екрану). Інтерфейс змінюється: з'являється екран осцилографа з масштабною решіткою, кожна поділка якої вздовж вісей x та y відповідає відстані 30 метрів. В цьому режимі можна подавати напругу на обидві пари пластин, причому U_x та U_y можуть мати або синусоїдальну або пилкоподібну напругу. Подайте синусоїдальну напругу на y-пластини, на x-пластини $U_x = 0$. Чи співпадає висновок, зроблений в пункті 3 з отриманим зображенням?

Таблиця 5.1. Вихідні дані

№	U_a, В	L, мм	U_y, B	d, мм	№	U_a, В	L, мм	U_y, B	d, мм
1	1000	140	10	10	7	1000	140	10	10
2	1000	150	10	10	8	1000	150	10	10
3	1200	160	10	10	9	1200	160	10	10
4	1200	160	12	10	10	1200	160	12	10
5	1000	150	8	10	11	1000	150	8	10
6	1000	150	12	12	12	1000	150	14	14

6. Подайте пилкоподібну напругу на x-пластини, синусоїдальну напругу – на y-пластини. Зарисуйте отримане зображення. Подайте тепер на x-пластини теж синусоїдальну напругу. Порівняйте отриману криву з зарисованою. Зробіть висновок, чому треба на x-пластини подавати пилкоподібну напругу, тобто, висловлюючись мовою математики – напругу, яка змінюється за лінійним законом. В якому з цих двох випадків можна спостерігати істинну форму сигналу, що подається на у-пластини?

7. Підберіть період синусоїди (змінюючи ω_y), так щоб на екрані було зображено 1, 2, 3 і т.д. періодів синусоїди. Яким співвідношенням пов'язаний період розгортки (пилки) з періодом синусоїди?

8. Подайте на обидві пари пластин синусоїдальну напругу однакової амплітуди: $A = B$, та однакової частоти: $\omega_x = \omega_y$. Змінюючи різницю фаз δ отримайте: пряму, еліпс, коло, пряму з протилежним нахилом. Запишіть відповідні значення різниці фаз δ. Визначте різницю фаз за формулою (5.14).

9. Повторіть операції пункту 8 для випадку, коли амплітуди A і B не дорівнюють одна одній. Якщо подати синусоїдальні напруги на обидві пари пластин, то при кратних співвідношеннях частот ω_x та ω_y ($\omega_x = n\omega_y$ або $\omega_y = n\omega_x$, n – ціле число) можна спостерігати фігури Лісажу.

10. Подайте на обидві пари пластин синусоїдальну напругу, задовольнивши умовам: $A = B$, $\delta = 30$ градусів. Зафіксуйте ω_x. Змінюючи ω_y так, щоб $\omega_x / \omega_y = 1, 2, 3, 2/3$, встановіть формулу, за якою при відомому значенні ω_x можна обчислити ω_y .

11. Повторіть пункт 10, але тепер зафіксуйте ω_y і, змінюючи відношення $\omega_y / \omega_x = 1, 2, 3, 2/3$, обчисліть ω_x .

5.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, висновки за пунктами 3, 5, 7, встановлені залежності (формули) за пунктами 8, 10, 11, загальний висновок відносно того, що можна спостерігати та вимірювати за допомогою електронного осцилографа.

5.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яке призначення, спорядження та принцип дії ЕПТ? Яке призначення катода, першого анода, другого анода, електрода?
2. Яке призначення генератора розгортки?
3. Як можна виміряти напругу за допомогою ЕПТ?
4. Що таке чутливість ЕПТ за напругою?
5. Отримайте рівняння еліпса.
6. Як можна виміряти різницю фаз між двома синусоїдальними напругами однакової частоти?

6 ВИВЧЕННЯ ГРАФІЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ ТА СИСТЕМИ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ

6.1 Мета роботи

Познайомитись із графічним зображенням електричного поля точкового заряду та системи точкових зарядів за допомогою електричних силових ліній і еквіпотенціальних ліній поля та дослідити особливості їх побудови.

6.2. Вказівки до організації самостійної роботи.

Точковим зарядом можна вважати заряджену матеріальну точку. Кожен заряд створює у навколишньому просторі електричне поле.

Силовою характеристикою електричного поля є вектор напруженості E. Вектор напруженості електростатичного поля точкового заряду q в системі відліку цього заряду в вакуумі визначається за законом Кулона:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \tag{6.1}$$

де ε_0 – електрична стала, r – відстань між зарядом та точкою спостереження, q_0 – пробний заряд.

За пропозицією Майкла Фарадея поле будь-якого електричного заряду або системи зарядів можна проілюструвати графічним способом за допомогою напрямлених ліній напруженості, які називають лініями вектору $\vec{E}$ або силовими лініями електростатичного поля. Силовою можна вважати напрямлену лінію, в кожній точці якої вектор напруженості буде спрямований за дотичною. Лінії напруженості проводять з такою густиною, щоб кількість Φ_0 ліній однорідного поля, що пронизують одиницю плоскої поверхні S_0 перпендикулярно до її площини, дорівнювала числовому значенню вектору E.

$$\Phi_0 = ES_0 \tag{6.2}$$

Для поля точкового заряду q силові лінії являють собою сукупність напрямлених радіальних прямих, які виходять із позитивного заряду або збігаються до негативного заряду. Загальну кількість силових ліній (з урахуванням її напрямів «+», «–»), які перетинають довільну поверхню S називають потоком Φ вектору напруженості крізь цю поверхню.

Кількість силових ліній Φ, що перетинають сферичну поверхню будь якого радіусу r з центром на точковому заряді, поділена на площу поверхні $S = 4\pi r^2$ дає густину потоку однакову для усієї поверхні даної сфери.

$$\frac{\Phi}{S} = \left|\vec{E}\right| = const \tag{6.3}$$

Теорема Гауса свідчить, що результуючий потік ліній вектору $\vec{E}$ через будь яку замкнену поверхню в вакуумі дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які охоплені поверхнею, поділеній на ε_0

$$\Phi_s = \frac{\Sigma_i^n q_i}{\varepsilon_0} \tag{6.4}$$

Цей результат не залежить від геометрії замкненої поверхні і розташування охоплених окремих зарядів.

Плоский екран комп'ютера і площина рисунка примушують підключати уяву при переході від тривимірних замкнених поверхонь до їх двовимірних аналогів у вигляді замкнених контурів, які визначають проекції ліній перетину об'ємної фігури площиною екрана або аркушу паперу. Важливо, щоб проекції усіх зарядів потрапили в межі контурів. Проекції просторових силових ліній точкового заряду легко замінюють на проекції ліній перпендикулярного перерізу зарядженої тонкої нитки з напруженістю:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{6.5}$$

де τ – лінійна густина зарядів на нитці. Для контуру у вигляді коаксіального кола радіусу r і довжиною $l = 2\pi r$ повний потік через лінію контуру має вигляд:

$$\Phi = El = \frac{\tau}{\varepsilon_0} \tag{6.6}$$

Формула має бути двовимірним аналогом теореми Гауса, у якому величина τ має зміст алгебраїчної суми зарядів, що охоплені контуром.

Енергетичною характеристикою електричного поля є потенціал φ, який для точкового заряду вимірюється роботою зовнішньої сили по переміщенню в електростатичному полі такого позитивного заряду q іншого позитивного пробного заряду $q_0 = 1$ Кл з великої відстані у точку на відстані r від першого:

$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{6.7}$$

Лінії, які відповідають геометричному місцю точок з однаковими значеннями $\varphi = const$, називають еквіпотенціальними. Для поля точкового заряду вони мають вигляд кола з центром на заряді, тому радіальні силові лінії перетинають їх під прямим кутом. Таку загальну властивість підтверджує формула зв'язку вектору напруженості і потенціалу:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi \qquad (6.8)$$

Таку властивість можна використати, коли при наявності мапи з визначеними електричними зарядами та картиною розташування їх силових ліній, ставиться задача визначити хід еквіпотенціальних ліній. Розв'язання задачі починається з визначення початкової точки покрокового складання еквіпотенціальної лінії. Її вибирають посередині між двома силовими лініями і від неї малюють відрізок прямої перпендикулярної до силової лінії, який закінчується посередині наступного проміжку між силовими лініями. Ломана еквіпотенціальна лінія може бути замкненою або незамкненою в межах екрана.

6.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 6.1. Програма будує силові лінії електричного поля у двовимірному випадку за алгоритмом:

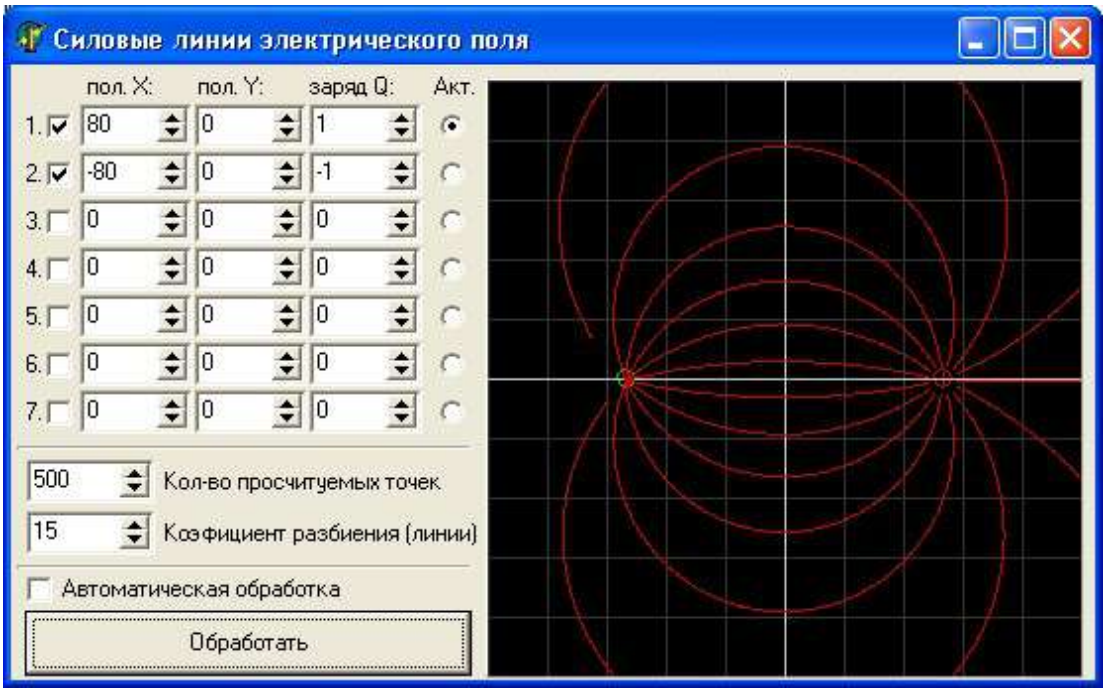


Рисунок 6.1

1. Вибирається точка з координатами (x, y) і обчислюються компоненти поля E_x і E_y

2. Проводиться в цій точці невеликий прямолінійний відрізок ΔS у напрямку вектору $\vec{E}$.

3. Процедура повторюється з нової точки $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Процес продовжується доти, доки силова лінія не йде в нескінченість, або до будь-якого негативного заряду. Число силових ліній, які починаються біля кожного позитивного заряду, пропорційне величині заряду. Величина заряду вибирається в умовних одиницях.

6.4 Інструкція користувачу

1. Помістіть в точку з координатами $x = 0$, $y = 0$ точковий заряд q (величину q взяти з таблиці 6.1). Виберіть число ліній $N = 10$, число кроків (яке визначає довжину силових ліній на екрані) підберіть так, щоб вони охоплювали весь екран. Зарисуйте картину поля.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q	1	2	1	2	3	4	2	3	4	1	5	5
N	8	8	10	10	6	6	6	8	4	12	6	8

2. Збільшіть заряд удвічі. В скільки разів треба збільшити число N, щоб за графічним зображенням поля можна було визначити величину напруженості?

3. Виберіть на картині поля замкнену лінію довільної форми. Підрахуйте число ліній $-N_1$, які входять в площину, охоплену лінією (потік, який входить), число ліній, які виходять назовні $+N_2$ (потік, що виходить). Чому дорівнює потік, який перетинає замкнену лінію?

4. Розмістіть два однакових заряди на відстані 2-х клітинок (величину q взяти з таблиці 6.1). Отримайте для них картину силових ліній, зарисуйте її.

5. Отримайте картину силових ліній для системи двох однакових зарядів протилежного знаку. Зарисуйте її.

6. Помістіть заряд величиною $Q = 50...100$ умовних одиниць в точку з координатами $x = 0$, $y = 0$. Внесіть в поле цього заряду невеликий пробний заряд q (згідно з таблицею 6.1). Змінюючи його положення відносно Q, зробіть висновок, наскільки сильно він спотворює картину поля. Повторіть операції для негативного заряду $-q$.

7. Розмістіть у вершинах квадрата заряди однакової величини за схемою (рис.6.2) – така система носить назву – квадруполь. Отримайте картину силових ліній та зарисуйте її. Визначте особливості симетрії, які має картина поля квадруполя.

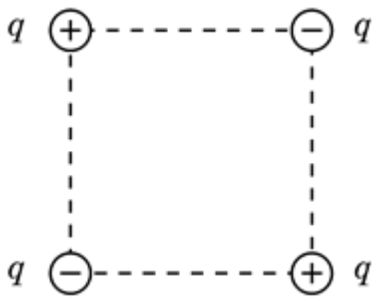


Рисунок 6.2

8. З системи квадруполя зі сторонами 4х4 поділків приберіть один негативний заряд. Для трьох, що залишилися, вставте і запишіть величини:

а) заряди у межах 3…6 одиниць:

б) коефіцієнт розбивання ліній у межах 4…7;

в) кількість прорахованих точок дорівнює 400.

Зафіксуйте картину поля силових ліній за допомогою процедури “Printscreen”. На картині ліній виберіть три точки у якості початкових і намалюйте від руки 3 еквіпотенціальні лінії, як визначено вище.

9. Поміняйте місцями негативний заряд та один позитивний. Повторіть знову весь процес за пунктом 8 і отримайте другу картину ліній.

6.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, якісні зарисовки картин поля, утворених одним, двома точковими зарядами, диполем, квадруполем (пункти 1, 4, 5, 7), у пунктах 8, 9 представити дві картини силових ліній з нанесеними еквіпотенціальними лініями (пункти 8, 9), висновки за пунктами 3, 6, 7, 8, 9.

6.6 Контрольні запитання і завдання

1. Дайте визначення силової лінії поля.
2. Що характерно для силових ліній електростатичного поля ?
3. Нарисуйте лінії електричного поля для точкового позитивного, негативного заряду.

4. Запишіть формулу, яка визначає напруженість точкового заряду.

5. Як пов’язаний потік вектора $\vec{E}$ з повним числом силових ліній, що виходять зі заряду (або входять у заряд)?

6. Сформулюйте теорему Гауса. Що таке диполь?

7. Яку систему зарядів називають квадруполем?

8. Який зміст має формула зв’язку напруженості і потенціалу?

9. Який вигляд має оператор Гамільтона?

10. Сформулюйте принцип суперпозиції для вектору напруженості і потенціалу?

7 ВИМІРЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ОПОРУ ПРОВОДНИКІВ ЗА МЕТОДОМ МОСТА УІТСТОНА

7.1 Мета роботи

Навчитись використовувати правила Кірхгофа для розгалужених кіл, вивчити метод вимірювання опору провідників за мостовою схемою та визначити опір провідників зазначеним методом .

7.2 Вказівки до організації самостійної роботи

Одним з найбільш точних методів вимірювання електричного опору є метод моста Уітстона. Міст Уітстона зображено на рис 7.1.

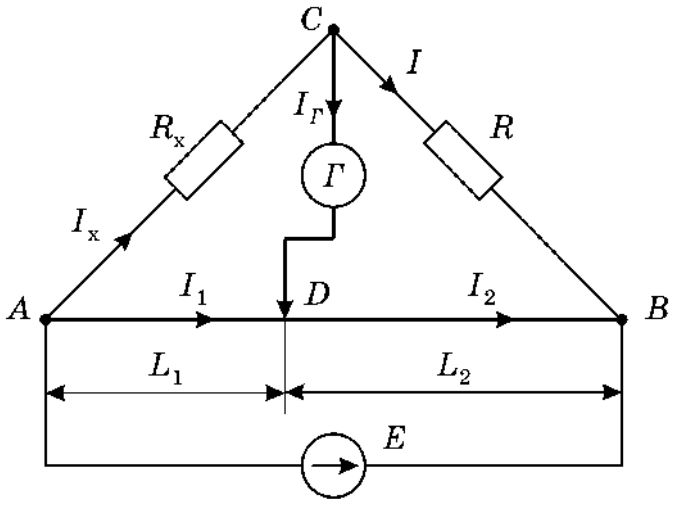


Рисунок 7.1

За звичай між точками A та B вмикають калібрований дріт – реохорд із ковзним контактом D; U – постійна напруга від джерела струму (E); R – відомий еталонний опір; R_x – невідомий опір; $Г$ – гальванометр; L_1 і L_2 – “плечі реохорда”.

Метод вимірювання опору за допомогою моста Уітстона базується на порівнянні невідомого опіру R_x з відомим еталонним опором R [10].

Нехай струм в плечах моста та в діагоналі CD тече так, як показано на рис.7.1.

Напрям обходу контурів виберемо за годинниковою стрілкою. Згідно з першим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів у вузлі (нагадаємо, що вузол – це точка, де сходиться не менше трьох провідників) дорівнює нулю [2, 5, 6]. Тоді для вузла C маємо:

$$I_x - I - I_Г = 0\,. \qquad (7.1)$$

Оскільки I_x входить в вузол, беремо його з плюсом, I, $I_Г$ виходять із вузла – беремо їх з мінусом.

Для вузла D:

$$I_1 - I_2 + I_Г = 0. \qquad (7.2)$$

Згідно з другим правилом Кірхгофа алгебраїчна сума падінь напруги на елементах замкненого контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють у контурі [2, 7]. Причому, якщо напрям струму в елементі співпадає з напрямком контуру, то відповідне падіння напруги входить в рівняння з плюсом, якщо не співпадає – з мінусом. Якщо напрям дії ЕРС співпадає з напрямком обходу, то ЕРС береться з плюсом, не співпадає – з мінусом. Виходячи із сформульованих правил отримуємо ще три рівняння:

$$\begin{aligned} &\text{для контуру } ACDA: && I_x R_x + I_Г R_Г - I_1 R_1 = 0; \\ &\text{для контуру } ABEA: && I_1 R_1 + I_2 R_2 = U; \\ &\text{для контуру } CBDC: && IR - I_2 R_2 - I_Г R_Г = 0; \end{aligned} \qquad (7.3)$$

де $R_Г$ – внутрішній опір гальванометра; R_1 , R_2 – опір плечей реохорда L_1 та L_2.

Всього маємо в схемі п’ять віток, п’ять струмів – п’ять невідомих і відповідно п’ять рівнянь для їх визначення.

Змінюючи положення контакту D (тим самим змінюючи співвідношення між L_1 та L_1), можна досягти того, щоб потенціал точки D став рівним потенціалу точки C ($\varphi_D = \varphi_C$). В цьому випадку струм через гальванометр дорівнює нулю, міст збалансовано. Враховуючи, що $I_Г$=0, систему із (7.1)...(7.3) можна спростити:

$$I_x = I,\ I_1 = I_2,\ I_x R_x = I_1 R_1,\ IR = I_2 R_2. \qquad (7.4)$$

Поділивши останні два рівняння почленно одне на друге, маємо:

$$\frac{I_x R_x}{IR} = \frac{I_1 R_1}{I_2 R_2}. \qquad (7.5)$$

Враховуючи перші два рівняння (7.4) , вираз (7.5) можна спростити:

$$\frac{R_x}{R} = \frac{R_1}{R_2}. \qquad (7.6)$$

Опір плечей L_1 та L_2 реохорду можна визначити за формулами:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{L_1}{S},\ R_2 = \rho \cdot \frac{L_2}{S}, \qquad (7.7)$$

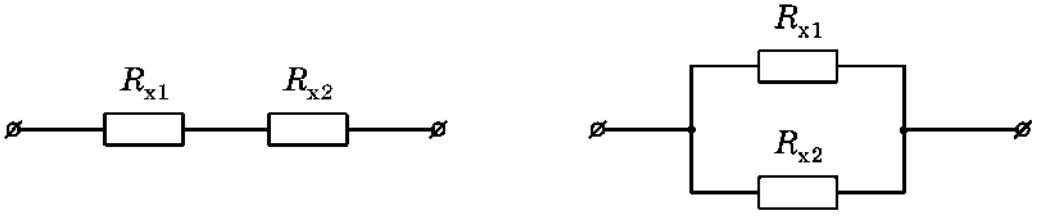
де ρ – питомий опір дроту реохорда, S – площа поперечного перерізу дроту.

Підставивши значення R_1 і R_2 (7.7) в співвідношення (7.6) отримаємо формулу для обчислення невідомого опору R_x.

$$R_x = R \cdot \frac{L_1}{L_2}. \tag{7.8}$$

Таким чином, підбираючи відповідно співвідношення між плечима L_1 та L_2 (щоб $I_Г = 0$), знаючи еталонний опір R, можна визначити R_x.

В роботі визначається (вимірюється) опір для випадку, коли R_x являє собою два або три опори R_{x1}, R_{x2}, R_{x3} з'єднані послідовно та паралельно. Схеми послідовного та паралельного з'єднання двох опорів приведені на рис.7.2.



а) б)

Рисунок 7.2

Для послідовного з'єднання загальний опір визначається за формулою

$$R_{послід.} = \sum_{i=1}^{n} R_i \ . \tag{7.9}$$

Для паралельного з'єднання загальний опір визначається за формулою

$$\frac{1}{R_{парал.}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \tag{7.10}$$

7.3 Опис комп'ютерної програми

Алгоритм обчислень базується на розв'язку системи лінійних рівнянь, складених за правилами Кірхгофа (7.1)…(7.3). Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 7.3.

Програма дозволяє проводити вимірювання опорів, що представлені на панелі інтерфейсу у кількості 12 штук, а також їх різноманітних паралельних і послідовних з'єднань.

Для виконування вимірювання досліджуваний опір пересувається за допомогою лівої клавіші миші у будь-яке вільне поле білого кольору вікна

програми. Далі за допомогою движка реохорда (виглядає як горизонтальна лінія білого кольору з кружечком-движком) наводячи на нього курсор, переміщуємо движок вліво-вправо, добиваючись нульового положення стрілки гальванометра – балансування моста. Значення лівого плеча реохорду L_1 висвічується під ним, значення правого L_2 – розраховується як різниця між всією довжиною реохорду (30 см) і значенням лівого плеча L_1.

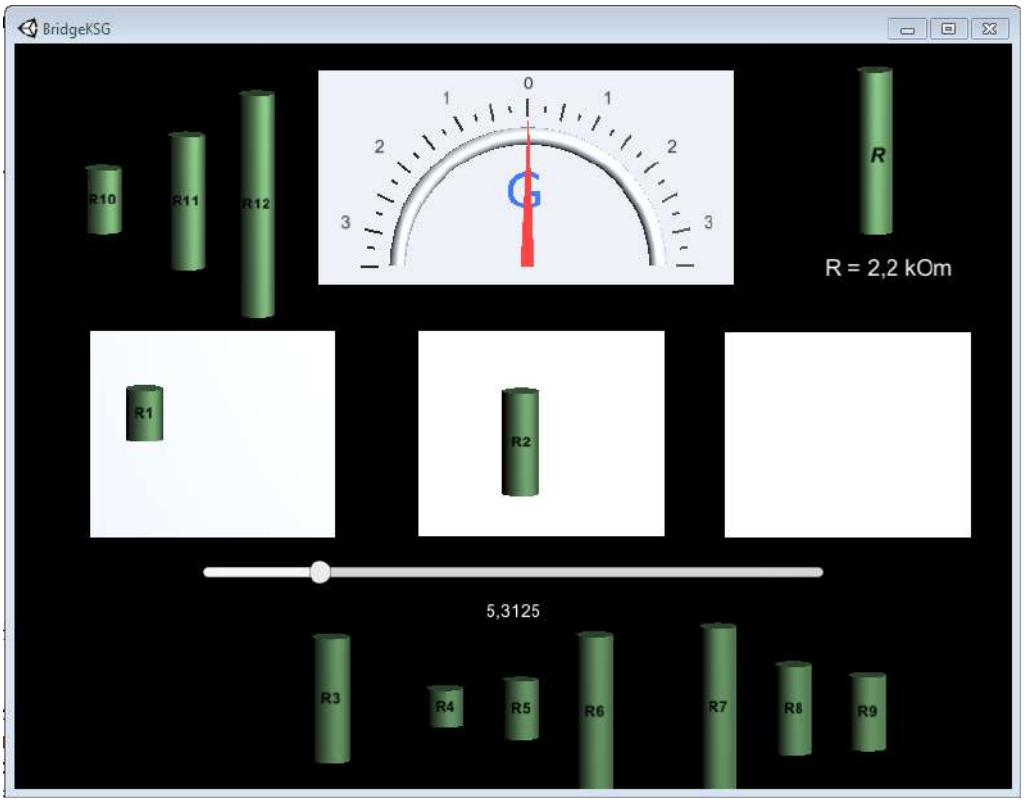


Рисунок 7.3

За допомогою програми можна виміряти опір всіх послідовно з'єднаних опорів, а також трьох (три поля білого кольору на панелі інтерфейсу програми) паралельно з'єднаних опорів або їх комбінацій

7.4 Інструкція користувачу

Для виконання лабораторного завдання використовується три опори для знаходження їх значень, а також значень опорів при їх послідовних та паралельних з'єднань. Відповідність номерів опорів номеру варіанта наведено у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_{x1}	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12
R_{x2}	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R1	R2	R3
R_{x3}	R7	R8	R9	R10	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8

1. Підключити опір R_{x1} до схеми моста, пересунувши його за допомогою лівої клавіші миші опір у ліве вільне поле білого кольору вікна програми.

2. Переміщуючи повзунок реохорда, встановити силу струму, що дорівнює нулю. Занести значення лівого плеча L_1 в таблицю 7.2.

3. Розрахувати значення L_2 як різницю між всією довжиною реохорду (30 см) і значенням лівого плеча L_1, занести його у таблицю 7.2.

Таблиця 7.2 – Результати вимірювань і розрахунків

Опір / з'єднання опорів	L_1, $\times 10^{-2}$ м	L_2, $\times 10^{-2}$ м	R, Ом	Перевірка R, Ом	Похибка ΔR_x, Ом
R_{x1}				–	
R_{x2}				–	
R_{x3}				–	
$R_{x1} + R_{x2}$					–
$R_{x1} + R_{x2} + R_{x3}$					–
$R_{x1} \square R_{x2}$					–
$R_{x1} \square R_{x2} \square R_{x3}$					–

4. За формулою (7.8) обчислити R_{x1}. Занести результат до таблиці 7.2.

5. Відключити R_{x1}, пересунувши його за допомогою лівої клавіші миші опір у будь-яке місце вікна програми чорного кольору.

6. Виконати пункти 1 – 5 для опорів R_{x2} і R_{x3}.

7. Виконати пункти 1 – 5 для послідовних з'єднань всіх опорів свого варіанту згідно з таблицею 7.1. Для послідовного з'єднання необхідно зазначені опори пересунути у одне вільне поле білого кольору вікна програми.

8. Виконати пункти 1 – 5 для паралельних з'єднань всіх опорів свого варіанту згідно з таблицею 7.1. Для паралельного з'єднання необхідно зазначені опори пересунути у різні вільні поля білого кольору вікна програми.

9. Знаючи опори резисторів R_{x1}, R_{x2} і R_{x3} визначити за теоретичними формулами опори при їх послідовному (7.9) і паралельному (7.10) вмиканнях. Результати занести до таблиці 7.2.

10. Знайти похибки вимірювань R_{x1}, R_{x2} і R_{x3}, враховуючи, що $\Delta R = \pm 50$ Ом, $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \pm 1{,}0$ мм.

7.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, таблицю результатів вимірювань та розрахунки R_x, розрахунок похибок за загальним правилом обчислень похибок для непрямих вимірювань, висновки.

7.6 Контрольні запитання і завдання

1. Сформулювати та записати закон Ома для однорідної ділянки ланцюга.
2. Сформулювати та записати закон Ома для неоднорідної ділянки ланцюга.
3. Сформулювати та записати закон Ома для замкнутого кола.
4. Що таке вузол в розгалуженому електричному колі?
5. Що таке гілка в розгалуженому електричному колі?
6. Сформулювати та записати перше правило Кірхгофа.
7. Сформулювати та записати друге правило Кірхгофа.
8. Використовуючи правила Кірхгофа, вивести формулу невідомого опору для електричного кола в лабораторній роботі.
9. Від чого залежить опір провідників? Записати формулу.
10. Як визначається опір при послідовному та паралельному з'єднанні резисторів? Вивести відповідні формули.
11. При якому відношенні плечей L_1 / L_2 похибка вимірювання R_x буде мінімальною?
12. В чому полягає умова балансування моста?
13. Які переваги має мостовий метод визначення опорів у порівнянні з використанням для цього амперметра та вольтметра?

ЧАСТИНА ІІІ. МАГНЕТИЗМ

8 ВИВЧЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ КРУГОВОГО ВИТКА ТА СОЛЕНОЇДА

8.1 Мета роботи

Ознайомитись із законом Біо-Савара-Лапласа, дослідити магнітне поле контуру зі струмом та системи співвісних контурів, що утворюють котушку з струмом, базуючись на законі Біо-Савара-Лапласа.

8.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Магнітне поле $\Delta\vec{B}$ елемента струму ($I\Delta\vec{L}$) визначається за законом Біо-Савара-Лапласа [2, 6]:

$$\Delta\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{(\Delta\vec{L} \times \vec{r})}{\left|\vec{r}\right|^3}, \tag{8.1}$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Тл \cdot м}{А}$ магнітна стала, I – величина постійного електричного струму, $\vec{r}$ – радіус-вектор, який характеризує положення точки, в якій створюється величина індукції ΔB по відношенню до елемента $(I\Delta\vec{L})$.

Закон Біо-Савара-Лапласа має загальний характер і в принципі може бути використаний для визначення магнітного поля, яке створюється провідником із струмом будь-якої форми. Зрозуміло, що ніяких ізольованих ділянок струму не буває і провідник повинен утворювати замкнене коло. Однак ми можемо наближено уявити безперервний провідник у вигляді ряду дискретних ділянок. Тоді вектор індукції $\vec{B}$ в будь-якій точці простору можна визначити за допомогою принципу суперпозиції. Для нашого випадку конечних елементів струму

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{B}_i, \tag{8.2}$$

де m − число елементів, на які розбивається контур. В скалярному вигляді

$$B_x = \sum_{i=1}^{m} \Delta B_{xi}, B_y = \sum_{i=1}^{m} \Delta B_{yi}, B_z = \sum_{i=1}^{m} \Delta B_{zi}. \tag{8.3}$$

Внесок кожної з ділянок довжиною ΔL, розташованої в точці $\vec{r}_i$, в магнітне поле в точці $\vec{r}$ (рис.8.1) визначається за формулами (в проекціях)

$$\Delta B_x(\vec{r}) = A \cdot \frac{[\Delta L_y(z - z_i) - \Delta L_z(y - y_i)]}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3},$$

$$\Delta B_y(\vec{r}) = A \cdot \frac{[\Delta L_z(x - x_i) - \Delta L_x(z - z_i)]}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}, \qquad (8.4)$$

$$\Delta B_z(\vec{r}) = A \cdot \frac{[\Delta L_x(y - y_i) - \Delta L_y(x - x_i)]}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3},$$

де

$$\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3 = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

Для магнітного поля на осі, що проходить через центр системи витків можна отримати аналітичний вираз де кути θ_1 та θ_2 показані на рис.8.2,

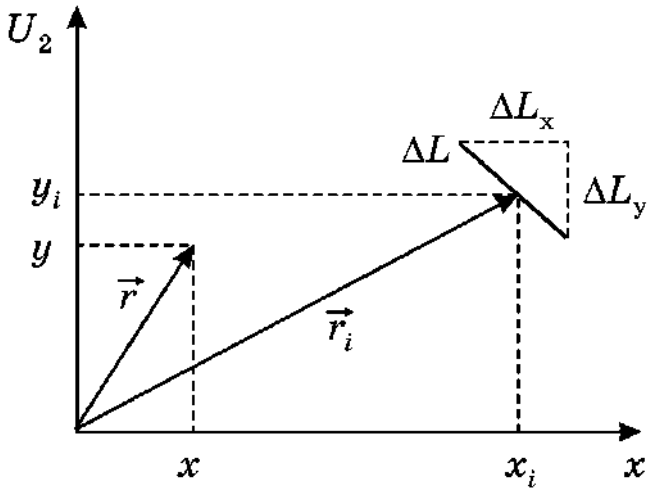


Рисунок 8.1

на якому схематично зображена котушка із струмом, B_0 – індукція всередині довгого соленоїда

$$B = \frac{1}{2} \cdot B_0(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \qquad (8.5)$$

$$B_0 = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I\,.$$

де кути θ_1 та θ_2 показані на рис.8.2, на якому схематично зображена котушка із струмом, B_0 – індукція всередині довгого соленоїда

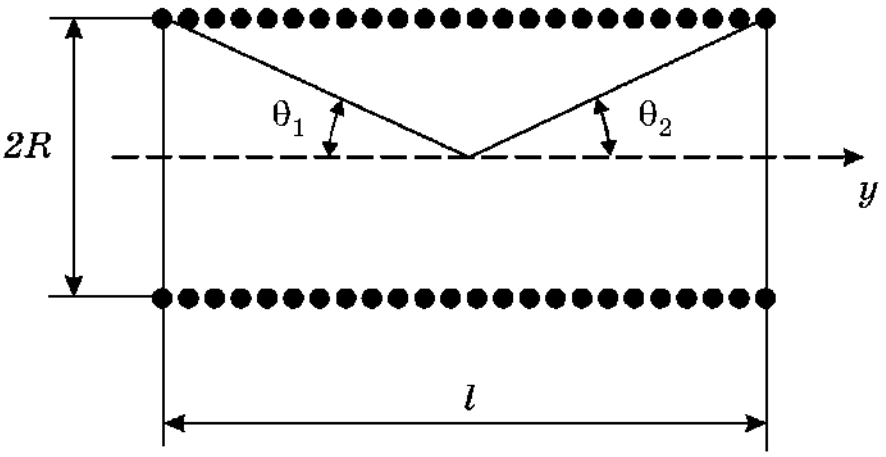


Рисунок 8.2

8.3 Опис комп’ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 8.3. Програма обчислює та рисує силові лінії магнітного поля кругового витка із струмом, який лежить в площині XZ, та системи N співвісних витків (див. рис.8.2).

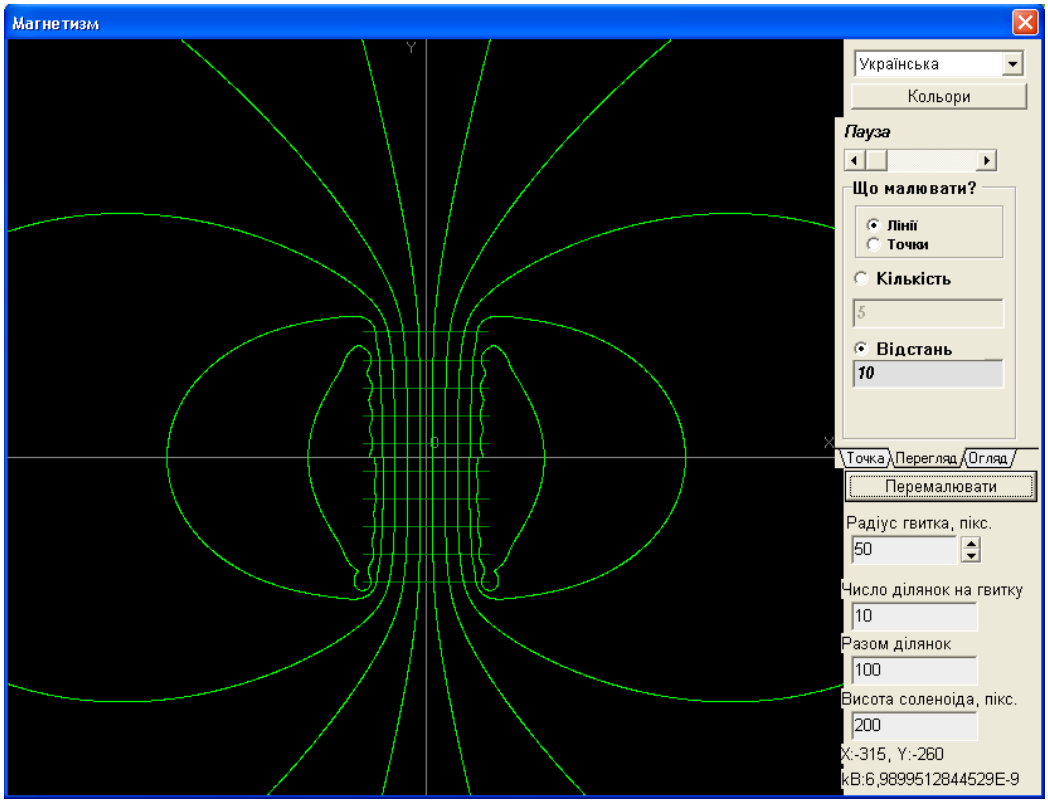


Рисунок 8.3

Оскільки система має вісь симетрії, досить представити силові лінії в одній площині, яка проходить скрізь неї. Цією площиною є площина XY, вона виступає в ролі екрана. Обчислення виконуються за формулами (8.3), (8.4). Інтерфейс програми має основну та дві допоміжні панелі. На основній панелі виводяться вікна з параметрами котушки: це радіус витка, висота соленоїда, число елементів, на які розбивається виток при обчисленні індукції та загальне число елементів котушки. На одній з допоміжних панелей можна вибрати координати точки, з якої програма починає викреслювати силові лінії. За допомогою другої панелі можна визначити під яким кутом малювати силові лінії у трьохвимірному просторі. Програма обчислює значення індукції в будь-якій точці. Підводячи курсор в будь-яку точку можна "виміряти" індукцію B та координати точки, числові значення яких знаходяться у правому нижньому куту вікна програми . Програма дозволяє також регулювати швидкість викреслювання силових ліній та їх густину. Розміри на екрані дисплею вимірюються в пікселях.

8.4. Інструкція користувачу

1. Створити один виток із струмом. Для цього вибрати однакове число "ділянок на витку" та "разом ділянок". "Відстань" між лініями, яка регулює густину ліній встановіть рівною 20 пікселям. Отримати картину силових ліній для магнітного поля одного витка. Зарисувати її. Зазначити на рисунку координати центра витка та значення індукції B_0.

2. Збільшуючи число "ділянок на витку" в два, три і т.д. разів (величину "разом ділянок" теж треба збільшувати в два, три і т.д. разів) , прослідкуйте як змінюється точність розрахунку величини B_0 (шляхом порівняння $B_1 - B_2$, $B_2 - B_3$, і т.д. різниця $B_n - B_{n+1}$ повинна зменшуватись).

3. Встановити довжину котушки $L = 200$ пікселів, $R = 50$ пікселів, координати початкової точки для розрахунку силової лінії покладіть рівними $\mathrm{R_{ox}} \approx 50$ пікселів, $\mathrm{R_{oz}} = \mathrm{R_{oy}} = 0$. Збільшити густину силових ліній (шляхом зменшення "відстані"), встановіть "Разом ділянок" − 30. Збільшити число витків. Прослідкуйте, як ведуть себе силові лінії(яка їх форма) поблизу витків, чи перетинають вони циліндричну поверхню, на якій лежать витки?

4. Визначити значення індукції в центрі соленоїда (параметри взяти за таблицею 8.1). Зняти залежність $B(L)$тобто визначити по шість разів B в

центрі соленоїда для шести різних значень довжини котушки L. Результаті занести в таблицю.

5. Встановити параметри соленоїда у відповідності з таблицею 8.1. Виміряйте та запишіть B_0 в центрі соленоїда. Визначити ще шість значень B для шести значень відстані y від центра соленоїда. Результаті занести в таблицю (залежність $B(y)$).

6. Встановити параметри соленоїда у відповідності з таблицею 8.1. Виміряйте та запишіть B_0 в центрі соленоїда. Визначити ще шість значень B для шести значень відстані x від центра соленоїда. Результаті занести в таблицю (залежність $B(x)$).

Таблиця 8.1 – Вихідні данні

№ вар.	L, пікс.	R, пікс.	Разом ділянок	№ вар	L, пікс.	R, пікс.	Разом ділянок
1	500	50	300	7	300	60	200
2	200	50	200	8	300	40	200
3	500	100	200	9	400	50	250
4	300	70	200	10	300	50	200
5	400	80	300	11	300	30	300
6	500	90	300	12	500	80	300

7. Побудувати за п.4 графік $\frac{B(l)}{B_o} = f(l)$, $\frac{B(y)}{B_0} = f(y)$, зробити висновок, як змінюється відношення $\frac{B(l)}{B_o}$ та $\frac{B(y)}{B_o}$ з ростом довжини соленоїда.

8. Побудувати за пунктом 5 графік $\frac{B(x)}{B_o} = f(x)$. Зробити висновки.

8.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, картину силових ліній для магнітного поля одного витка, результати вимірювань, зведені в таблиці, графіки залежностей $\frac{B(l)}{B_o} = f(l)$, $\frac{B(x)}{B_o} = f(x)$, $\frac{B(y)}{B_0} = f(y)$.

8.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке “елемент струму”?
2. Запишіть закон Біо-Савара-Лапласа у векторній формі та скалярній формі.
3. В чому полягає принцип суперпозиції для магнітного поля?
4. Запишіть формулу для індукції довгого соленоїда.
5. За яких умов соленоїд можна вважати нескінченно довгим?
6. Вивести формулу для індукції магнітного поля у центрі нескінченно довгого соленоїда.
7. Запишіть теорему Гауса для магнітного поля?
8. Запишіть формулу роботи з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі.

9 ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА МЕТОДОМ ФОКУСУВАННЯ ПУЧКА ЕЛЕКТРОНІВ ПОВЗДОВЖНІМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ

9.1 Мета роботи

Дослідити рух зарядженої частинки в магнітному полі в залежності від напрямку її руху по відношенню до вектора індукції та визначити питомий заряд електрона e/m.

9.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи.

Коли в магнітне поле з індукцією $\vec{B}$ влітає електрон з швидкістю $\vec{V}$ під кутом α до ліній поля (рис.9.1), на нього починає діяти сила Лоренца [2, 6]:

$$\vec{F} = e \cdot \left(\vec{V} \times \vec{B} \right), \tag{9.1}$$

яка у випадку однорідного поля являє собою доцентрову силу

$$eV_{\perp} B = \frac{mV_{\perp}^2}{r}, \tag{9.2}$$

де $V_{\perp}$ – складова швидкості електрона, перпендикулярна вектору $\vec{B}$, e – заряд, m – маса електрона.

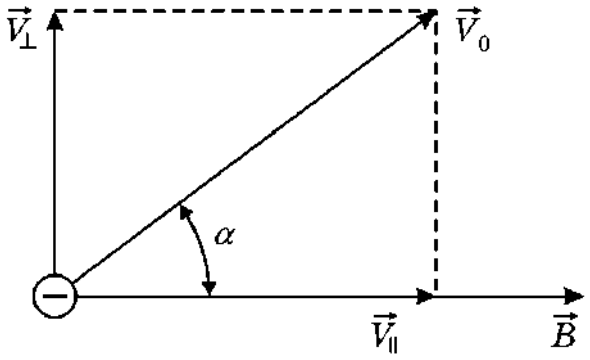


Рисунок 9.1

Сила Лоренца примушує електрон рухатися вздовж кола в площині, перпендикулярній $\vec{B}$. Використовуючи співвідношення (9.2), отримаємо формулу для радіуса цього кола r:

$$r = \frac{mV_{\perp}}{eB} \tag{9.3}$$

На повздовжню складову швидкості V_{II} сила Лоренца не впливає. Складова швидкості V_{II} переміщує електрон вздовж вектора $\vec{B}$ (вздовж осі z, рис.9.1). Таким чином електрон буде приймати участь у двох рухах – русі вздовж кола з швидкістю $V_{\perp}$ та русі в напрямку поля з швидкістю V_{II}. В результаті електрон буде рухатися вздовж гвинтової лінії, крок якої дорівнює

$$l = V_{II} T \ . \tag{9.4}$$

Період T в (9.4) можна знайти із співвідношення

$$T = \frac{2\pi r}{V_{\perp}} \ , \tag{9.5}$$

або, використовуючи вираз для r (9.3), отримаємо

$$T = \frac{2\pi m}{eB} \ . \tag{9.6}$$

Із співвідношень (9.4) і (9.5) виходить, що в однорідному магнітному полі повздовжня складова швидкості не зазнає змін. Таким чином, електрони з різними значеннями $V_{\perp}$ за один оберт перемістяться в повздовжньому напрямі на однакову відстань l і сфокусуються в одній точці.

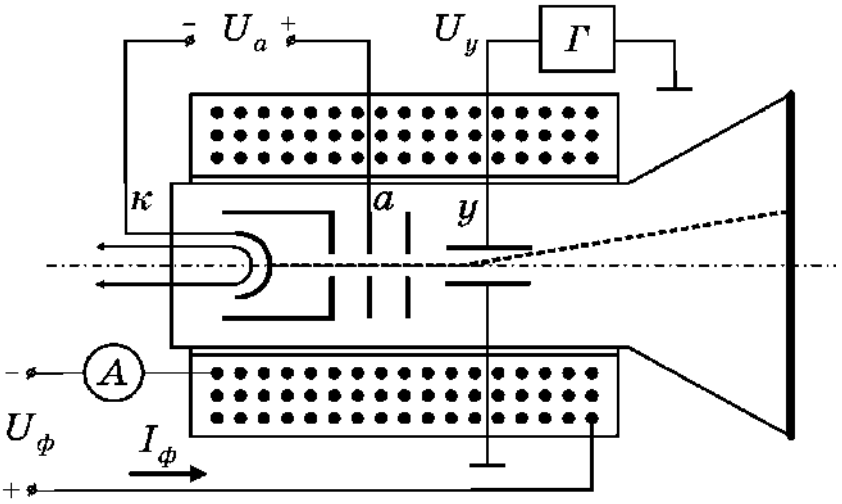


Рисунок 9.2

Зазвичай для визначення відношення l/m використовують осцилографічну електронно-променеву трубку, вміщену в соленоїд (рис.9.2), в якій створюється вузький пучок електронів, що мають однакову швидкість V_{II} [9]. Пролітаючи між вертикально відхиляючими пластинами, під дією змінної напруги U_y (подається на ці пластини від генератора $Г$) електрони отримують вертикальну складову швидкості V_y під дією

прискорювальної напруги U_a. Різні електрони будуть мати різні швидкості V_y. На екрані трубки буде видно вертикальну лінію, довжина якої буде залежати від максимальної величини V_y , яка в свою чергу буде залежати від амплітуди U_y.

За допомогою соленоїда, надітого на трубку (рис.9.2), створюють спочатку слабке магнітне поле. Електрони починають рухатись у трубці вздовж гвинтової лінії, вертикальна лінія повернеться на деякий кут

$$\varphi = \omega t = 2\pi \frac{t}{T} \ , \tag{9.7}$$

який залежить тільки від B (або від величини струму I в соленоїді). Із збільшенням I кут φ буде зростати, а радіус гвинтової лінії буде зменшуватися. При деякому значенні струму $I_Ф$ (відповідно індукції $B_Ф$) кут φ досягне 180˚, а пряма лінія стягнеться в точку. Визначивши $B_Ф$, можна обчислити e/m. Для цього в формулу (9.4) підставимо значення T із співвідношення (9.6), тоді отримаємо

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi V_{II}}{lB_Ф} \ . \tag{9.8}$$

Індукція магнітного поля соленоїда визначається формулою :

$$B_Ф = \frac{\mu_0 I_Ф n}{L} \ , \tag{9.9}$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн / м* – магнітна стала;

$I_Ф$ – значення струму в соленоїді, за якого відбувається фокусування електронів;

n – число витків соленоїда;

L – довжина соленоїда.

Підставивши значення $B_Ф$ (9.9) в формулу (9.8), знайдемо робочу формулу для визначення питомого заряду електрона.

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi V_{II} L}{\mu_0 I_Ф n l} \ . \tag{9.10}$$

9.3 Опис комп’ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 9.3. Програма розраховує та виводить на екран траєкторію руху електронів в

магнітному полі. Рух електрона описується за допомогою модифікованого алгоритму Ейлера (додаток Б). Для управління програмою створено головну панель та три допоміжних панелі настройок.

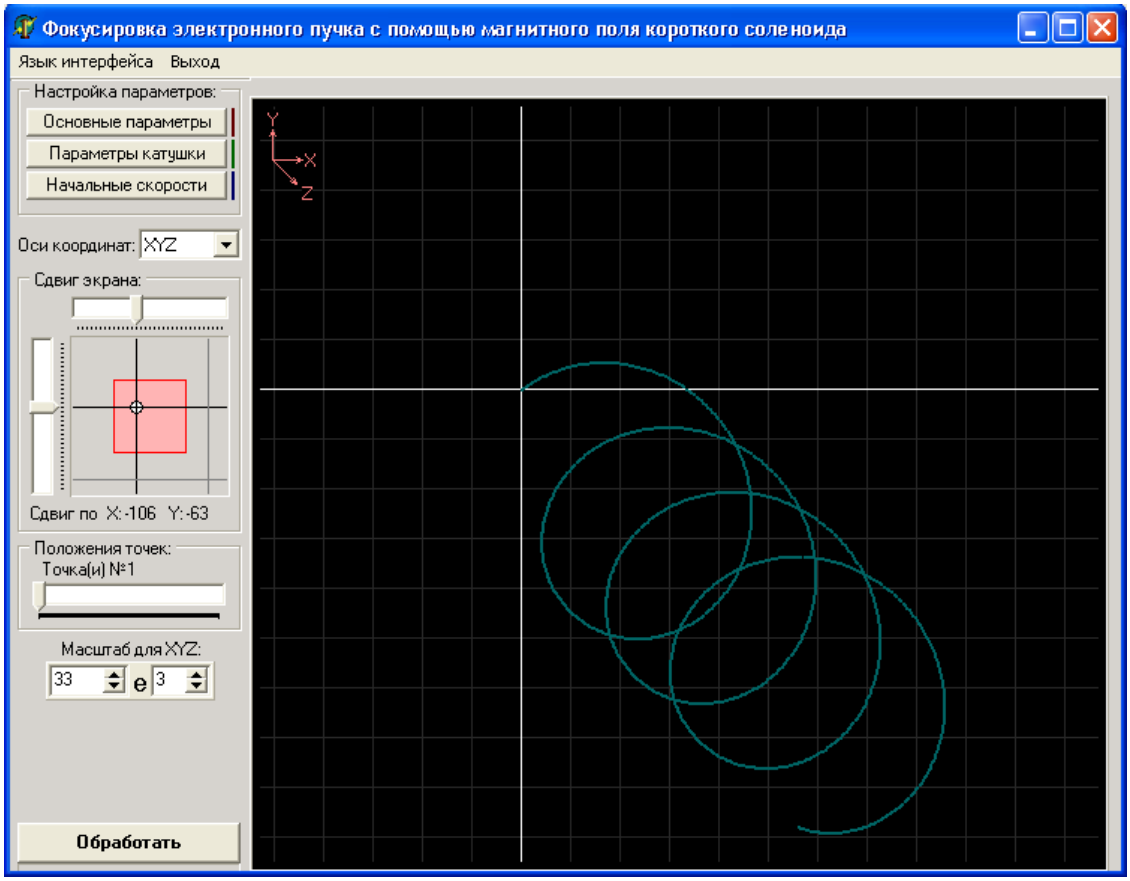


Рисунок 9.3

На головній панелі програми можна вибрати площину спостереження руху частинки XY, ZX, ZY або трьохвимірний простір – XYZ (рис.9.3). Зображення можна переміщувати вліво, вправо, вгору, вниз, змінювати його масштаб, виділяти одну частинку з групи частинок, “проганяти” її вздовж траєкторії в ручному режимі.

Перша допоміжна панель – “основні параметри”. В ній настроюються такі параметри як: маса частинки m, заряд q, крок в часі t, а також кількість кроків, які обчислюються – “візуалізовані кроки” та кількість “невидимих кроків”, які обчислюються між двома сусідніми візуалізованими.

Друга допоміжна панель – “Параметри котушки”. На ній встановлюються: радіус котушки R, число витків n, число N, на яке розбивається виток котушки при обчислюванні індукції B в заданій точці простору (за формулою Біо-Савара-Лапласа), довжина котушки L та сила

струму в соленоїді I. Можна також встановити тип поля “однорідне” або “неоднорідне”. Для однорідного поля B обчислюється один раз. Для неоднорідного поля обчислення індукції здійснюється для кожного кроку, при цьому швидкість обчислень значно знижується.

Третя допоміжна панель – “початкові швидкості”, дає можливість вибрати кількість електронів, траєкторії яких обробляються одночасно (від одного до п’яти), та встановлювати їх початкові швидкості V. Програма дає можливість обчислювати та спостерігати рух електронів в магнітному полі в широкому діапазоні зміни вказаних параметрів, обираючи їх 60 таким чином, щоб досягти фокусування електронів повздовжнім магнітним полем.

9.4 Інструкція користувачу

1. Вибрати однорідне магнітне поле (на панелі “параметры катушки“). Вибираючи відповідні значення складових V_x, V_y, V_z початкової швидкості (на панелі “начальные скорости”) отримайте прямолінійну траєкторію для одного електрона вздовж осі Z, кругову траєкторію в площині XY.

2. Встановіть $I = 100$ А. На панелі “Основные параметры” виберіть максимальне “число шагов” – 1000 . Підберіть значення складових швидкості V_x, V_y, V_z так , щоб спостерігалася спіральна траєкторія (при цьому повинно бути V_x, V_y □ 10^6 м/с, V_z □ 10^5 м/с). Зарисуйте й поясніть отримані криві.

3. Змініть V_x на $-V_x$, V_y на $-V_y$. Отримайте проекції траєкторії на площини XY, ZX, ZY і зарисуйте отримані криві. Порівняйте їх з кривими пункту 2. Поясніть причини змін.

4. Задайте початкові швидкості V_x, V_y, V_z для п’яти електронів, дані візьміть з таблиці 9.1. В цій таблиці приведені величини швидкості для першої частинки. Значення V_y для інших чотирьох електронів підберіть так, щоб вони відрізнялись від V_{y1} на кілька одиниць ($(1\ldots2)\cdot10^5$ м/с). Наприклад для першого варіанту $V_{x1} = 0$, $V_{y1} = 4\cdot10^5$ м/с, $V_{z1} = 6\cdot10^6$ м/с. Тоді $V_{y2} = 5\cdot10^5$ м/с, $V_{z1} = 6\cdot10^6$ м/с і т.д. Головне, щоб на екрані траєкторії п’яти частинок можна було добре розрізнити. Для всіх частинок складова швидкості $V_x = 0$, складова V_z для всіх п’яти частинок – однакова. Змінюючи величину струму, досягніть фокусування електронів. Спостерігати у площині XY. Щоб точніше

визначити момент фокусування (збіг електронів у одній точці, або близько до того), скористайтесь масштабом. Якщо траєкторії виходять за межі радіуса котушки R, змініть R так, щоб електрони знаходились в середині котушки.

Таблиця 9.1 – Вихідні данні

№ варіанта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V_y, $\times 10^5$ м/с		2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
V_z, $\times 10^6$ м/с		3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6
V_x, $\times 10^5$ м/с		0											
L, $\times 10^{-3}$ м		40											
n		10											
$l = \frac{n_1}{n_2}$	Число кроків розрахунку, n_1	1000											
	Число невидимих кроків, n_2	100											

Початкове значення $I = 1$ А, кінцеве $I = I_Ф$ – струм фокусування – коли всі електрони зберуться в одну точку. Спостерігайте траєкторії електронів в різних площинах. За допомогою движка “Положение точек” при одному із значень $I < I_Ф$ пройдіться вздовж траєкторій. Через кінцеві точки “проведіть” пряму, приклавши лінійку до екрана (або на прінтскріні).

5. Занесіть до таблиці значення струму фокусування отримані у програмі $I_Ф$. Обчислити значення e/m за формулою (9.10), де $V_{II} = V_z$. Результати занести в таблицю 9.2.

Таблиця 9.2 – Результати розрахунків

№	$I_Ф$, А	$< I_Ф >$, А	$\Delta I_Ф$, А	e/m, $\times 10^{11}$ Кл/кг	$< e/m >$, $\times 10^{11}$ Кл/кг	$\Delta(e/m)$, $\times 10^{11}$ Кл/кг
1						
2						
3						
4						
5						

6. Повторити пункти 4 і 5 ще чотири рази, збільшуючи V_{y1} на дві одиниці ($2 \cdot 10^5$ м/с), і визначити середнє значення e/m. Результати занести до таблиці 9.2.

7. Обчислити абсолютну похибку вимірювання $I_Ф$ та e/m. Результати занести до таблиці 9.2.

9.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, рисунки за пунктами 2 і 3, результати вимірювань, зведені в таблиці, похибки вимірів, висновки.

9.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що таке сила Лоренца, коли вона виникає?
2. Проаналізуйте, як змінюється сила Лоренца в залежності від взаємної орієнтації векторів $\vec{V}$ та $\vec{B}$, коли вона максимальна, мінімальна?
3. Як буде рухатися заряджена частинка в однорідному магнітному полі, коли: $\vec{V} \perp \vec{B}$; $\vec{V}$ □ $\vec{B}$; $\vec{V}$ направлені під кутом α ?
4. Яку установку використовують для визначення відношення заряду електрона до його маси e/m?
5. Як відбувається фокусування електронів в магнітному полі?
6. Запишіть теорему Гауса для магнітного поля?
7. Запишіть формулу роботи з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі.
8. Що таке струм фокусування $I_Ф$?

10. ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗАРЯДУ ЕЛЕКТРОНА МЕТОДОМ МАГНЕТРОНА

10.1 Мета роботи

Дослідити рух зарядженої частинки у взаємно перпендикулярних електричному і магнітному полях та визначити питомий заряд електрона e/m.

10.2 Вказівки до організації самостійної роботи

В даній роботі відношення e/m для електрона визначається за допомогою методу, який отримав назву “метод магнетрона”. Ця назва пов'язана з тим, що конфігурація електричного і магнітного полів, яка використовується в роботі нагадує конфігурацію полів в магнетронах – генераторах електромагнітних коливань в області надвисоких частот.

Рух електронів в цьому випадку відбувається в кільцевому просторі, розташованому між катодом і анодом двохелектродної електронної лампи. Нитка розжарювання (катод) розміщується вздовж осі циліндричного аноду таким чином, що напруженість електричного поля напрямлена вздовж радіусу (рис.10.1). Лампа розміщується всередині соленоїда, який створює магнітне поле, вектор індукції якого паралельний осі катоду. Розглянемо траєкторію електронів, які рухаються під дією електричного і магнітного полів. Вважатимемо, що початкова (теплова) швидкість електрона, який вилетів із катода, дорівнює нулю.

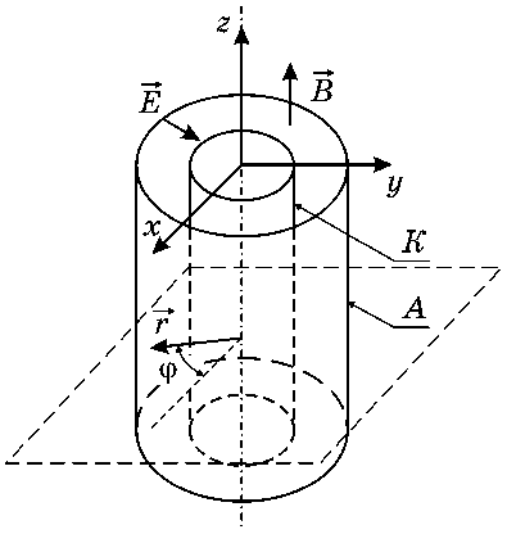


Рисунок 13.1

Тоді за заданої орієнтації електричного і магнітного полів рух електрона відбуватиметься в площині, перпендикулярній магнітному полю. Скористаємось полярною системою координат. В цьому випадку положення точки визначається відстанню від осі циліндра r полярним кутом φ і зсувом вздовж осі Z. Розглянемо спочатку сили, які діють на електрон збоку електричного поля. Напруженість електричного поля у циліндричному

конденсаторі має тільки радіальну компоненту E_r. Тому сила, яка діє на електрон в такому полі спрямована по радіусу, так що

$$F_r^{ел} = eE_r, \qquad F_z^{ел} = F_\varphi^{ел} = 0. \tag{10.1}$$

Розглянемо тепер сили, які діють на електрон з боку магнітного поля. Оскільки магнітне поле у нашому випадку спрямовано по осі *Z*, для проекції сили на ось *Z* маємо:

$$F_z^{маг} = 0. \tag{10.2}$$

Інші дві складові сили знайдемо за допомогою формули Лоренца:

$$F_\varphi^{маг} = -eV_r B, \qquad F_r^{маг} = eV_\varphi B. \tag{10.3}$$

З простих кінематичних міркувань зрозуміло, що

$$V_r = \frac{dr}{dt}, \qquad V_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}. \tag{10.4}$$

Таким чином, ні магнітні, ні електричні сили, які діють на електрон, не мають складових уздовж осі *Z*. Рух вздовж осі *Z* є рівномірним. Рух в площині (r,φ) зручно описати за допомогою рівняння моментів:

$$\frac{dL}{dt} = M_z, \tag{10.5}$$

де L – момент імпульсу електрона відносно осі Z, який дорівнює, як відомо, $mr^2\frac{d\varphi}{dt}$. Величина M_z дорівнює rF_φ. За допомогою (10.1) і (10.3) знайдемо:

$$M_z = -erV_r B. \tag{10.6}$$

Після підстановки (10.4) і (10.6) у (10.5) знайдемо:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = -eBr\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}eB\frac{d\left(r^2\right)}{dt}. \tag{10.7}$$

Після інтегрування рівняння (10.7) і урахування негативного заряду електрона буде:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} + C = |e|Br^2/2m, \tag{10.8}$$

де C – стала інтегрування, яку треба визначити з початкових умов. На початку руху радіус r дорівнює радіусу катода і є досить малим. Права частина (10.8) і перший член лівої частини також дуже малі. З достатньою точністю можна припустити, що $C = 0$. Тоді рівняння буде мати простий вигляд:

$$\frac{d\varphi}{dt} = |e|B/2m\,. \tag{10.9}$$

Розглянемо тепер рух електрона вздовж радіусу. Робота сил електричного поля , яка виконується при переміщенні електрона від катода до точки з потенціалом U, дорівнює $A = eU$. Магнітне поле ніякої роботи не виконує. Знайдена робота повинна дорівнювати кінетичній енергії електрона (початковою швидкістю електрона ми знову нехтуємо):

$$eU = \frac{mV^2}{2} = \frac{m\left(V_r^2 + V_\varphi^2\right)}{2}.$$

За допомогою (10.4) і (10.9) знаходимо:

$$eU = \frac{m}{2}\left[(r')^2 + \left(\frac{reB}{2m}\right)^2\right]. \tag{10.10}$$

Рівняння (10.10) визначає радіальний рух електрона.

Далі розглядаємо траєкторію електронів, які вилетіли із катода при анодній напрузі U_a. За відсутності магнітного поля (рис. 10.2) електрони рухаються прямолінійно вздовж радіуса. В слабкому полі траєкторія трохи викривляється, але електрон досягає анода. При збільшенні магнітного поля траєкторія викривляється настільки, що стає дотичною до анода. Це поле називається критичним $B_{кр}$.

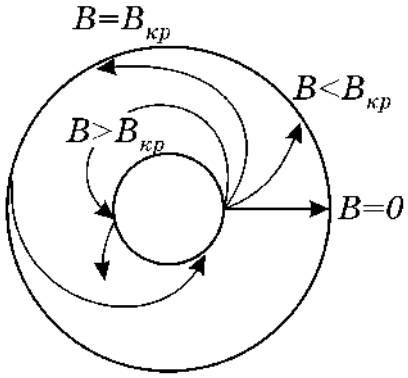


Рисунок 10.2

У випадку $B > B_{кр}$ електрон не потрапляє на анод і повертається до катода. Знайдемо величину $B_{кр}$ із співвідношення (10.8), звернувши увагу на те, що в цьому випадку радіальна швидкість електрона $\frac{dr}{dt}$ при $r = r_a$ перетвориться на нуль:

$$U_a = \frac{eB_{кр}^2 r_a^2}{8m} \tag{10.11}$$

звідки

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{B_{кр}^2 r_a^2}. \tag{10.12}$$

Із формули (10.12) знаходимо e/m, якщо при заданому U_a визначене таке значення магнітного поля (або навпаки, при заданому B таке значення U_a), при якому електрони перестають попадати на анод.

10.3 Опис комп'ютерної програми

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 10.3. Програма базується на модифікованому алгоритмі Ейлера (додаток Б), який описує двовимірний рух електрона в перехрещених магнітному та електричному полях. Програма має основну – "траєкторія" та допоміжному – "Схема та настройки" панелі. В режимі "траєкторія" програма дозволяє вивчити траєкторію руху електрона в широких межах; зміни анодної напруги, величини струму в соленоїді, початкової (теплової) швидкості електрона, з якою він вилітає із катода. Програма також дає можливість спостерігати рух будь-якого числа електронів, які вилітають із катода з різними початковими швидкостями, прослідкувати вплив на рух електрона (або електронів) просторової густини заряду, який завжди існує в проміжку між анодом та катодом двохелектродної лампи.

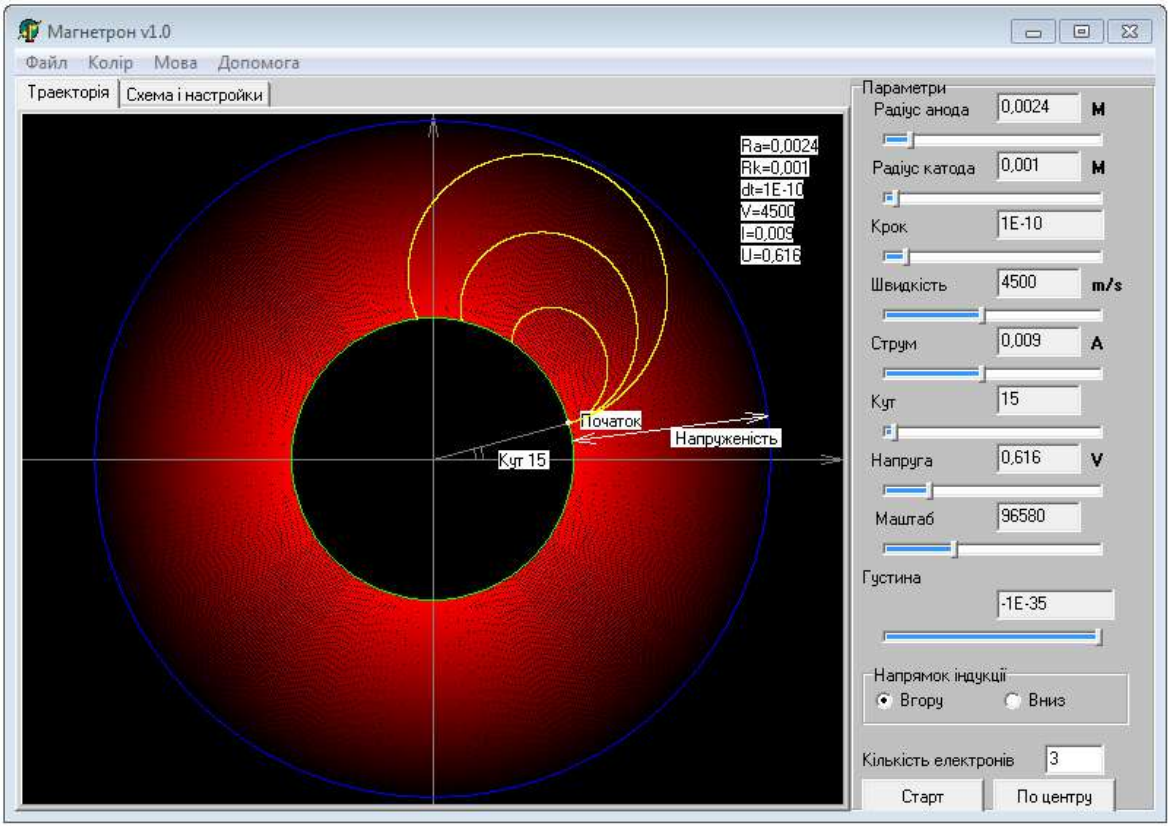


Рисунок 10.3

В процесі роботи з програмою є також можливість змінювати параметри електронної лампи – радіус катода, анода, регулювати точність обчислень, змінюючи крок переміщення електрона, змінювати масштаб зображення, його положення відносно центра екрана і, нарешті, вибрати приємні кольори зображення траєкторії, анода, катода та електронів.

10.4 Інструкція користувачу

1. Значення об'ємної густини заряду ρ_0, індукції B (струм котушки), анодної напруги U_a покласти рівним нулю. Значення радіуса анода r_a покласти 0,0024 м, радіуса катода – 0,001 м. Початкову швидкість V вибрати відповідно до табл.10.1. Зарисувати траєкторію руху електрона.

Таблиця 10.1 – Вихідні дані

№ варіанта	V, м/с	U_a, В	№ варіанта	V, м/с	U_a, В
1	3000	2,4	7	800	1
2	2000	2	8	1300	2
3	1000	1,5	9	1800	1,5
4	500	1	10	2300	1
5	1500	1,2	11	3300	2
6	2500	1,8	12	2800	2,4

2. Покладіть $V = 0$, $\rho_0 = 2 \cdot 10^{36}$ Кл/м^3, анодну напругу U_a згідно свого варіанту у таблиці 10.1. Збільшуючи індукцію (струм котушки) від нуля слід добиватися, щоб електрон пролітав повз анод. Запишіть значення струму I_K (критичне значення).

3. Обчислити критичне значення індукції $B_{кр}$ за формулою $B_{кр} = k \cdot I_{кр}$, де $k = 0,266$. Результат запишіть в табл.10.2.

4. Повторити дослід згідно пунктів 3,4 п'ять разів, збільшуючи кожного разу U_a на 0,2 В. Отримані результати запишіть в табл.10.2.

5. Вивести формулу для знаходження абсолютної похибки значення $\frac{e}{m}$. Похибки значення U_a та I_K взяти *5%*. Урахувати, що B_K – непрямий вимір, тобто для розрахунку похибки $\frac{e}{m}$ взяти формулу: $\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{k^2 \cdot I_{кр}^2 r_a^2}$.

Таблиця 10.2 – Результати розрахунків

№	U_a, В	I_K, А	B_K, Тл	(e/m), $\times 10^{11}$ Кл/кг	$<e/m>$, $\times 10^{11}$ Кл/кг	$\Delta(e/m)$, $\times 10^{11}$ Кл/кг
1						
2						
3						
4						
5						

6. Установити початкову швидкість електрона V згідно свого варіанту. Кілька разів збільшити швидкість V. Визначити як це впливає на B_K і чому це відбувається.

7. Змінюючи об'ємну густину заряду ρ_0 зробіть висновок, як ρ_0 впливає на величину B_K.

10.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, три замальовані траєкторії у вигляді прямої, кривої, петлі з поясненнями, чому вони мають такий вигляд, результанти у вигляді таблиці, похибки вимірювань, висновки.

10.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що являє собою прилад магнетрон?
2. Які сили діють на електрон при його русі в лампі?
3. Запишіть формулу для сили Лоренца у векторному вигляді.
4. Проаналізуйте формулу для сили Лоренца. Коли сила буде максимальна, мінімальна?

5. Який напрямок буде мати сила Лоренца на рис.13.1?

6. Якими рівняннями описується рух електрона?

7. Який наближений метод розв’язку рівнянь руху використовується в даній роботі?

11 ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА САМОІНДУКЦІЇ

11.1 Мета роботи

Дослідити явище самоіндукції, яке виникає при змінах сили струму в котушці, вивчити закон Фарадея для самоіндукції.

11.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

За будь-якої зміни сили струму в контурі змінюватиметься і магнітний потік Φ, який пронизує контур. За законом індукції Фарадея зміна магнітного потоку викликає появу ЕРС індукції [2, 5, 7]:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{11.1}$$

Знак мінус показує, що ЕРС завжди спрямована так, щоб протидіяти зміні струму в контурі – правило Ленца [2].

Відповідно до закону Біо–Савара–Лапласа [2, 5, 7] магнітна індукція пропорційна силі струму, який створює магнітне поле. Звідки випливає, що струм у контурі I та створюваний ним магнітний потік Φ через контур пропорційні один одному:

$$\Phi = LI. \tag{11.2}$$

Коефіцієнт пропорційності L між силою струму і магнітним потоком називається індуктивністю контуру.

Підставивши (11.2) в закон індукції (11.1), знайдемо ЕРС самоіндукції, яка виникає при змінах струму в контурі:

$$\mathcal{E}_C = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \tag{11.3}$$

Якщо L при змінах сили струму залишається сталою або змінюється незначно і сила струму в контурі мала за величиною, то ЕРС індукції залежатиме від швидкості зміни сили струму dI/dt і від величини індуктивності:

$$\mathcal{E}_C = -L\frac{dI}{dt}. \tag{11.4}$$

Розглянемо, як змінюватиметься струм в колі, зображеному на рис. 11.1, при вмиканні і вимиканні ЕРС $\mathcal{E}$. Перемикач $K1$ у положенні 1 підключає батарею $\mathcal{E}$ до котушки з індуктивністю L і опором R.

За законом Ома для неоднорідного кола [2, 5, 7]:

$$i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_C}{R}.$$

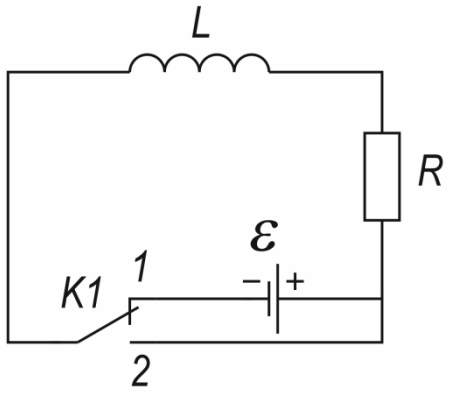


Рисунок 11.1

Звідки маємо таке рівняння:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_C = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}. \qquad (11.5)$$

Після замикання ключа $K1$ в положення 1 відбудеться зміна струму ΔI в котушці за час його вмикання Δt. Миттєва зміна струму dI/dt додатна і, як випливає з рівняння (11.5), струм у колі повільно збільшуватиметься до встановленого значення I_0. Збільшенню струму перешкоджає ЕРС самоіндукції. Через деякий проміжок часу dI/dt стане дорівнювати нулю, в колі встановиться постійний струм $I_0 = \mathcal{E}/R$. Значення струму в будь-який момент часу можна знайти, вирішивши диференціальне рівняння (11.5). Розв'язком цього рівняння для початкових умов ($I_0 = 0$ при $t = 0$) буде функція

$$I = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (11.6)$$

Графік цієї функції зображений на рис. 11.2 (крива 1).

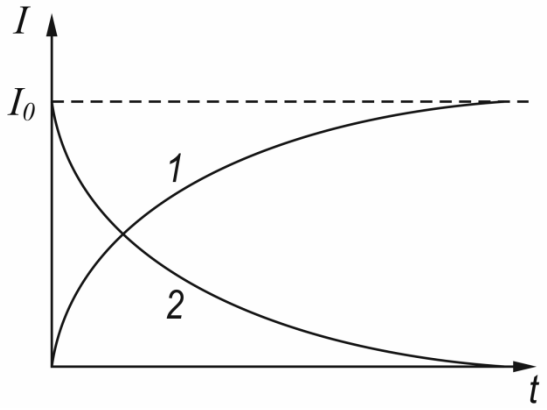


Рисунок 11.2

Розглянемо тепер, що відбудеться у контурі, якщо розімкнути ключ після того, як в колі встановиться струм I_0. Струм за час розмикання Δt зменшиться до нуля, dI/dt і ЕРС самоіндукції при $\Delta t \to 0$ прямуватимуть до мінус нескінченності.

Щоб обмежити індуктивний струм, у схемі (рис. 11.1) котушка замикається накоротко перемикачем *K1* в положенні 2 і одночасно відключається батарея. Контур (рис. 11.1) тепер описується рівнянням

$$IR = \mathcal{E}_C = -L\frac{dI}{dt}. \tag{11.7}$$

Перепишемо це рівняння так

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \tag{11.8}$$

Якщо $t = 0$, $I_0 = 0$, то розв'язком цього лінійного однорідного диференціального рівняння 1-го порядку буде функція

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{11.9}$$

Отже, після відключення джерела ЕРС сила струму в колі не перетворюється миттєво в нуль, а зменшується за експоненціальним законом. Графік функції (11.9) даний на рис. 11.2 (крива 2).

Із рівняння (11.9) випливає, що чим більша індуктивність кола L і менший його опір R, тим повільніше зменшується струм.

Підставивши (11.9) до (11.4), знайдемо закон ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_C = -L\frac{dI}{dt} = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{11.10}$$

Із співвідношення (11.10) можна зробити висновок про те, що коли опір кола R_i одразу після його розмикання дуже великий (і значно перевищує опір R котушки), то ЕРС самоіндукції сягає дуже великих значень. В нашій схемі перемикання із положення 1 в положення 2 відбувається не миттєво, отже, протягом малого часу перемикання опір кола стає дуже великим ($R_i \to \infty$, коли коло розімкнуто), і ЕРС може досягати дуже великої величини.

11.3 Опис комп'ютерної програми

Програма розраховує значення сили струму в соленоїді в залежності від параметрів соленоїда та інших факторів (довжина соленоїда, площа поперченого перетину, кількість витків соленоїда, опір, напруга, час після

відключення ЕРС). Відлік часу починається після натискання кнопки “Старт”. Сила струму вимірюється при натисканні кнопки “Виміряти”.

Зовнішній вигляд програми зображено на рисунку 11.3.

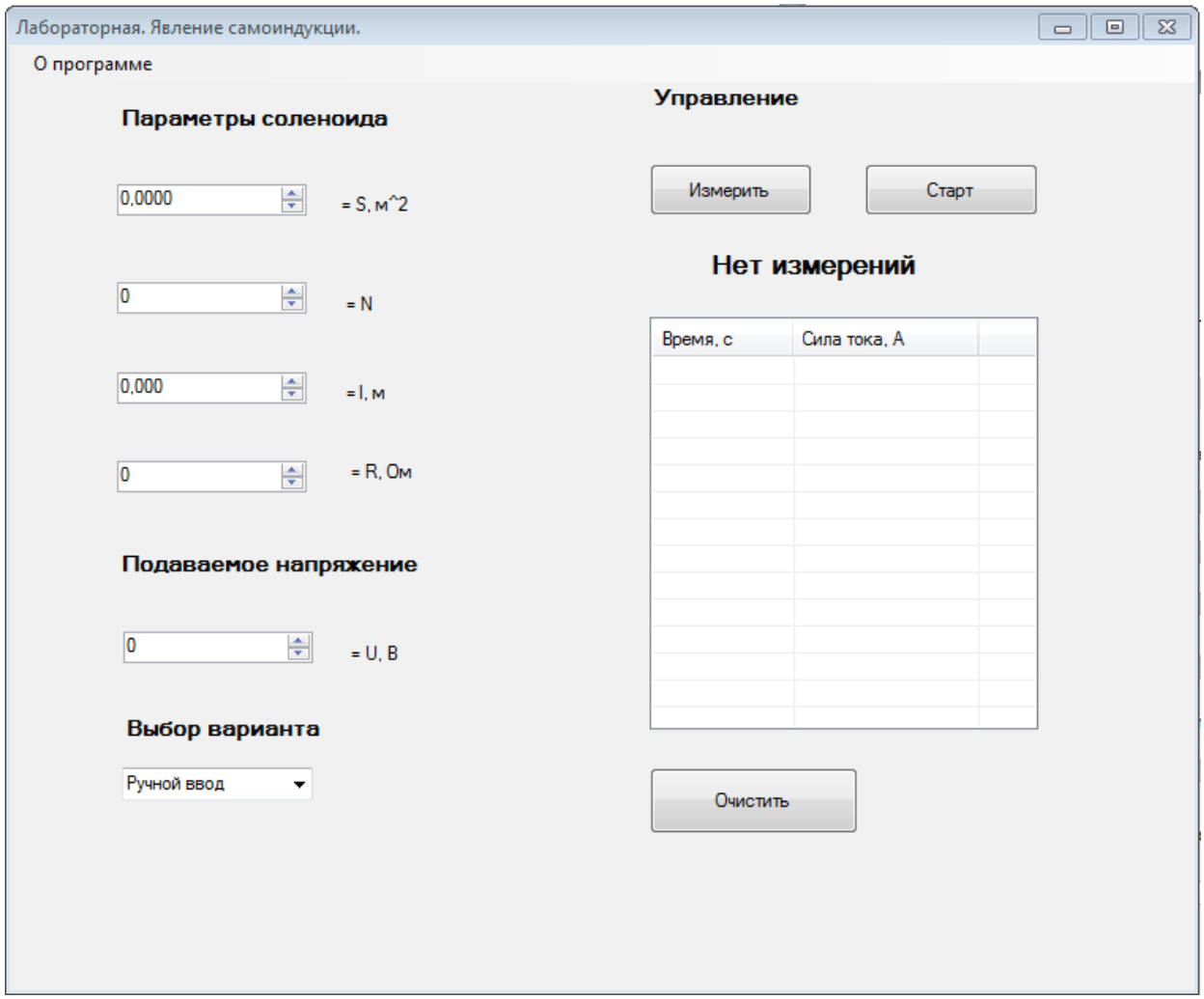


Рисунок 11.3

1.4 Інструкція користувачу

1 Встановіть довільні параметри соленоїда та напругу 220 В. Зробіть вимір початкової сили струму. Послідовно змінюючи параметри соленоїда і зовнішнього кола, вимірюйте початкову силу струму. Визначте, від яких параметрів вона залежить.

2. Встановіть параметри соленоїда і зовнішнього кола з таблиці 11.2 згідно номеру свого варіанту.

3. Виміряйте початкову силу струму (час дорівнює нулю). Натисніть кнопку “Старт” та зробіть декілька вимірів сили струму, та прослідкуйте, як

швидко вона зменшується. Визначне час вимірювання для свого варіанту, за який сила струму зменшується у 15…20 разів від початкового значення. Зупиніть експеримент, натиснувши кнопку “Стоп”.

Таблиця 11.1 – Вихідні дані

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S, $\times 10^{-4}$ м^2	16	12	8	16	12	8	16	12	8	16	12	8
N	300	300	300	250	250	250	200	200	200	150	150	150
l, $\times 10^{-2}$ м	20	15	10	20	15	10	20	15	10	20	15	10
R, Ом	150	150	150	100	100	100	80	80	80	50	50	50

4. Очистіть історію вимірювань, натиснувши відповідну кнопку. Виміряйте початкову силу струму ($t = 0$) та занесіть до таблиці 11.2.

5. Натисніть кнопку “Старт” та зробіть щонайменше 10 вимірів сили струму з приблизно однаковим інтервалом за вибраний проміжок часу, отриманні данні занесіть до таблиці 11.2. Обчислить $\ln I$ та побудуйте графіки залежностей $I = f(t)$ і $\ln I = f(t)$.

Таблиця 11.2 – Результати вимірювань

t, с	0,0										
I, А											
$\ln I$											
L, Гн											
ε, В											

6. За формулою 11.9, обчислить значення індуктивності та занесіть до таблиці 11.2. Переконайтеся в сталому значенні індуктивності.

7. За формулою 11.10, визначте ЕРС самоіндукції в кожний виміряний момент часу. Побудуйте графік $\mathcal{E} = f(t)$.

11.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи; результати вимірів у вигляді таблиці; розрахунки шуканих величин; графіки залежностей $I = f(t)$, $\ln I = f(t)$, $\mathcal{E} = f(t)$; стислі висновки.

1.6 Контрольні запитання і завдання

1. Що називається явищем самоіндукції?
2. Записати закон Фарадея для електромагнітної індукції.
3. В чому полягає правило Ленца?
4. Як отримати співвідношення для ЕРС самоіндукції із закону Фарадея?
5. Від чого залежить величина цієї ЕРС?
6. Як змінюється струм самоіндукції при підключенні котушки індуктивності до джерела ЕРС?
7. Як змінюються ЕРС і струм самоіндукції при вимиканні джерела ЕРС і короткому замиканні котушки?
8. Чому ЕРС самоіндукції може досягати великих абсолютних значень при відключенні від котушки зовнішнього джерела ЕРС?

12 ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА ВЗАЄМОІНДУКЦІЇ

12.1 Мета роботи

Дослідити явище взаємоіндукції, вивчити закон Фарадея, розглянути принцип роботи трансформатора та визначити його характеристики: коефіцієнт трансформації напруги, коефіцієнти взаємоіндукції обмоток трансформатора та його ККД.

12.2 Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів

Для двох близько розташованих контурів змінний струм, який протікає в одному з них (рис. 12.1), наприклад в контурі 1, створює змінне магнітне поле, яке викликає появу ЕРС індукції в контурі 2. Таке явище називається взаємоіндукцією. ЕРС взаємоіндукції (як і самоіндукції) визначається за законом Фарадея [2, 5 ,7]:

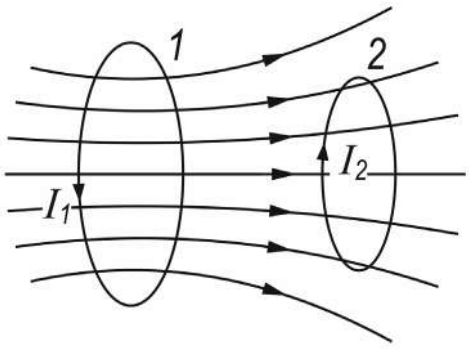


Рисунок 12.1

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де Φ – магнітний потік контуру зі струмом.

На практиці звичайно магнітний потік створюється не одним витком, а котушкою з великою кількістю витків. Повний магнітний потік Ψ крізь усі витки котушки, пропорційний кількості витків N та магнітному потоку одного витка Φ: $\Psi = N\Phi$. Величину Ψ іноді називають потокозчепленням. Щоб підсилити взаємодію між повними магнітними потоками котушок, останні потрібно розташувати навколо замкнутого феромагнітного осердя (рис. 12.2). Такий пристрій має назву трансформатора.

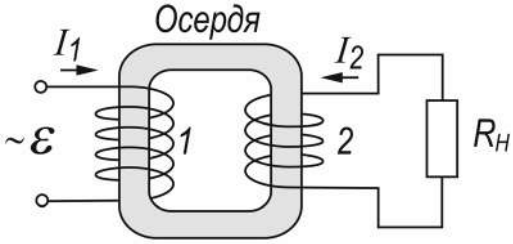


Рисунок 12.2

Якщо у котушці 1 протікає змінний струм i_1, то у феромагнітному осерді створюється змінний магнітний потік, частина якого Ψ_{21} проходить через котушку 2 та створює в ній ЕРС індукції:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_1}{dt}, \tag{12.1}$$

де Ψ_{21} – потокозчеплення з контуром 2, яке створюється струмом i_1;

Φ_1 – магнітний потік першої котушки;

N_2 – кількість витків другої котушки.

Розглянемо випадок, коли котушка 2 трансформатора розімкнена (навантаження R_H відсутнє). Цей випадок має назву режиму холостого ходу трансформатора.

Запишемо співвідношення (12.1) у вигляді

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_{21}}{di_1} \cdot \frac{di_1}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}, \tag{12.2}$$

де величина

$$L_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{di_1}. \tag{12.3}$$

має назву динамічної взаємної індуктивності або коефіцієнта взаємоіндукції котушки 2 з котушкою 1.

Повний магнітний потік (потокозчеплення з котушкою 2)

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_1 = N_2 B_1 S, \tag{12.4}$$

створюється котушкою 1 (оскільки $i_2 = 0$) та залежить від індукції магнітного поля B_1 цієї котушки, кількості витків другої котушки N_2 та площі перерізу осердя S.

Індукція магнітного поля, що створюється першою котушкою із числом витків N_1, довжиною l_1 і магнітною проникністю осердя μ, визначається формулою:

$$B_1 = \mu_0 \mu \cdot \frac{N_1 i_1}{l}. \tag{12.5}$$

Підставимо (12.5) у (12.4), а отримане співвідношення – у (12.3):

$$L_{21} = \mu_0 \mu \cdot \frac{N_1 N_2}{l} \cdot S. \tag{12.6}$$

Отримана формула дозволяє визначити коефіцієнт взаємоіндукції котушки 2 з котушкою 1 тільки для режиму холостого ходу. У цьому режимі в котушці 1 створюватиметься ЕРС $\mathcal{E}_1$, яка чисельно дорівнює ЕРС індукції.

Якщо вважати падіння напруги на опорі обмотки 1 малим через незначну величину опору цієї обмотки, то можна записати:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}. \qquad (12.7)$$

Поділивши (12.1) на (12.7), отримаємо можливість обчислення кількості витків однієї з обмоток, якщо відома кількість витків другої:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1}. \qquad (12.8)$$

Перейдемо до розгляду режиму роботи, при якому в котушці 2 протікає струм i_2 – сумірний з величиною струму i_1 $(0 < R_H < \infty)$.

Струм i_2 (рис. 12.2) створює змінний магнітний потік Ψ_{12} у вторинній обмотці трансформатора. Цей повний потік, поширюючись в осерді, проходить крізь витки котушки 1 та створює в ній ЕРС взаємоіндукції:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}, \qquad (12.9)$$

де $\Psi_{12} = N_1\Phi_2 = N_1 B_2 S$ (B_2 – індукція магнітного поля котушки 2);

L_{12} – коефіцієнт взаємоіндукції котушки 1 з котушкою 2:

$$L_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{di_2} = N_2 S \frac{dB_2}{di_2}.$$

ЕРС $\mathcal{E}_1$ та $\mathcal{E}_2$ є сумарними ЕРС взаємоіндукції, тому що в створенні змінного потоку осердя приймають участь струми i_1 та i_2. Враховуючи це, запишемо рівняння другого правила Кірхгофа [2–5] для контуру 1:

$$i_1 R_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_1.$$

Якщо падіння напруги на котушці 1 мале ($i_1 R_1 \approx 0$), то $\mathcal{E}_1 \approx \mathcal{E} \approx U$, де U - напруга джерела змінного струму, який змінюється за гармонічним законом:

$$i_1 = i_{01} \cos \omega t, \qquad (12.10)$$

де i_{01} – амплітуда сили струму у котушці 1;

ω – циклічна частота струму.

Підставимо (12.10) до (12.2) та знайдемо ЕРС котушки 2:

$$\mathcal{E}_2 = -L_{21} \frac{di_1}{dt} = L_{21} i_{01} \omega \sin \omega t. \qquad (12.11)$$

Якщо знехтувати падінням напруги в котушці 2 через малий опір ($R_2 \approx 0$), можна вважати $\mathcal{E}_2 \approx U_2$. Тоді

$$U_2 = L_{21} i_{01} \omega \sin \omega \cdot t.$$

Амплітудне значення напруги:

$$U_{02} = L_{21} i_{01} \omega . \qquad (12.12)$$

Із співвідношення (12.12) знайдемо максимальне значення коефіцієнта взаємоіндукції другої котушки з першою:

$$L_{21} = \frac{U_{02}}{i_{01}\omega} . \qquad (12.13)$$

Аналогічно можна визначити коефіцієнт взаємоіндукції першої котушки з другою:

$$L_{12} = \frac{U_{01}}{i_{02}\omega}, \qquad (12.14)$$

де U_{01} – амплітуда напруги джерела струму;

i_{02} – амплітуда сили струму в котушці 2.

Потужність P_2, яка виділяється у зовнішньому колі цього контуру, завжди менша, ніж спожита з мережі потужність P_1. Якщо навіть на опорі навантаження R_H вторинної обмотки трансформатора виділяється максимально допустима активна потужність, то і тоді вона буде менша за спожиту. Це пов'язано з тим, що частина спожитої електричної енергії витрачається на перемагнічування осердя (гістерезис) та його нагрівання (струми Фуко), а також на нагрівання обмоток трансформатора [2–5].

Відношення активної потужності P_2, яка виділяється на опорі навантаження P_H, до активної потужності P_1, що споживається із мережі, має назву коефіцієнта корисної дії (ККД) трансформатора:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{i_{02} U_{02} \cos\varphi_2}{i_{01} U_{01} \cos\varphi_1}, \qquad (12.15)$$

де φ_1 – різниця фаз між i_{01} та U_{01};

φ_2 – різниця фаз між i_{02} та U_{02} .

При опорах навантаження, близьких до оптимальних, та при невеликих коефіцієнтах трансформації різниці фаз в обмотках будуть малі і їх можна прирівняти ($\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$), тому формула (12.15) для таких умов спрощується:

$$\eta = \frac{i_{02} U_{02}}{i_{01} U_{01}} . \qquad (12.16)$$

Порівнюючи (12.13) та (12.14), можна сказати, що відношення коефіцієнтів взаємоіндукції обмоток чисельно дорівнює при зазначених вище умовах ККД трансформатора:

$$\frac{L_{21}}{L_{12}} = \eta . \qquad (12.17)$$

За законом збереження енергії потужності на первинній та вторинній обмотках трансформатора можна вважати однаковими $P_1 = P_2$, якщо знехтувати тепловими втратами на їх активних опорах та в осерді, що обумовлені струмами Фуко. Тобто

$$\frac{\mathcal{E}_{01} i_{01}}{2} \cdot \cos\varphi_1 = \frac{\mathcal{E}_{02} i_{02}}{2} \cdot \cos\varphi_2 ,$$

або через ефективні значення напруг та струмів:

$$U_1 i_1 \cos\varphi_1 = U_2 i_2 \cos\varphi_2 .$$

Після підстановки виразів (12.1) і (12.7) та при $\cos\varphi_1 \approx \cos\varphi_2$ ці рівняння можна переписати у вигляді такого співвідношення:

$$\frac{\mathcal{E}_{02}}{\mathcal{E}_{01}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{i_1}{i_2} = k . \qquad (12.18)$$

Величина k має назву коефіцієнта трансформації напруги. Вона визначає, у скільки разів ЕРС у вторинній обмотці трансформатора є більшою або меншою, ніж у первинної.

12.3 Опис комп'ютерної програми

Комп'ютерна програма розраховує значення напруги на вторинній котушці 2, (вихідна напруга) трансформатора T в залежності від напруги на первинній котушці 1 (вхідна напруга), а також сили струмів в колах первинної і вторинної котушок. Вхідна напруга – "Вольтметр 1", виставляється за допомогою движка реостата $RP1$ і відображається у вікні програми. Вихідна напруга – "Вольтметр 2", а також сили струмів у колах первинної – "Амперметр 1" і вторинної котушок – "Амперметр 2", також відображаються у вікні програми.

Програма виконується у двох режимах роботи "Режим холостого ходу", коли до вторинної котушки трансформатора нічого не підключено (коло розімкнуто), і "Режим з навантаженням", коли до вторинної котушки підключено електричній опір – резистор R_H.

Зовнішній вигляд програми зображено на рисунку 12.3.

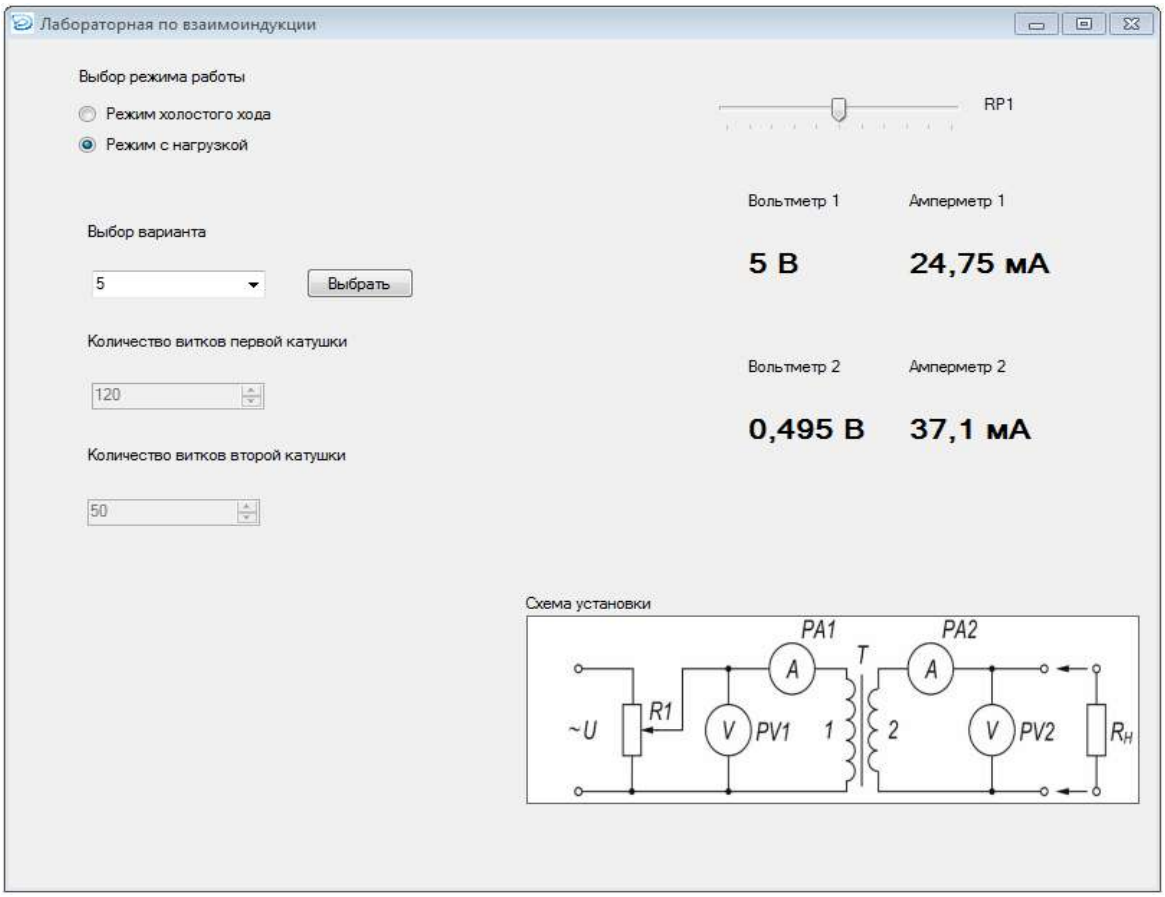


Рисунок 12.3

12.4 Порядок виконання роботи і методичні вказівки з її виконання

1. Вибрати та дослідити режим холостого ходу трансформатора. Для цього, змінюючи вхідну напругу U_1 на котушці 1 через кожні 2,0 В, вимірювати за допомогою вольтметру напругу U_2 та котушці 2 трансформатора. Отримані результати записати до таблиці 12.1.

Таблиця 12.1 – Результати вимірювань та розрахунків для режиму холостого ходу трансформатора

U_1, В	U_2, В	N_1	N_2	$< N_2 >$	L_{21}, *мГн*	$< L_{21} >$
2,0						
4,0						
6,0						
8,0						
10,0						

2. Використовуючи співвідношення (12.8), визначити кількість витків N_2 вторинної обмотки. Результати записати до таблиці 12.1.

3. За формулою (12.6) обчислити коефіцієнт взаємоіндукції L_{21} для режиму холостого ходу. Результати записати до таблиці 12.1. Дані трансформатора для розрахунків: довжина первинної котушки $l = 7{,}5$ см, площа поперечного перетину первинної котушки $S = 6{,}4$ см^2, кількість витків первинної котушки $N = 120$, магнітна проникність осердя $\mu = 500$. Значення магнітної сталої $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

4. Вибрати та дослідити режим роботи трансформатора під навантаженням. Для цього вибрати режим роботи "Режим з навантаженням" і вибрати свій варіант. Змінюючи вхідну напругу U_1 через кожні 2,0 В, вимірювати силу струму i_1 у колі первинної котушки та i_2 – у колі вторинної, а також напругу U_2 на опорі R_H. Дані досліду записати до таблиці 12.2.

5. Для кожної вхідної напруги визначити коефіцієнти взаємоіндукції L_{21} і L_{12} за формулами (12.13), (12.14), враховуючи співвідношення (12.19) та результати експерименту. Частота змінного струму $\nu = 50$ *Гц*, циклічна частота $\omega = 2\pi\nu$. Результати розрахунків записати до таблиці 12.2.

6. Для всіх значень вхідної напруги за даними завдання 4 знайти ККД трансформатора, використовуючи співвідношення (12.16). Результати занести до таблиці 12.2.

7. За формулою (12.18), обчислити коефіцієнти трансформації для усіх значень вхідних напруг U_1. *З*найти середнє значення коефіцієнта трансформації k. Результати занести до таблиці 12.2. Визначити похибки коефіцієнтів взаємоіндукції та трансформації.

Таблиця 12.2 – Результати вимірювань та розрахунків для режиму при номінальному навантаженні

U_1, В	i_1, мА	U_2, В	i_2, мА	L_{21}, мГн	L_{12}, мГн	ККД, %	k	$< k >$
1,0								
2,0								
3,0								
4,0								
5,0								

12.5 Зміст звіту

Звіт має містити: мету роботи, схему лабораторної установки, результати вимірів та розрахунків у вигляді таблиць, розрахунки кількості витків N_2, коефіцієнтів взаємоіндукції L_{21} для режиму холостого ходу, коефіцієнти взаємоіндукції L_{21} і L_{12} при навантаженні, ККД трансформатора, коефіцієнт трансформації k, статистичну обробку результатів вимірювань, стислі висновки.

12.6 Контрольні запитання і завдання

1. У чому полягає явище взаємної індукції?
2. Запишіть закон Фарадею для електромагнітної індукції
3. Сформулюйте правили Ленца.
4. Навести формулу для ЕРС взаємоіндукції.
5. Що називають взаємною індуктивністю двох контурів? Від чого вона залежить?
6. Навести формулу коефіцієнта взаємоіндукції обмоток трансформатора для режиму холостого ходу.
7. Навести формулу коефіцієнтів взаємоіндукції обмоток трансформатора для режиму номінального навантаження.
8. Навести формулу коефіцієнта трансформації трансформатора. Пояснити принцип роботи трансформатора.
9. Що називається ККД трансформатора? Як визначається ККД трансформатора та від чого він залежить?
10. Як поєднати діючі значення напруги та сили струму з їх амплітудними значеннями для синусоїдального струму та напруги?
11. Як можна знайти ККД трансформатора, знаючи максимальні коефіцієнти взаємоіндукції його обмоток? За яких умов цей ККД можна визначити через коефіцієнти взаємоіндукції?

ЧАСТИНА IV. ОПТИКА

13 ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА ІНТЕРФЕРЕНЦІЇ СВІТЛА ВІД ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЩІЛИН ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДА ЮНГА.

13.1. Мета роботи

Дослідити явище інтерференції світла за допомогою метода Юнга, ознайомитись з принципом Гюйгенса-Френеля, визначити основні параметри інтерференційної картини.

13.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Інтерференція – це явище, що виникає при накладанні двох або більше когерентних хвиль, внаслідок якого відбувається перерозподіл енергії (інтенсивності) їх коливань. В результаті, в одних місцях простору виникають максимуми, а в інших – мінімуми інтенсивності коливань.

Когерентними хвилями називають хвилі, які мають однакову частоту коливань ω та постійний у часі зсув фаз $\Delta\varphi$.

Інтенсивність хвильових коливань I – це середня за часом енергія, яку хвиля переносить за одиницю часу через одиницю площі поверхні, розташованої перпендикулярно до напрямку поширення хвилі.

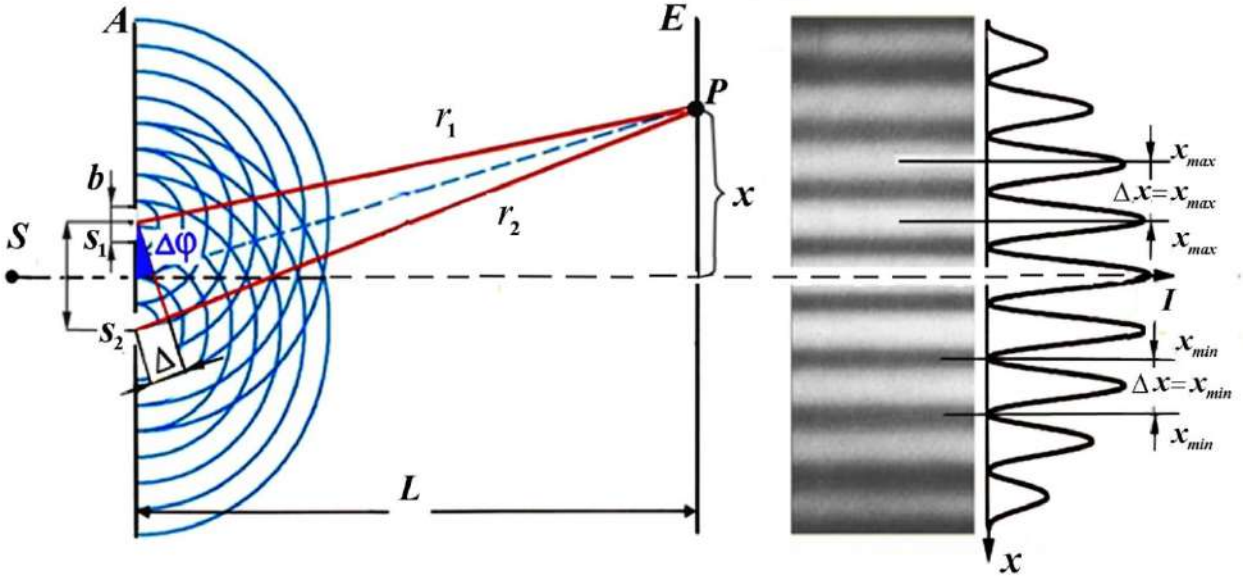
Хоча явище інтерференції притаманне для усіх видів хвиль, традиційно воно вивчається на прикладі світлових хвиль. Це електромагнітні хвилі (ЕМХ) с довжиною $\lambda = 0{,}38 \div 0{,}76$ мкм ($\nu = 790 \div 385$ ТГц), які сприймаються оком людини. При накладанні одночасно декількох ЕМХ відбувається додавання їх електричних та магнітних полів. В дослідженнях видимого світла основну роль відіграє електрична складова ЕМХ, яка описується вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$.

Незалежні природні джерела світла некогерентні між собою і не можуть утворювати інтерференційну картину.

Основними методами створення когерентних хвиль є такі, де хвиля від природного джерела в той чи інший спосіб розділяється на дві хвилі, які приходять в точку спостереження різними шляхами.

Одним з таких методів є метод Юнга, схему якого наведено на рис.13.1. Сутність його полягає у створенні на екрані інтерференційної картини, що

виникає внаслідок накладання двох монохроматичних хвиль світла, виникаючих при проходженні двох щілин однакової ширини.



а) б) с)

Рисунок 13.1.

Щілини S_1 і S_2 розташовані в площині A симетрично відносно джерела S на відстані d одна від одної, та на відстані L від екрану. Причому, $L \square d$

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля, щілини S_1 і S_2 являють собою точкові джерела вторинних сферичних когерентних хвиль, інтенсивність яких зменшується обернено пропорційно відстаням до точки спостережнення.

Розповсюдження таких сферичних когерентних хвиль у просторі приводить до перерозподілу їх інтенсивності і появи на екрані E інтерференційної картини у виді чергуючихся світлих та темних смуг, що мають в середині інтерференційні максимуми або мінімуми.

Розглянемо, як відбувається цей перерозподіл та за яких умов виникають максимуми і мінімуми інтенсивності.

Нехай у точку P приходять 2 гармонічні (синусоїдальні) світлові хвилі однакової частоти. Коливання векторів напруженості $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ в даній точці описуються рівняннями $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\cos(\omega t + \varphi_1)$ і $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\cos(\omega t + \varphi_2)$, а результуюче коливання – рівнянням $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t + \varphi_0)$, де $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}_{02}$ $\vec{E}_0$ – амплітудні значення напруженості електричного поля.

Відомо, що інтенсивність хвилі дорівнює усередненому за часом квадрату напруженості $I =< E^2 >$. Тоді вираз для інтенсивності результуючого коливання в будь якій точці має вигляд

$$I =< E_0^2 >= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\Delta\varphi = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(k\Delta r), \quad (13.1)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, $\Delta r = r_2 - r_1$ – геометрична різниця ходу світлових променів.

Результуюча інтенсивність I залежить від величин I_1 , I_2, та $\cos\Delta\varphi$. У разі когерентних хвиль $\cos\Delta\varphi$ має постійне значення у часі, але для кожної точки простору це значення буде індивідуальним. Тобто, якщо для деякої точки простору $\cos\Delta\varphi > 0$, то $I > I_1 + I_2$ – результуюча інтенсивність падаючих хвиль буде більшою за суму інтенсивностей, створюваних кожною з хвиль окремо. І, навпаки, якщо $\cos\Delta\varphi < 0$ то $I < I_1 + I_2$ – результуюча інтенсивність буде меншою за суму інтенсивностей, створюваних кожною з хвиль окремо.

З вищесказаного випливає, що максимальне значення результуючої інтенсивності I буде при $\cos\Delta\varphi = 1$, а мінімальне – при $\cos\Delta\varphi = -1$.

Іншими словами, хвилі максимально підсилюють одна одну (з'являється максимум інтенсивності), якщо вони приходять в точку спостереження в одній фазі, тобто різниця фаз дорівнює

$$\Delta\varphi = \pm 2\pi m, \text{ де } (m = 0, 1, 2, ...), \quad (13.2)$$

і максимально послаблюють (з'являється мінімум інтенсивності) одна одну, якщо вони приходять в точку спостереження у протифазі, тобто різниця фаз дорівнює

$$\Delta\varphi = \pm(2m + 1)\pi, \text{ де } (m = 0, 1, 2, ...). \quad (13.3)$$

Різниця фаз між двома хвилями від двох щілин (точкових джерел), зображених на рис.13.1, пропорційна оптичній різниці ходи Δ променів S_1P та S_2P:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\lambda}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi\lambda}{\lambda_0}\Delta, \quad (13.4)$$

де λ_0 – довжина світлової хвилі у вакуумі

$L_1 = n_1 r_1$ і $L_2 = n_2 r_2$ – оптичні довжини шляхів променів S_1P та S_2P:

Δ – оптична різниця ходу;

n – коефіцієнт заломлення середовища.

З формули (13.4) видно:

Якщо оптична різниця ходу Δ дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі:

$$\Delta = \pm m\lambda_0, \ (m = 0, 1, 2, ...) \ , \quad (13.5)$$

то різниця фаз $\Delta\varphi$ буде кратною 2π і коливання, які збуджуються в точці P обома хвилями, будуть відбуватися з однаковою фазою. Тобто вираз (13.5) є *умовою інтерференційного максимуму*.

Якщо оптична різниця ходу Δ дорівнює напівцілому числу довжин хвиль у вакуумі:

$$\Delta = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda_0,\ (m = 0, 1, 2, ...), \tag{13.6}$$

то різниця фаз $\Delta\varphi$ буде дорівнювати $\Delta\varphi = \pm(2m+1)\pi,$ і коливання, які збуджуються в точці Р обома хвилями, будуть відбуватися в протифазі. Тобто вираз (13.6) є *умовою інтерференційного мінімуму*.

Якщо вибрати співвідношення між розмірами і відстанями, позначеними на рис.13.1, так, що $x << L$, а $d << L,$ то для оптичної різниці ходи променів S_1P та S_2P можна отримати вираз:

$$\Delta = n \cdot \frac{xd}{L}\ , \tag{13.7}$$

де n – показник заломлення середовища, x – відстань від центру екрана до точки спостереження, d – відстань між щілинами.

Основними параметри, що характеризують інтерференційну картину є:

1. *Координати максимумів інтенсивності* – відстані від центру інтерференційної картини до точок, в яких спостерігаються максимуми інтенсивності (рис.13.1.с). Їх визначають за формулою

$$x_{\max} = \pm\ m \cdot \frac{L}{d} \cdot \lambda_0 \cdot n = \pm\ m \cdot \frac{L}{d} \cdot \lambda\ ,\ (m = 0, 1, 2, ...), \tag{13.8}$$

де, m – порядок інтерференційного максимуму, L – відстань від щилин до екрану, d – відстань між щілинами, λ_0 – довжина хвилі в вакуумі, n – показник заломлення, λ – довжина хвилі в наявному середовищі.

2. *Координати мінімумів інтенсивності* – відстані від центру інтерференційної картини до точок, в яких спостерігаються мінімуми інтенсивності (рис.13.1.с). Їх визначають за формулою

$$x_{\min} = \pm(m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{L}{d} \cdot \lambda_0 \cdot n = \pm\ (m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{L}{d}\lambda\ ,\ (m = 0, 1, 2, ...). \tag{13.9}$$

Встановлено, що зі збільшенням чисельних значень $x_{\min}$. збільшується ширина дифракційної картини, а зі зменшенням значення $x_{\min}$, ширина дифракційної картини зменшується.

3. *Відстань між інтерференційними смугами*, яка являє собою відстань між сусідніми максимумами, та ширина інтерференційної смуги, яка являє собою

відстань між сусідніми мінімумами. Обидві величини позначаються однаково та розраховуються за однією й тією ж формулою

$$\Delta x = \frac{L}{d} \cdot \lambda . \qquad (13.10)$$

4. *Інтенсивність світла* в будь якій точці екрану $I(x)$.

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x) I_2(x)} \cdot \cos\Delta\varphi = \\ = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x) I_2(x)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{xd}{L}\right). \qquad (13.11)$$

13.3 Опис комп‘ютерної програми.

Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рисунку 13.2. Інтерфейс програми поділяється на 2 частини.

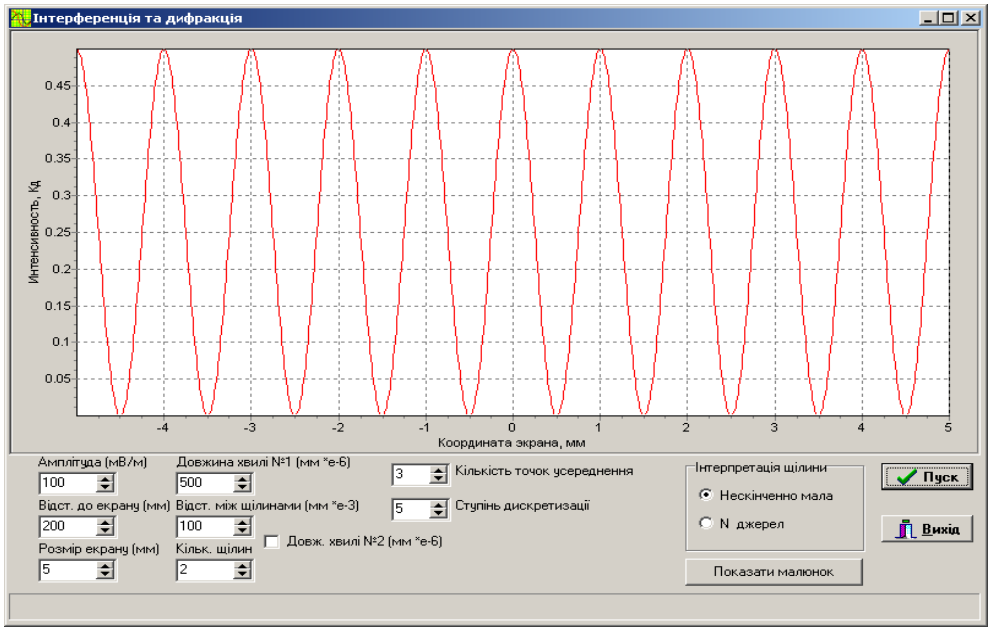


Рисунок 13.2.

Перша частина розташована у верхній частині робочого вікна і, в залежності від обраного режиму зображення, відтворює або реальну інтерференційну картину у виді темних та світлих смуг, або графік розподілу інтенсивності світла удовж екрану.

Друга частина розташована у нижній частині робочого вікна, являє собою набір опцій, що дозволяють керувати фізичними параметрами самого

експерименту, параметрами, що задають точність відтворення інтерференційної картини і параметрами інтерпретації щілини як джерела світла.

Опції керування параметрами, що задають точність відтворення інтерференційної картини (“Кількість точок усереднення” та “Ступінь дискретизації”), встановлюються за замовченням при запуску програми. При проведенні експерименту перемикач параметрів інтерпретації щілини як джерела світла знаходиться в позиції “Нескінченно мала” і протягом всього експерименту також залишається незмінним. Для відображення встановлених параметрів натискається кнопка “Пуск”.

13.4 Інструкція користувачу

1. Виставити параметри довжини хвилі λ та відстані d згідно з таблицею 13.1, амплітуду $A = 100$ мВ/м, розмір екрану x=5 мм, кількість щілин $M = 2$ та відстань до екрану $L = 150 \cdot 10^{-3}$ мм (кількість точок усереднення – 3, ступінь дискретизації – 5).

Таблиця 13.1 – Вихідні дані

№ вар.	λ, $\times 10^{-6}$ мм	d, $\times 10^{-3}$ мм	№ вар.	λ, $\times 10^{-6}$ мм	d, $\times 10^{-3}$ мм
1	400	50	7	600	50
2	400	100	8	600	100
3	400	150	9	600	150
4	500	50	10	700	500
5	500	10	11	700	100
6	500	150	12	700	150

Натискаючи кнопку “Пуск”, отримати зображення графіку розподілу інтенсивності світла на екрані та визначити ширину інтерференційної смуги Δx, а також величини координат мінімумів інтенсивності, які виникають по обидва боки центрального максимуму (x_{1min} – по праву та x_{2min} – по ліву сторону). Для більш точного виконання завдання збільшити масштаб області вказаних мінімумів за допомогою лівої кнопки миші, охопивши відповідну область, та отримати деталізоване зображення (рис 13.3). Зарисувати або зробити прінтскріни графіку розподілу інтенсивності світла та деталізованого зображення по якому визначається значення координати x_{min} та Δx.

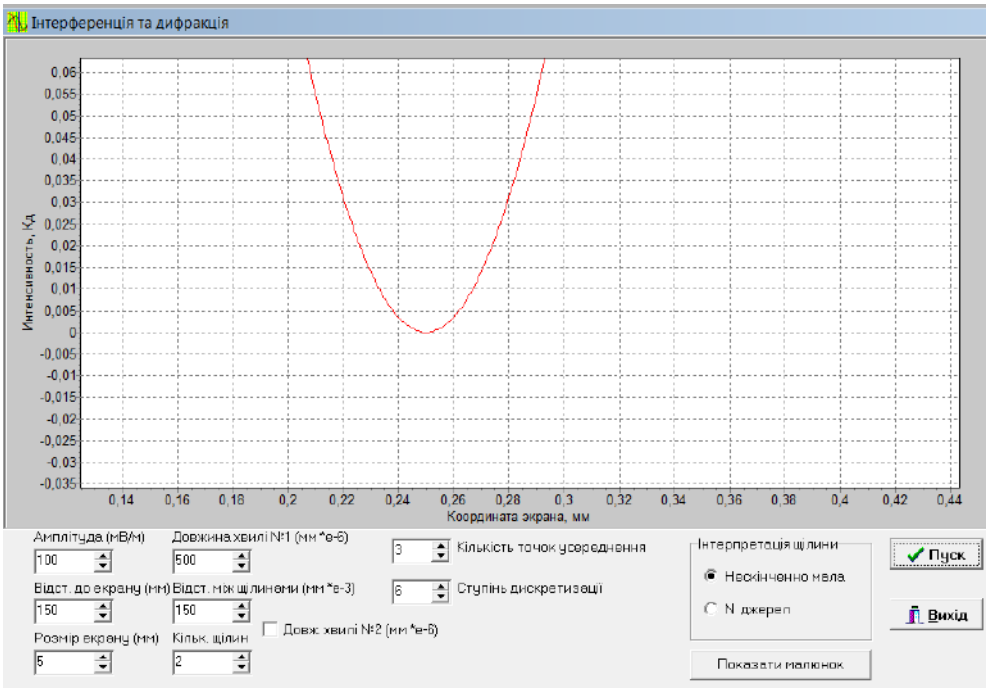


Рисунок. 13.3.

2. Виставити відстань до екрану $L = 200$ мм та відстань між щілинами $d = 100 \cdot 10^{-3}$ мм. Послідовно змінюючи довжину хвилі λ за значеннями наведеними в таблиці 13.2, у попередній спосіб, експериментально визначити, як залежить координата інтерференційного мінімуму $x_{min\ експ}$ від довжини світла λ. Отримані дані занести у таблицю 13.2.

Таблиця 13.2. – Результати вимірювань та розрахунків x_{min}

λ, $\times 10^{-6}$ мм	400	440	480	500	540	580	600
$x_{min\ експ}$, мм							
$x_{min\ теор}$, мм							

3. За формулою 13.9 виконати теоретичний розрахунок залежності координати інтерференційного мінімуму $x_{min\ теор}$ для тих самих довжин хвиль, що наведені у таблиці 13.2. Отримані дані занести до таблиці 13.2. Побудувати графіки залежності $x_{min\ експ}(\lambda)$ та $x_{min\ теор}(\lambda)$. Зробити висновок, як залежить x_{min} від λ, та наскільки точно співпадають значення x_{min}, що отримані експериментальним шляхом, з теоретичним розрахунком.

4. Зафіксувати величину λ (згідно з таблицею 13.1 для номера свого варіанту). Послідовно змінюючи відстань між щілинами d за значеннями наведеними в таблиці 13.3, експериментально визначити, як змінюється ширина інтерференційної смуги $\Delta x_{експ,}$ в залежності від величини d. Отримані дані занести до таблиці 13.3. Зарисувати або зробити прінтскріни деталізованих зображень областей, по яких визначалась ширина інтерференційної смуги $\Delta x_{експ,}$. За формулою 13.10 провести теоретичний розрахунок ширини інтерференційної смуги $\Delta x_{теор}$ в залежності від величини d. Отримані з розрахунку дані занести до таблиці 13.3. Порівняти значення $\Delta x_{експ,}$ та $\Delta x_{теор}$, та зробити висновок, як змінюється величина Δx із збільшенням величини d.

Таблиця 13.3. – Результати вимірювань та розрахунків Δx

L, мм	60	80	100
$\Delta x_{експ}$, мм			
$\Delta x_{теор}$, мм			

5. Зафіксувавши величини λ та d згідно з таблицею 13.1 для номера свого варіанту. Послідовно змінюючи величину L за значеннями, що наведені в таблиці 13.4, визначити величини Δx та інтенсивність I для кожного значення L. Отримані дані занести в таблицю 13.4. Зарисувати або зробити прінтскріни інтерференційних картин для випадків L=50 мм, та L=200 мм. На підставі отриманих результатів зробити висновок, як змінюються величини Δx та I із збільшенням величини L.

Таблиця 13.4. – Результати вимірювань Δx та I

L, мм	50	100	150	200
Δx, мм				
I, Кд				

13.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, чисельні значення фізичних величин визначених у кожному пункту завдання, та їх розрахунків, а також відповідних рисунків або прінтскрінів, таблиць та графіків. Крім цього необхідно навести

висновки про те, як зміна кожного з параметрів λ, d та L впливає на величини x_{min}, Δx, I.

13.6. Контрольні питання

1. Що називається інтерференцією?
2. Які хвилі називають когерентними?
3. Що називається інтенсивністю світла (хвильових коливань)?
4. Яка складова ЕМХ (електрична або магнітна) розглядається при інтерференції світла?
5. Які методи створення когерентних хвиль використовуються для утворення інтерференційної картини?
6. В чому полягає суть метода Юнга?
7. В чому полягає принцип Гюйгенса-Френеля?
8. Як залежить інтенсивність результуючого коливання I від $\cos\Delta\varphi$ при накладанні двох когерентних хвиль.
9. Поясніть чому повинен дорівнювати зсув фаз двох коливань, щоб, в деякій точці простору виник інтерференційний максимум.
10. Поясніть чому повинен дорівнювати зсув фаз двох коливань, щоб, в деякій точці простору виник інтерференційний мінімум.
11. Чому повинна дорівнювати оптична різниця ходу двох коливань, щоб, в деякій точці простору виник інтерференційний максимум.
12. Чому повинна дорівнювати оптична різниця ходу двох коливань, щоб, в деякій точці простору виник інтерференційний мінімум.
13. Що називають координатою максимуму інтенсивності? Як розрахувати цю величину, якщо відомі величини L, d, λ.
14. Що називають координатою мінімуму інтенсивності? к розрахувати цю величину, якщо відомі величини L, d, λ.
15. Що називають відстанню між інтерференційними смугами, та шириною інтерференційної смуги Δx. Яким чином їх розраховують.
16. За якою формулою можна визначити інтенсивность світла в будь якій точці екрану $I(x)$ у випадку, коли інтенсивності обох хвиль однакові $I_1 = I_2 = I_0$

14 ВИВЧЕННЯ ДИФРАКЦІЇ СВІТЛА НА ОДНІЙ ТА СИСТЕМІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЩІЛИН

14.1. Мета роботи

Базуючись на принципі Гюйгенса-Френеля, дослідити основні властивості явища дифракції світла на одній, двох та системі паралельних щілин, що утворюють дифракційну решітку.

14.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Явище дифракції полягає у відхиленні від прямолінійного розповсюдження світла, що призводить до його проникнення в область геометричної тіні. Явище дифракції завжди супроводжується інтерференцією променів, відхилених від прямолінійного розповсюдження.

В теорії дифракції розрізняють в залежності від співвідношення між розмірами джерела світла b, відстані від джерела до екрану, на якому спостерігається дифракційна картина L, довжини хвилі λ такі різновиди дифракції (рис.14.1) [5]:

$$\frac{b^2}{L\lambda}\begin{cases} << 1 - \textit{дифракція Фраунгофера}, \\ \approx 1 - \textit{дифракція Френеля}, \\ >> 1 - \textit{геометрична оптика}. \end{cases}.$$

Нехай на нескінченно довгу широку щілину падає плоска світлова хвиля (рис.14.1). Оскільки щілина нескінченно довга (в напрямі, перпендикулярному площині рисунка) картина, яка буде спостерігатися в будь-якій площині, що перпендикулярна щілині, буде однакова.

Внаслідок дифракції промені будуть відхилятися від первинного напрямку. Кут відхилення променя φ (рис.14.1) носить назву кута дифракції. Розглянемо пучок променів, який приходить в таку точку P (рис.14.1), що різниця ходу Δ між крайніми променями буде дорівнювати довжині хвилі $\Delta = \lambda = 2\frac{\lambda}{2}$. Тоді весь пучок можна розділити на такі дві рівні зони, котрі називають зонами Френеля, для яких різниця ходу між кожним променем з першої зони і відповідним променем другої зони буде рівною $\lambda / 2$ [2, 5]. В результаті інтерференції такі пучки променів взаємно загасяться. В результаті, через точку P буде проходити темна смуга – дифракційний мінімум.

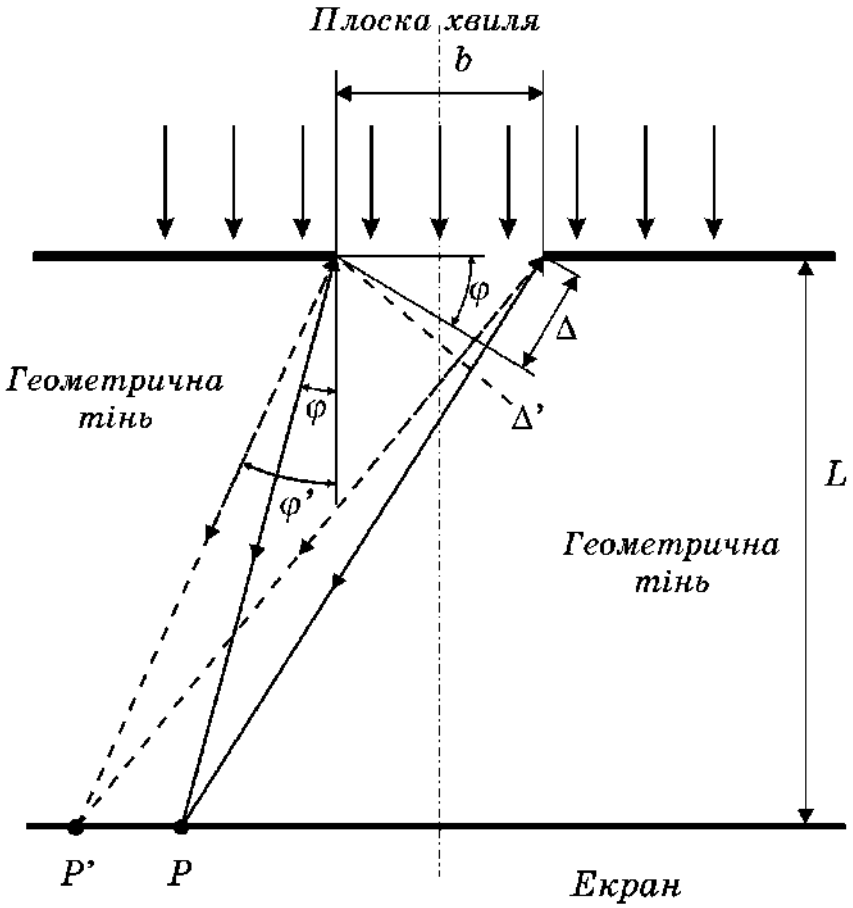


Рисунок 14.1

Можна знайти таку точку P', для якої різниця ходу Δ' між крайніми променями буде дорівнювати $\Delta' = \frac{3}{2}\lambda$. Тоді весь пучок можна розділити на три зони Френеля: перша та друга зони будуть гасити одна одну, а третя залишиться не загашеною і дасть дифракційний максимум. Переходячи до узагальнення, можна сказати, що пучки променів, які дифрагують під кутами, що відповідають парному числу зон Френеля, утворюють на екрані дифракційні мінімуми, а пучки, які дифрагують під кутами, що відповідають непарному числу зон Френеля, утворюють дифракційні максимуми.

Тоді умова дифракційних максимумів на одній щілині має вигляд

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} = \pm(m+\frac{1}{2})\lambda, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{14.1}$$

Аналогічно умова для мінімумів

$$\Delta = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda, \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{14.2}$$

З рисунка 14.1 видно, що

$$\Delta = b \cdot \sin\varphi . \qquad (14.3)$$

Підставляючи (14.3) в (14.1) та відповідно в (14.2) можна отримати кути, під якими спостерігаються максимуми

$$\sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2b}, \qquad (14.4)$$

та мінімуми

$$\sin\varphi = 2m\frac{\lambda}{2b}. \qquad (14.5)$$

Розглянемо тепер дифракцію від двох щілин. Нехай пучок паралельних монохроматичних променів падає перпендикулярно екрану з щілинами, ширина яких дорівнює b, ширина непрозорої ділянки a, а стала решітки $d = a + b$ дорівнює відстані між щілинами (рис.14.2). Розглянемо промені, які падають, наприклад, на ліві краї обох щілин. З рисунка видно, що різниця ходу $\Delta = d \cdot \sin\varphi$.

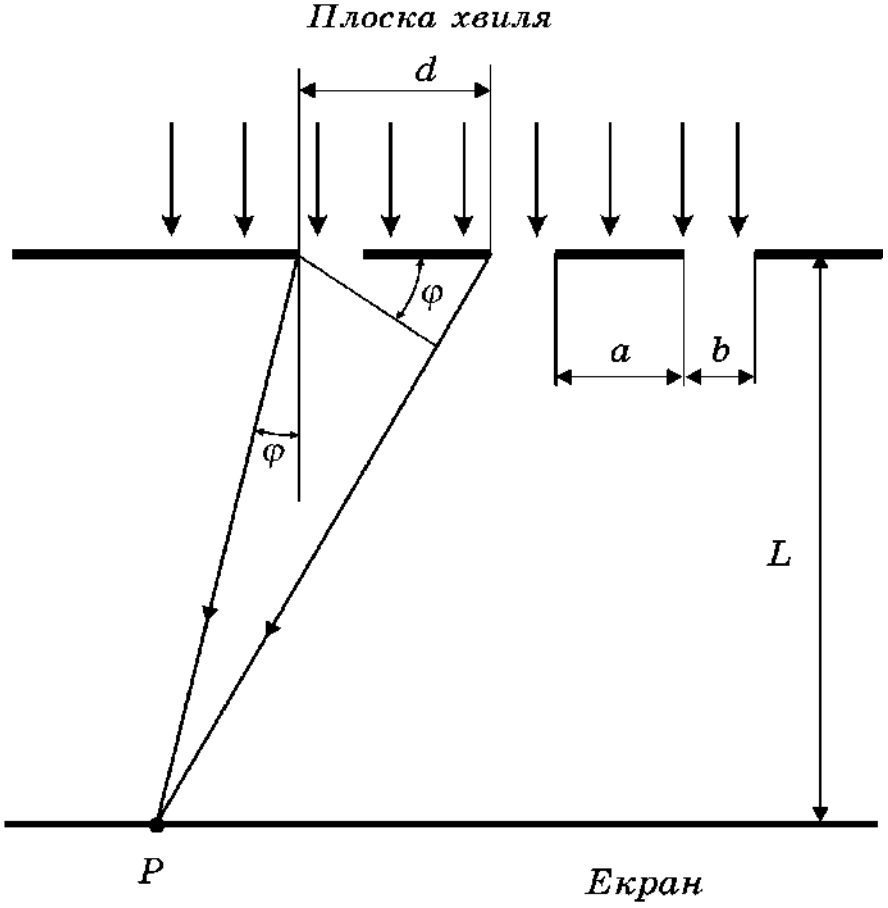


Рисунок 14.2

Результат інтерференції в точці P буде залежати від Δ. Якщо розглядати цей процес з точки зору зон Френеля, то в цьому випадку ми будемо мати

випромінювання, що йде від однакових зон Френеля, але різних щілин. Тобто для двох щілин (дифракційної решітки) при $\Delta = m\lambda$, умова

$$d \cdot \sin\varphi = \pm m\lambda, \ (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14.6}$$

буде умовою максимуму. Причому цей результат залишається незмінним для будь-якого числа щілин. При великому числі щілин їх послідовність створює дифракційну решітку.

Дифракційна решітка – важливий спектральний прибор, за допомогою якого визначають довжину хвилі світла. Основними його характеристиками є дисперсія та розрізнювальна сила.

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}, \ [D] = 1\frac{рад}{мм}, \tag{14.7}$$

де кут $\Delta\varphi$ – кутова відстань між спектральними лініями, довжини хвиль яких відрізняються на $\Delta\lambda$.

Розрізнювальною силою спектрального прибору називають величину

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \tag{14.8}$$

де $\Delta\lambda$ – мінімальна різниця довжини хвиль двох спектральних ліній, які ще можна розрізнити, λ – середня довжина хвиль λ_1 та λ_2.

Розрізнювальна сила решітки R визначається формулою

$$R = mN, \tag{14.9}$$

де N – число щілин, m – порядок дифракційного максимуму.

Кутова дисперсія решітки D (для невеликих значень m) дорівнює

$$D \approx \frac{m}{a+b} = \frac{m}{d}. \tag{14.10}$$

14.3 Опис комп‘ютерної програми.

Обчислення виконуються за програмою, яка використовується в роботі 14. В даній роботі програма рисує на екрані залежність інтенсивності світла від координати екрану для щілини кінцевої ширини та системи з будь-якою кількістю паралельних щілин, що утворюють дифракційну решітку, в широкому діапазоні зміни параметрів: ширини щілин, відстані між щілинами, відстані від площини, в якій прорізані щілини, до екрану спостереження, довжини хвилі. Розрахунок дифракційної картини можна виконувати відразу

для двох довжин хвиль, що дозволяє моделювати явище дисперсії та обчислити розрізнювальну силу і кутову дисперсію решітки.

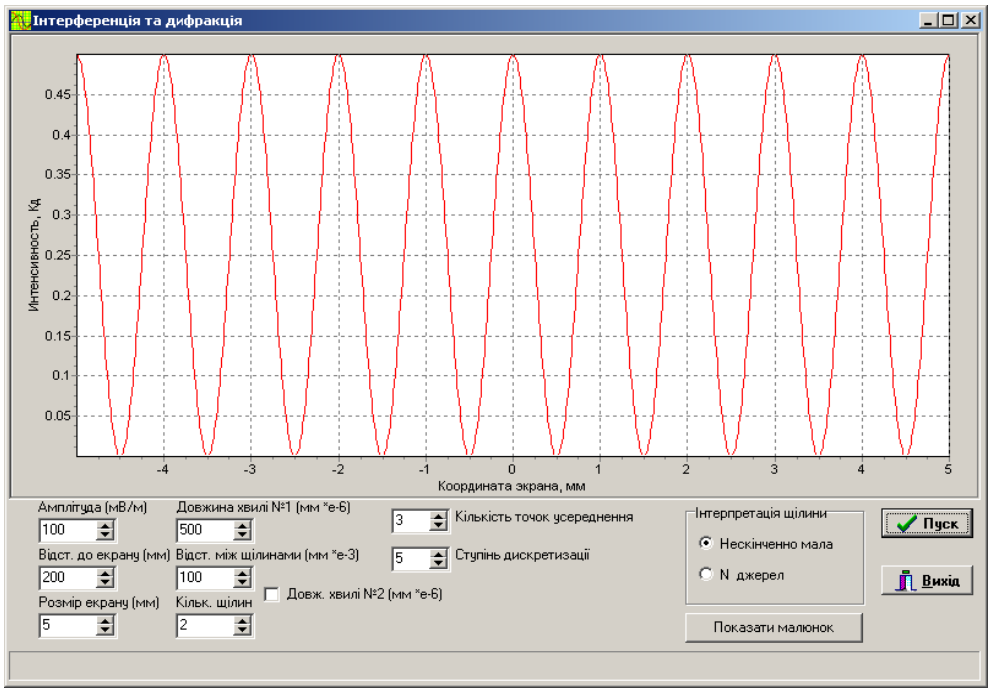


Рисунок 14.3

14.4 Інструкція користувачу

1. Отримати дифракційну картину для світла з довжиною хвилі λ (за таблицею 14.1) від однієї щілини $N=1$ шириною b (взяти значення b з таблиці 14.1, відстань між щілинами $100\cdot10^{-3}$ мм, кількість точок усереднення 3, ступінь дискретизації 5, кількість розмежувальних щілин 20, відстань до екрану $L=200$ мм. Записати значення інтенсивності та ширину центрального максимуму для трьох значень b $(b, 2b, 3b)$. Зробити висновки щодо залежності інтенсивності і ширини центрального максимуму від ширини щілини.

2. За тих же вихідних даних отримати дифракційну картину для $L=5$ мм, $L=100$ мм та $L=300$ мм (інші величини взяти з таблиці 14.1). Навести графіки.

3. Задати значення λ_1 згідно з таблицею 14.1, $b=20\cdot10^{-3}$ мм, $L=200$ мм, $N=3$, $m=2$. Обчислити кут дифракції (кут, під яким видно із центра дифракційної системи максимум m-го порядку (рис 14.1). Зверніть увагу на те, що центральний максимум має порядок дифракції $m=0$). Для цього треба визначити відстань x_m від центра екрану до центра m-го максимуму, тоді

$tg\varphi = \frac{x_m}{L}$. Порівняйте значення φ, отримане за цим розрахунком, із значенням φ, обчисленим за формулою (14.6).

Таблиця 14.1 – Вихідні дані

№ вар.	λ, $\times 10^{-6}$ мм	a, $\times 10^{-3}$ мм	b, $\times 10^{-3}$ мм	№ вар.	λ, $\times 10^{-6}$ мм	a, $\times 10^{-3}$ мм	b, $\times 10^{-3}$ мм
1	400	50	20	7	600	50	20
2	400	100	40	8	600	100	40
3	400	150	60	9	600	150	60
4	500	50	20	10	700	50	20
5	500	10	40	11	700	100	40
6	500	150	60	12	700	150	60

4. Ввімкнути другу довжину хвилі λ_2. В цьому випадку кожна щілина є джерелом випромінювання двох хвиль з довжинами λ_1 та λ_2. Значення параметрів: λ_1 – згідно з таблицею 14.1, $\lambda_2 = 550 \cdot 10^{-6}$ мм, $L = 200$ мм, відстань між щілинами $a = 100 \cdot 10^{-3}$ мм, ширина щілини $b = 20 \cdot 10^{-3}$ мм. Кількість щілин $N = 4$. Переконатись, що максимум третього порядку $m = 3$ (або другого порядку) роздвоєний. Змінюючи λ_2, дійти до такого значення λ_2 , щоб при найменшій різниці $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ максимум третього (або другого) порядку ще був роздвоєний, тобто при цьому ще можна розрізнити дві хвилі з довжинами λ_1 та λ_2. Записати координати x_1, x_2 положення максимумів для λ_1 та λ_2.

5. Обчислити розрізнювальну силу як $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. Порівняти отримане значення R з величиною R, визначеною за теоретичною формулою (14.9), справедливою тільки для решітки. Обчислити кутову дисперсію за формулою $D = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}$, де кут φ можна визначити з отриманих даних:

$$tg\varphi_1 = \frac{x_1}{L},\ tg\varphi_2 = \frac{x_2}{L}.$$

Розрахувати D за теоретичною формулою та порівняти із значенням, отриманим за допомогою дифракційної картини.

6. Збільшити ($N = 5$), а потім зменшити ($N = 3$) кількість щілин . Повторити розрахунки R та D. Зробити висновок: як залежить розрізнювальна здатність та кутова дисперсія решітки від кількості щілин.

14.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати розрахунків кута дифракції φ, розрізнювальної сили R , кутової дисперсії решітки D, та їх порівняння з відповідними величинами, розрахованими за формулами (14.7), (14.8), (14.9), (14.10), висновки.

14.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає явище дифракції?
2. Який фізичний смисл принципу Гюйгенса?
3. На яких положеннях оснований принцип Гюйгенса-Френеля? Що він дає?
4. Яким явищем завжди супроводжується явище дифракції?
5. Які різновиди дифракції розрізняють в залежності від співвідношення таких параметрів як розміри джерела світла, довжина хвилі та відстані між джерелами та точкою спостереження?
6. Що таке зони Френеля?
7. Як, виходячи з поняття зон Френеля, можна сформулювати загальне правило щодо максимуму та мінімуму для пучків променів, які приходять в одну точку від однієї широкої щілини?
8. В чому відмінність дифракції Френеля від дифракції Фраунгофера?
9. Що таке кут дифракції?
10. Як зміниться дифракційна картина при дифракції Фраунгофера на одній щілині при збільшенні довжини хвилі? Ширини щілини?
11. Запишіть умову максимуму для двох щілин. Чи зміниться вона для $N>2$?
12. Що являє собою дифракційна решітка?
13. Запишіть умови дифракційних мінімумів для однієї щілини і головних максимумів на решітці.
14. Запишіть якою формулою визначається розрізнювальна здатність дифракційної решітки. Від чого вона залежить?
15. Як визначається кутова дисперсія решітки?

ЧАСТИНА V. АТОМНА ФІЗИКА

15 ДОСЛІД РЕЗЕРФОРДА З РОЗСІЮВАННЯ α-ЧАСТИНОК

15.1 Мета роботи

Вивчити будову атома, впевнитись у справедливості теорії, яка базується на кулонівській взаємодії між α-частинкою та ядром атома.

15.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Розподіл позитивних та негативних зарядів в атомі можна з'ясувати шляхом безпосереднього "зондування" внутрішніх областей атома. Такий експеримент здійснив Резерфорд за допомогою α-частинок, спостерігаючи за напрямком їхнього руху при проходженні крізь тонкий шар речовини [10].

Дослід був здійснений таким чином. Вузький пучок α-частинок, які випромінювались радіоактивною речовиною P (рис.15.1), падав на тонку металічну фольгу Φ. Розсіяні α-частинки спричиняли сцинтиляції, які спостерігались у мікроскоп M. Екран та мікроскоп можна було встановлювати під будь-яким кутом ϑ. Весь пристрій знаходився у вакуумі.

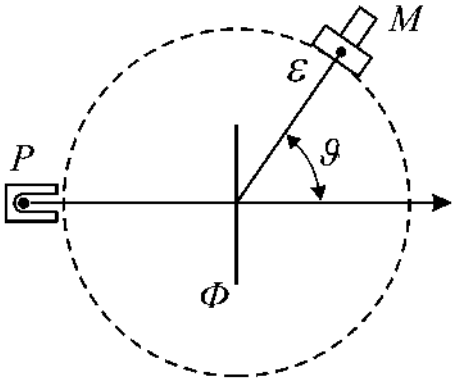


Рисунок 15.1

Шар речовини фольги був настільки тонкий, що кожна α-частинка при проходженні крізь нього пролітала поблизу тільки одного ядра і зазнавала лише одного розсіювання.

Відхилення α-частинок обумовлені дією на них тільки з боку ядра. Помітного відхилення через взаємодію з електронами бути не може, оскільки маса електрона на чотири порядки менше маси α-частинки. Коли частинка пролітає поблизу ядра, на неї діє кулонівська сила відштовхування

$$F = k\frac{2Ze^2}{r^2}, \qquad (15.1)$$

де $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, ε_0 – електрична стала, e – заряд електрона, Z – порядковий

номер елемента в таблиці Менделєєва, r – відстань між α-частинкою та ядром. Відстань від ядра до вихідного напрямку польоту α-частинки називається прицільним параметром b. Чим ближче від ядра пролітає частинка, тим сильніше вона повинна відхилятися.

В результаті дослідів виявилось, що на великі кути (близькі до 180°) розсіювалася дуже мала кількість частинок. Аналізуючи результати, Резерфорд дійшов висновку, що сильне розсіювання частинок можливе тільки в тому разі, якщо всередині атома існує надзвичайно сильне електричне поле, яке створюється зарядом, зв'язаним з великою масою та сконцентроване в малому об'ємі.

Базуючись на цьому висновку, Резерфорд запропонував у 1911 р. ядерну модель атома. Згідно з якою атом являє собою систему зарядів, в центрі якої розташоване важке позитивне ядро з зарядом Ze розміри якого не перевищують 10^{-14} *м*, а навколо нього розташовані Z електронів.

Виходячи з таких положень, Резерфорд розробив кількісну теорію розсіювання α-частинок, згідно з якою відхилення α-частинок обумовлені дією на них з боку атомного ядра. Помітного відхилення внаслідок взаємодії з електронами бути не може, оскільки маса електрона на чотири порядки менше маси α-частинки. Коли частинка пролітає поблизу ядра, на неї діє кулонівська сила відштовхування

$$F = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{15.2}$$

Сила (15.2) залежить від відстані як $\frac{\alpha}{r^2}$, (якщо позначити $\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0} = \alpha$) і являє собою центральну силу. Якщо $F(r) = \frac{\alpha}{r^2}$, де $\alpha > 1$, то це відштовхуюча сила. У випадку відштовхування траєкторією частинки є гіпербола, а кут ϑ являє собою кут між асимптотами гіперболи.

За формулою, яку отримав Резерфорд, можна обчислити відносне число $\frac{dN_\vartheta}{N}$ від загального числа α-частинок N, які розсіюються на ядрі в межах кута від ϑ до $\vartheta + d\vartheta$.

$$\frac{dN_\vartheta}{N} = na \cdot \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha V^2}\right)^2 \cdot \frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{4\sin^4\left(\vartheta/2\right)}, \tag{15.3}$$

де n – число атомів в одиниці об'єму, a – товщина фольги, $m_\alpha = 6,65 \cdot 10^{-27}\,кг$ та V – маса та початкова швидкість α-частинки.

Ця формула відома як формула Резерфорда для розсіювання α-частинок.

Для даної речовини певної товщини фольги формулу можна записати у вигляді

$$\frac{\Delta N_\vartheta}{N} = C \cdot \frac{\sin\vartheta}{\sin^4\left(\vartheta/2\right)} \cdot \Delta\vartheta, \qquad (15.4)$$

де $C = na \cdot \left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha V^2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, ΔN_ϑ – число частинок, які розсіюються в межах кутів від ϑ до $\vartheta + \Delta\vartheta$.

Оскільки C та $\Delta\vartheta$ не змінюються протягом експерименту, то відношення $\frac{\Delta N_\vartheta}{N}$ для певного кута можна знайти через відношення $\frac{\sin\vartheta}{\sin^4\left(\vartheta/2\right)}$ для цього кута до суми значень $\frac{\sin\vartheta}{\sin^4\left(\vartheta/2\right)}$ для всіх кутів.

15.3 Опис комп'ютерної програми

Інтерфейс програми зображено на рисунку 15.2. Програма базується на модифікованому алгоритмі Ейлера та дозволяє розраховувати і відображати на екрані траєкторію α-частинки в полі нерухомого ядра з величиною заряду $q = Ze$. Внаслідок того, що характерна відстань взаємодії є порядку 10^{-15} м, для сили вираженої в ньютонах будуть виходити дуже великі числа, які не придатні для комп'ютера. Тому відстані будемо вимірювати в фермі ($1\,ф = 10^{-15}\,м$) [12], а швидкості в одиницях швидкості світла $c = 3 \cdot 10^8\,м/с$.

На панель виведені поля для введення параметрів частинки, таких як знак заряду, її початкова швидкість (причому швидкість в одиницях швидкості світла всіх частинок – однакова), маса та величина заряду (в одиницях заряду електрона). Також значення заряду ядра Z (в одиницях заряду електрона), та діаметру отвору (прицільного параметру $b_{\max}$). Прицільний параметр b_i для кожної наступної частинки випадково змінюється в межах від b до $-b$.

Також у пункті меню "Файл" у розділі "Диаграмма" є можливість побачити розподіл кількості частинок ΔN_ϑ, кут відхилення яких попадає в

проміжок кутів від ϑ, до $\vartheta + \Delta\vartheta$. Значення $\Delta\vartheta$ можна встановити у полі “Интервал”

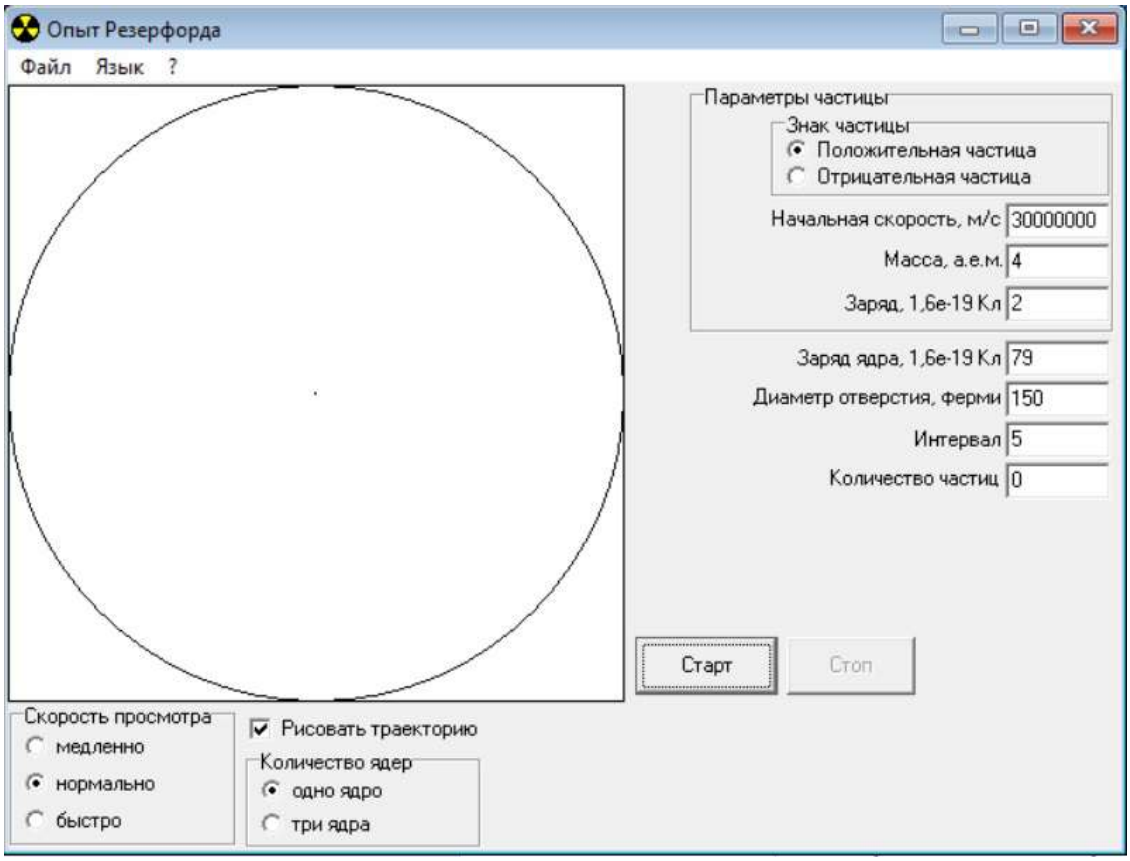


Рисунок 15.2

Величина кута ϑ, під яким розсіюється α-частинка, залежить від її швидкості та прицільного параметра b. При натисканні кнопки “Старт” α-частинки починають одна за одною вилітати із джерела, розташованого в лівій частині кола. При цьому в вікні “Количество частиц” відображається кількість вилетівши частинок. При досягненні необхідної кількості частинок натисніть кнопку “Стоп”. Для того, щоб обмежитися спостереженням однієї частинки, треба після натискування на кнопку “Старт”, відразу натиснути кнопку “Стоп”.

Отримуючи розподіл $\Delta N_{\vartheta}(\vartheta)$ для різного числа частинок N, можна переконатись, що розподіл, отриманий в комп’ютерному експерименті, буде тим ближчий до теоретичного, чим більше число частинок буде приймати участь в експерименті.

Програма дає можливість налаштовувати швидкість перегляду траєкторій. Щоб прискорити побудову діаграми при великому числі частинок, можна взагалі не рисувати траєкторії руху.

15.4 Інструкція користувачу

1. Задати “Диаметр отверстия”, тобто максимальне значення прицільного параметру $b_{\max} = 150\,\text{ф}$. Натиснути на кнопку “Старт” та спостерігати траєкторії руху α-частинок.

2. Змінюючи параметр $b_{\max}$ від 80 ф до 200 ф встановити, яку форму мають траєкторії α-частинок в залежності від значення b?

3. Задати початкову швидкість та $b_{\max}$, згідно з таблицею 15.1, та значення $\Delta\vartheta$ у полі “Интервал” 10°. Спостерігати розсіювання $N = 100$ частинок (у разі, якщо кількість частинок у відповідному полі вікна програми погано видно, або зовсім не видно, виділіть вказане значення у цьому полі лівою кнопкою миші, тоді колір цифр зміниться на білий). Зарисувати діаграму розсіювання частинок.

Таблиця 15.1 – Вихідні данні

№ вар.	$b_{\max}, ф$	Z	V, $\times 10^7$ м/с	№ вар.	$b_{\max}, ф$	Z	V, $\times 10^7$ м/с
1	300	79	3	7	300	79	3,5
2	300	79	3	8	300	79	3,5
3	300	79	3	9	300	79	3,5
4	200	79	3,5	10	200	79	3
5	200	79	3,5	11	200	79	3
6	200	79	3,5	12	200	79	3

4. Повторити дослід пункту 3 для $N = 1000$ та $N = 10000$ частинок.

5. Результати виконання роботи занести до таблиці 15.2.

Таблиця складена для випадку, коли $\Delta\vartheta = 10^\circ$, підраховано відношення для цього випадку величини $\dfrac{\sin\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)}$ змінної в формулі Резерфорда (15.4). В теоретичній величині $\dfrac{\Delta N_\vartheta}{N_T}$ N_T повинно підраховуватися як сума всіх значень

$\frac{\sin\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)}$, приведених у відповідній колонці таблиці 15.2, тобто $N_T = 3220$. В цьому випадку не має значення яку величину буде мати константа C у формулі (15.4).

Експериментальне значення $\frac{\Delta N_\vartheta}{N}$ підраховується для відповідного значення ϑ як відношення висоти стовпчика на діаграмі ΔN_ϑ до повного числа частинок, які приймають участь в експерименті.

Таблиця 15.2 – Результати розрахунків

$\vartheta,^\circ$	Експериментальні дані						Теоретичні дані	
	$N = 100$		$N = 1000$		$N = 10000$		$N_T = 3220$	
	ΔN_ϑ	$\frac{\Delta N_\vartheta}{N}$	ΔN_ϑ	$\frac{\Delta N_\vartheta}{N}$	ΔN_ϑ	$\frac{\Delta N_\vartheta}{N}$	$\frac{\sin\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)}$	$\frac{\Delta N_\vartheta}{N_T}$
10							2591	
20							410	
30							109	
40							49	
50							25	
60							14	
70							9,4	
80							5,8	
90							4	
100							2,8	

15.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, діаграми розсіювання частинок, результати вимірювань і розрахунків, зведені в таблиці, висновки на основі отриманих результатів за пунктами завдання 1...5.

15.6 Контрольні запитання і завдання

1. В чому полягає ідея експерименту Резерфорда?
2. З чого складалась експериментальна установка Резерфорда?
3. Яку модель атома запропонував Резерфорд, базуючись на результатах дослідів?
4. На чому базувалася кількісна теорія розсіювання α-частинок?
5. Яку траєкторію повинні описувати α-частинка в центральному полі кулонівської сили?
6. Що дає можливість обчислити формула Резерфорда?
7. Як описується рух α-частинки в полі ядра (яким алгоритмом)?
8. Що таке “прицільний параметр”?
9. В якому вигляді повинні бути представлені результати модельного експерименту?
10. Яким чином здійснюється порівняння теоретичних результатів (за формулою Резерфорда) та результатів модельного експерименту?

16 ВИВЧЕННЯ РУХУ МІКРОЧАСТИНКИ В ПОТЕНЦІАЛЬНІЙ ЯМІ НЕСКІНЧЕННОЇ ТА КІНЦЕВОЇ ГЛИБИНИ

16.1 Мета роботи

Дослідити рух мікрочастинки в потенціальній ямі нескінченної та кінцевої глибини, визначити власні значення енергії, власні хвильові функції мікрочастинки та ймовірність її знаходження в будь-якому інтервалі значень координат в потенційної ямі та за її межами. Вивчити вплив обмеженості та асиметрії потенціальних бар'єрів на зазначені величини.

16.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

Потенціальна яма – це обмежена область простору, що визначається фізичною природою взаємодії частинок , в якій потенціальна енергія частинки менша ніж за її межами.(рис.16.1)

Розглянемо рух частинки у випадку, коли її місцезнаходження обмежено, наприклад інтервалом $0 \le x \le a$. Графічно такий випадок можна подати за допомогою рис 6.6, де зображено залежність потенціальної енергії електрона від його розміщення на осі x. Ця задача деякою мірою наближено моделює рух електрона в атомі.

Одновимірний рух частинки в стаціонарному силовому полі, яке характеризується потенціальною енергією U визначається стаціонарним рівнянням Шредінгера:

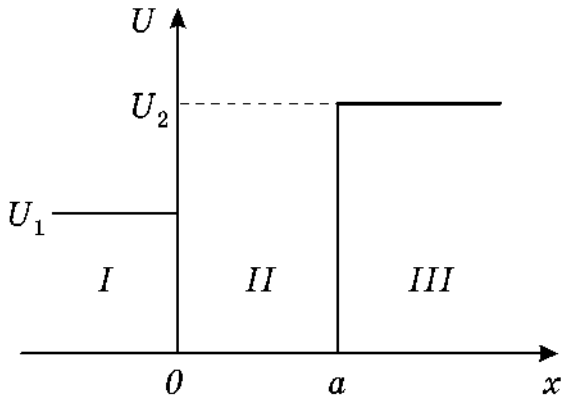


Рисунок 16.1

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0, \qquad (16.1)$$

де m – маса частинки;

E – повна енергія частинки;

$\psi = \psi(x)$ – псі-функція;

$\hbar$ – стала Планка, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

1. Спочатку розглянемо випадок для частинки в одновимірній прямокутній “потенціальній ямі” з нескінченно високими “стінками”. Потенціальна енергія частинки зовні та всередині потенціальної ями дорівнює

$$U(x)=\begin{cases}\infty, x<0;\\ 0, 0\le x\le a;\\ \infty, x>a\end{cases},$$

де a – ширина “ями”, а енергія відраховується від її дна.

Оскільки в середині “ями” ($0\le x\le a$) $U = 0$, тоді рівняння (16.1) перепишемо так

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0. \qquad (16.2)$$

Загальний розв’язок рівняння (16.2) будемо шукати у вигляді

$$\psi = Ae^{ikx}+Be^{-ikx},$$

де $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$.

Для розв’язання задачі треба задати *початкові умови***.** Оскільки потенціальна яма нескінченно глибока, то частинка може рухатися тільки всередині ями(область II). Імовірність її знаходження в областях I та III дорівнює нулю, тому й хвильова функція в цих областях дорівнює нулю:

$$\psi_I=\psi_{III}=0.$$

Але хвильова функція повинна бути неперервною. Тому *граничні умови* для даної задачі такі:

$$\psi(0)=0,\ \psi(a)=0.$$

Після застосування також умови нормування хвильової функції в результаті одержимо власні хвильові функції у вигляді

$$\psi_n(x)=i\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a},$$

що описують стоячі хвилі. Густина імовірності знаходження частинки всередині потенціальної ями дорівнює

$$\left|\psi_n(x)\right|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}.$$

Розв’язок рівняння (16.2) має фізичний зміст лише для тих значень енергії E, які утворюють дискретний спектр, тобто для

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\ (n=1,2,3...) \qquad (16.3)$$

де E_n – *власні значення енергії*, які залежать від цілого числа n. Отже, енергія частинки в "потенціальній ямі" з нескінченно високими "стінками" приймає лише *визначені дискретні значення*, тобто *квантується*. Квантові значення енергії E_n називають рівнями енергії, а число n, що визначає енергетичні рівні частинки, називають *головним квантовим числом*.

Таким чином, мікрочастинка в "потенціальній ямі" з нескінченно високими "стінками" може знаходитися тільки на визначеному енергетичному рівні E_n, інакше кажучи, частинка знаходиться в квантовому стані n.

Різниця енергій двох сусідніх рівнів, як це випливає із (16.3), дорівнює:

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(2n+1) \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}n. \qquad (16.4)$$

Звернемо увагу на те, що із (16.3) випливає, що мінімальна енергія частинки в потенціальній ямі не може дорівнювати нулю.

Квантовий стан, в якому енергія частинки мінімальна ($n=1$) називають основним станом. Енергія частинки в основному стані дорівнює

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} > 0 \ ,$$

що означає неможливість існування стану спокою квантової частинки на відміну від класичної.

2. Для несиметричної одновимірної ями (рис.16.1) в області I (ω) в рівнянні (16.1) необхідно покласти $U = U_1$, в області III ($x \ge a$) $U = U_2$, та в області II ($0 \le x \le a$) для вільного руху $U = 0$.

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_1 - E), \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_2 - E). \qquad (16.5)$$

Вводячи позначення (для різних областей), отримаємо з рівняння (16.1) відповідно для областей I, II, III рівняння:

$$x < 0: \qquad \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \qquad (16.6)$$

$$0 \le x \le a: \qquad \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k^2\psi_2 = 0, \qquad (16.7)$$

$$x > a: \qquad \frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k_2^2\psi_3 = 0. \qquad (16.8)$$

Розв'язок рівнянь (16.6), (16.7), (16.8) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1 e^{ik_1 x} + C_3 e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2 = C\sin(kx + \delta), \\ \psi_3 = C_2 e^{-ik_2 x} + C_4 e^{ik_2 x} \end{cases} . \qquad (16.9)$$

Всередині ями ψ-функція змінюється періодично (осцилює). За її межами, коли $x \to \pm\infty$, щоб задовольнити умовам на нескінченності, необхідно покласти $C_3 = C_4 = 0$, бо нас цікавить випадок, коли частинка буде рухатись в межах ями. А це буде тоді, коли $U_1 > E$, $U_2 > E$. За цих умов величини U_0, k_2 будуть уявними: $k_1 = iP_1$, $k_2 = iP_2$, і експоненти при коефіцієнтах наближатися до нескінченності ($e^{-k_1 x} \to \infty$, коли $x \to -\infty$; $e^{k_2 x} \to \infty$, коли $x \to \infty$).

На межах ями $(x = 0, x = a)$ ψ-функції та їх похідні повинні задовольняти граничним умовам

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases}, \qquad (16.10)$$

Якщо тепер підставити вирази ψ-функцій (16.9), (поклавши в них $C_3 = C_4 = 0$) в граничні умови (16.10), можна отримати однорідну систему рівнянь, сумісний розв'язок якої врешті решт приведе до трансцендентного рівняння відносно хвильового числа k:

$$ka = n\pi - \arcsin\frac{k\pi}{\sqrt{2mU_1}} - \arcsin\frac{k\pi}{\sqrt{2mU_2}}, \text{ де } n=1,2,3\ldots, \qquad (16.11)$$

а значення arcsin беруться в сенсі головного значення. Корені рівняння (16.11) визначають дискретні рівні енергії $E_n = \frac{k_n^2 \hbar^2}{2m} n^2$.

Для кожного значення n є один єдиний корінь, значення n нумерують корені в порядку їх зростання.

Обчислення коренів здійснюється за методом Ньютона, який полягає ось у чому. Нехай y_0 є наближене значення кореня рівняння $F(y) = 0$, тоді, як більш точне наближене значення є

$$y_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F^1(y_0)}\ ,\ y_2 = y_1 - \frac{F(y_1)}{F^1(y_1)} \text{ і т.д.}$$

Як нульове наближення вибираємо значення в рівнянні (16.8) $(ka)_0 = n\pi$, що відповідає кореням рівняння для ями з нескінченно високими бар'єрами.

16.3 Опис комп’ютерної програми

Інтерфейс програми зображено на рисунку 16.2. Програма видає на екран монітора: схему енергетичних рівнів електрона в несиметричній ямі, тобто в ямі, обмеженій потенціальними стінками різної “висоти” $U_1 \neq U_2$ (в частинному випадку в симетричній ямі $U_1 = U_2$); графік ψ-функції, квадрата модуля ψ-функції $|\psi|^2$, ймовірність P знаходження мікрочастинки в будь-якій області всередині ями та за її межами. Отримати відповідну інформацію можна, натиснувши мишкою на кнопки: ψ, $|\psi|^2$, $\sqcup\!\sqcap$ або P.

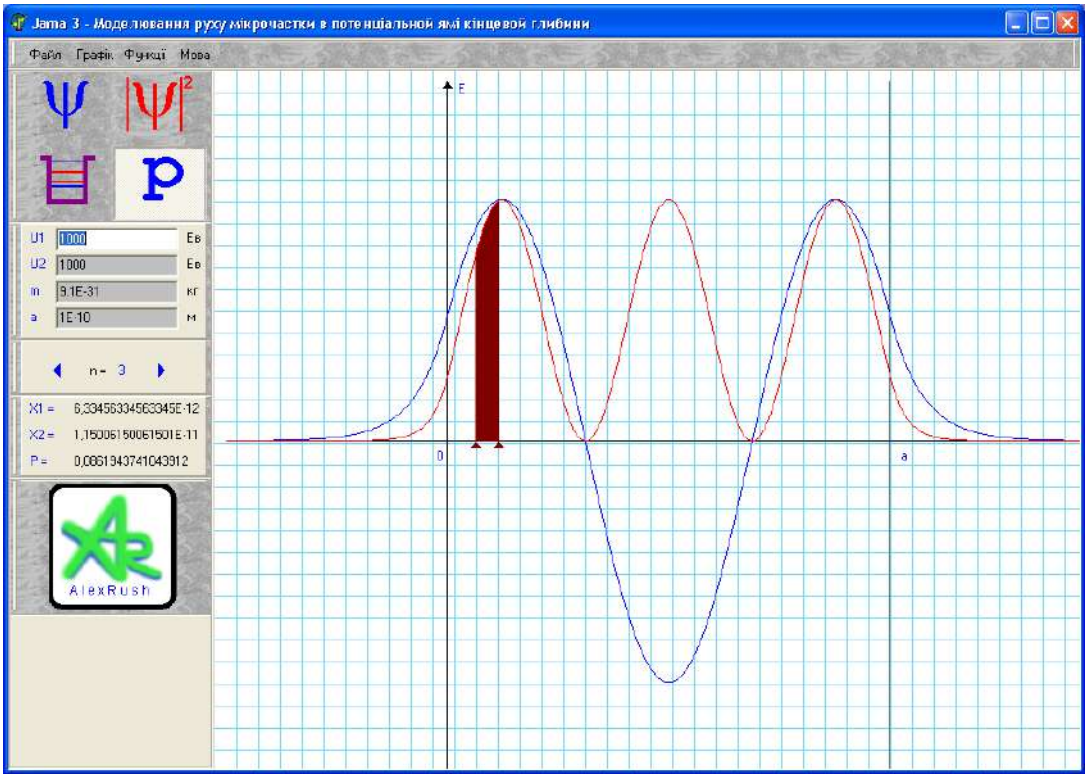


Рисунок 16.2

У відповідних вікнах можна змінювати значення U_1 та U_2, ширини ями a, маси частинки m. За допомогою лівої кнопки миші можна встановлювати дві мітки (ліва і права мітки) в вибраних точках графіку квадрата модуля ψ-функції і визначати ймовірність P знаходження частинки в області між цими точками. Змінюючи номер n ψ-функції можна отримувати графіки ψ, $|\psi|^2$ та значення P для будь-якого значення n від 1 до $n_{\max}$.

Програма дає можливість проводити обчислення в широких межах зміни параметрів.

16.4 Інструкція користувачу

1. Задати значення a, $U_1 = U_2 = U_1'$ згідно з таблицею 16.1. Отримати на екрані схему рівнів енергії (синім кольором позначені рівні E_n для ями з кінцевими бар'єрами, коричневим – рівні E_n' для ями з нескінченно високими бар'єрами). Збільшуючи U вдвічі, потім втричі, прослідкувати за зміною різниці $\Delta E_n^* = E_n - E_n'$ (різниця енергій одного значення n для ями з кінцевими і нескінченними стінками). Виконати завдання для $n = 1, 2, 3$ и результати занести у таблицю 16.2. Зробити висновок.

Таблиця 16.1 – Вихідні дані

№ вар.	U_1', еВ	a, $\times 10^{-10}$ м	U_2', еВ	№ вар.	U_1', еВ	a, $\times 10^{-10}$ м	U_2', еВ
1	400	1	600	7	400	2	700
2	450	1	650	8	450	2	750
3	500	1	700	9	500	2	800
4	400	1	800	10	400	2	800
5	450	1	850	11	450	2	850
6	500	1	900	12	500	2	900

Таблиця 16.2 – Результати розрахунків ΔE_n^*

Різниця енергій	U_1, U_2	$2U_1, 2U_2$	$3U_1, 3U_2$
ΔE_1^*, еВ			
ΔE_2^*, еВ			
ΔE_3^*, еВ			

2. Розрахувати різницю енергій для сусідніх рівнів $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$ за формулою (16.4) для $n = 1, 2, 3$ і порівняти з результатами, одержаними зі схеми

енергій для нескінченної ями (коричневий колір ліній). Результати занести у таблицю 16.3.

Таблиця 16.3 – Результати розрахунків ΔE_n за формулою та програмою

Рівень енергії n	$\Delta E_{n\ форм}$	$\Delta E_{n\ прог}$
1		
2		
3		

3. Для табличного значення $U_1 = U_2 = U_1'$ отримати на екрані графіки ψ_n, $|\psi_n|^2$ для значень $n = 1, 2, 3$. Замалювати або зробити прінтскріни цих графіків. Визначити формулу залежності числа вузлів (нулів) $|\psi_n|^2$ від номера n.

4. Для табличного значення $U_1 = U_2 = U_1'$, а також збільшуючи U вдвічі, потім втричі, визначити ймовірність знаходження частинки в межах ями для $n = 1, 2, 3$. Результати занести у таблицю 16.4.

Таблиця 16.4 – Ймовірність знаходження частинки в межах ями

Рівень енергії n	$U_1 = U_2 = U_1'$	$U_1 = U_2 = 2U_1'$	$U_1 = U_2 = 3U_1'$
1			
2			
3			

5. Задати значення $U_1 = U_1'$, $U_2 = U_2'$ згідно з таблицею. Отримати і замалювати або зробити прінтскріни графіків функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3, $|\psi_1|^2$, $|\psi_2|^2$, $|\psi_3|^2$. Визначити ймовірність знаходження частинки ліворуч та праворуч за межами ями. Збільшуючи висоту лівого бар'єру U_1 вдвічі, потім втричі, повторити визначення ймовірностей для $n = 1, 2, 3$. Результати розрахунків занести у таблицю 16.5. Зробити висновок, як впливає асиметрія ями на ймовірність проникнення частинки в бар'єр.

Таблиця 16.5 – Ймовірність знаходження частинки за межами ями

Рівень енергії n	$U_1 = U_1'$, $U_2 = U_2'$		$U_1 = 2U_1'$, $U_2 = U_2'$		$U_1 = 3U_1'$, $U_2 = U_2'$	
	ліворуч	праворуч	ліворуч	праворуч	ліворуч	праворуч
1						
2						
3						

6. Встановити висоту бар'єрів $U_1 = U_2 = U_1'$ згідно з таблицею. Змінюючи масу частинки в чотири, в шість і у вісім разів, прослідкувати, як вона впливає на значення енергії E_n та різницю сусідніх значень $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n$ для $n = 1, 2, 3$. Результати розрахунків занести у таблицю 16.6.

Таблиця 16.6 – Результати розрахунків ΔE_n для різних m і a

ΔE_n	$m = 4m_e$	$m = 6m_e$	$m = 8m_e$	a	$2a$	$3a$
ΔE_1, еВ						
ΔE_2, еВ						
ΔE_3, еВ						

7. Повторити завдання пункту 6, відновивши $m = m_e$, та збільшуючи ширину "ями" a в два, а потім у три рази. Результати розрахунків занести у таблицю 16.6.

16.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати обчислення значень енергії E_n, ΔE_n, ймовірності (у вигляді таблиці), замальовані графіки ψ, $|\psi|^2$, та висновки за пунктами роботи.

16.6 Контрольні запитання і завдання

1. Запишіть одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера, яке описує рух мікрочастинки в потенціальному полі.

2. Який фізичний зміст має ψ -функція (згідно з теорією Бора)?

3. Запишіть хвильову функцію для частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі.

4. Запишіть граничні умови для частинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі.

5. Який фізичний смисл квадрату модуля хвильової функції?

6. Отримайте одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера для вільної частинки з рівняння (16.1).

7. Що характеризує головне квантове число?

8. Як запишеться хвильове число k в різних областях простору, та який вигляд відповідно буде мати рівняння Шредінгера в цих областях?

9. Який вигляд має розв'язок (ψ -функція) в різних областях?

10. Як будуть вести себе ψ_1, ψ_2, ψ_3 в потенціальній ямі та за її межами у випадку, коли енергія частинки $E < U_1$, $E < U_2$, буде збільшуватись, зменшуватись?

11. Яким граничним умовам повинна задовольняти ψ -функція та її похідна на межах ями?

12. Якого вигляду рівняння отримуємо для обчислення власних значень сталої розповсюдження k?

13. Який метод застосовується для розв'язання трансцендентного рівняння?

14. Як із рівняння (16.11) отримати відповідне рівняння для ями з нескінченно високими стінками?

15. Дайте визначення потенціальної ями.

17 ВИВЧЕННЯ БУДОВИ ТА СПЕКТРУ АТОМА ВОДНЮ

17.1 Мета роботи

Ознайомитись з квантово-механічною моделлю водневоподібного атома та дослідити будову та спектр атома водню.

17.2 Вказівки з організації самостійної роботи.

З точки зору квантово-механічної теорії розглянемо систему, яка складається з нерухомого ядра з зарядом Ze (Z – натуральне число, e – модуль заряду електрона) та електрона, що рухається навколо нього. Якщо $Z=1$, то маємо атом водню. Коли $Z>1$, то таку систему називають водневоподібною. Потенціальна енергія електрона в полі ядра цієї системи дорівнює:

$$U(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Ze^2}{r}\,, \tag{17.1}$$

де ε_0 –електрична стала, r – модуль радіус-вектора $\vec{r}$ точки, в якій перебуває електрон (початок відліку системи координат співпадає з центром ядра).

У такому разі стаціонарне рівняння Шредінгера, що описує поведінку електрона у водневоподібній системі, має вигляд

$$\Delta\psi+\frac{2m_0}{\hbar^2}\left(E+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}\right)\psi(\vec{r})=0\,, \tag{17.2}$$

де Δ – оператор Лапласа, $\psi(\vec{r})$ – хвильова функція електрона, m_0 – маса електрона, E – енергія електрона, $\hbar$ – стала Дірака. Остання пов’язана зі сталою Планка h простим співвідношенням $\hbar=h/(2\pi)$.

Поле, в якому рухається електрон, є центрально-симетричним. Про це свідчить залежність потенціальної енергії U саме від модуля радіус-вектора r, а не від нього самого, тобто не від $\vec{r}$. Тому доцільно скористатися сферичною системою координат, в якій положення радіус-вектора $\vec{r}$ точки (наприклад, точки P) задається трійкою чисел (r,ϑ,φ) (рис. 17.1). Тоді хвильова функція $\psi(\vec{r})$ стає функцією трьох змінних: $\psi(\vec{r})=\psi\left(r,\vartheta,\varphi\right)$.

Добре відомо, що у сферичній системі координат оператор Лапласа Δ набуває вигляду:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (17.3)$$

Розв'язок рівняння (17.2) шукають методом розділення змінних Фур'є, представляючи шукану хвильову функцію $\psi(r,\vartheta,\varphi)$ як добуток трьох частин, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot\Theta(\vartheta)\cdot\Phi(\varphi). \qquad (17.4)$$

Встановлено, що:

1)рівняння (17.2) має розв'язок за будь-яких значень енергії E;

2) безперервні значення $E>0$ відповідають вільному електронові, який вже не утримується ядром;

3) дискретні значення енергії

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} < 0 \qquad (17.5)$$

відповідають електрону, зв'язаному з ядром. У цьому випадку електрон рухається в потенціальній ямі, вигляд якої зображено на рис. 17.2 суцільною лінією ($U_{\text{еф}}$). Пунктирна лінія зображує можливий графік функції $R(r)$.

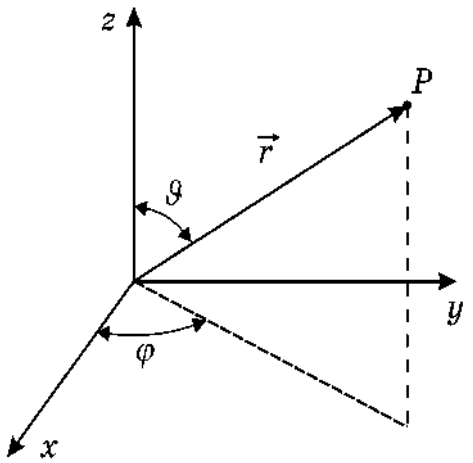


Рисунок 17.1

Хвильові функції $\psi(r,\vartheta,\varphi)$, що є розв'язками рівняння (17.2), залежать від трьох числових параметрів, які називають квантовими числами:

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = \psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r)\cdot\Theta_{lm}(\vartheta)\cdot\Phi_m(\varphi). \qquad (17.6)$$

Параметр n, відомий як головне квантове число, збігається з номером рівня енергії (див. формулу (17.5)). Параметри l та m, що є відповідно орбітальним (або азимутальним) та магнітним квантовими числами, визначають відповідно модуль моменту імпульсу електрона та його проекцію на певний напрямок Z.

За завданого значення головного квантового числа n орбітальне квантове число l може приймати виключно n наступних значень: $l = 0,1,2...(n-1)$. В свою чергу магнітне квантове число m за сталого значення l набуває $(2l+1)$ різних значень: $m = -l,(-l+1),...-1,0,+1,...,(l-1),l$.

У загальному випадку хвильові функції $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$ мають дуже громіздкий вигляд, тому обмежимося лише деякими частковими випадками.

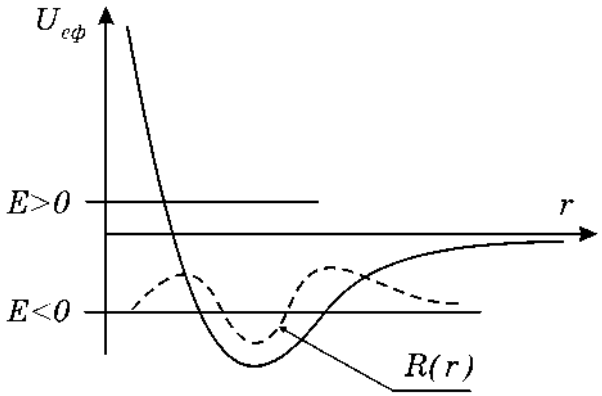


Рисунок 17.2

Деякі ненормовані радіальні ($R_{nl}(\rho)$) та кутові ($\Theta_{lm}(\vartheta)$ та $\Phi_m(\varphi)$) функції, з яких із використанням співвідношення (17.6) можна побудувати хвильові функції $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$ для атома водню, наведено в табл. 17.1. Зазначимо, що як аргумент радіальних функцій $R_{nl}(\rho)$ використовується безрозмірна величина $\rho = r/a_0$, де величина a_0 носить назву радіуса Бора. Вона є радіусом першої орбіти (при $n=1$) електрона в атомі водню, де він перебуває у незбудженому стані. Додамо також, що зазвичай нормування прийнято проводити для хвильових функцій $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$ в цілому, а не для окремих їх складових. Тому в табл. 17.1 містяться саме ненормовані радіальні та кутові функції.

Таблиця 17.1 – Ненормовані радіальні та кутові функції електрона в атомі водню.

$R_{nl}(\rho)$		$\Theta_{l\|m\|}(\vartheta)$		$\Phi_m(\varphi)$	
R_{10}	$e^{-\rho}$	Θ_{00}	1	Φ_0	1
R_{20}	$\left(1-\frac{1}{2}\rho\right)e^{-\rho/2}$	Θ_{10}	$\cos\vartheta$		
R_{21}	$\rho e^{-\rho/2}$	Θ_{11}	$\sin\vartheta$	Φ_1	$e^{i\varphi}$
R_{30}	$\left(1-\frac{2}{3}\rho+\frac{2}{27}\rho^2\right)e^{-\rho/3}$	Θ_{20}	$3\cos^2\vartheta-1$		
R_{31}	$\rho\left(1-\frac{1}{6}\rho\right)e^{-\rho/3}$	Θ_{21}	$\sin\vartheta\cos\vartheta$	Φ_2	$e^{i2\varphi}$
R_{32}	$\rho^2 e^{-\rho/3}$	Θ_{22}	$\sin^2\vartheta$		

Дискретні значення енергії E_n, що завдано співвідношенням (17.5), визначають енергетичні рівні, які дозволено займати електронам у водневоподібному атомі. Згідно з постулатами Бора, електрон може випромінювати (або поглинати) енергію тільки певними порціями – квантами. Енергія квантів визначається різницею енергій (E_{n1}, E_{n2}), які відповідають рівням (n_1, n_2), між якими відбувається перехід електрона:

$$\hbar\omega = E_{n1} - E_{n2} = \frac{1}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{Z^2 m_0 e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right). \tag{17.7}$$

З іншого боку, ще до появи квантової механіки було експериментально встановлено, що частоти, на яких може випромінювати атом водню, визначаються формулою Бальмера:

$$\omega = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{17.8}$$

де R – стала Ридберга, експериментальне значення якої становить. $R = 2{,}07 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$.

Отже, квантова механіка дозволяє отримати теоретичне значення сталої Ридберга. Для цього необхідно порівняти формули (17.7) і (17.8) у випадку атому ($Z = 1$), з чого постає, що:

$$R = \frac{1}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{m_0 e^4}{2\hbar^3}. \tag{17.9}$$

Якщо тепер підставити отримане теоретичне значення R до співвідношення (17.7), то отримаємо:

$$E_{n1} - E_{n2} = Z^2 R\hbar\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Остання формула дозволяє оцінювати експериментальні значення сталої Ридберга R за відомими величинами E_{n1}, E_{n2}, n_1, n_2:

$$R = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\hbar Z^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)}. \tag{17.10}$$

Із виразу (17.7) можна отримати також формулу для обчислення частот випромінювання водневоподібного атома за відомими значеннями E_{n1}, E_{n2}:

$$\omega = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\hbar}.$$

Повернемось до хвильової функції $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$. Добре відомо, що вона сама фізичного сенсу не має. Але такий сенс має квадрат її модуля:

$$\left|\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)\right|^2 = \psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)\psi^*_{nlm}(r,\vartheta,\varphi),$$

де символ "*" позначає операцію комплексного сполучення. Відомо, що квадрат модуля хвильової функції є густиною ймовірності dP/dV перебування електрона в одиничному об'ємі, розташування якого у просторі задається трійкою координат (r,ϑ,φ):

$$\frac{dP}{dV} = \left|\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)\right|^2. \qquad (17.11)$$

Якщо електрон перебуває у стані з $l = m = 0$, то його хвильова функція залежить тільки від змінної r: $\psi_{n00}(r,\vartheta,\varphi) = \psi_{n00}(r)$. Тоді елементарний об'єм dV можна взяти у вигляді кульового шару, для якого $dV = 4\pi r^2 dr$. Ймовірність dP перебування електрона у такому шарі ($[r, r+dr]$) дорівнює:

$$dP = \left|\psi_{n00}(r)\right|^2 dV = Cr^2\left|\psi_{n00}(r)\right|^2 dr,$$

де C – нормувальний коефіцієнт.

Звідси можна ввести іншу густину ймовірності:

$$\frac{dP}{dr} = r^2\left|\psi_{n00}(r)\right|^2. \qquad (17.12)$$

Густини ймовірності (17.12) і (17.11) не слід плутати між собою, оскільки перша описує ймовірність перебування електрона у кульовому шарі одиничної товщини, а друга – в одиничному об'ємі. Але вони обидві успішно використовуються для описання геометричних властивостей так званої електронної хмаринки.

У формулі (17.12) можна також перейти до безрозмірної змінної $\rho = r/a_0$, розглядаючи густину ймовірності:

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho^2\left|\psi_{n00}(\rho)\right|^2 \qquad (17.13)$$

Відсутність в останній формулі величини a_0^2 пояснюється тим, що вона буде врахована в процесі обчислення нормувального коефіцієнту.

У випадку, коли хвильова функція залежить також від кутових координат, тобто $\psi_{nlm} = \psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$, необхідно використовувати густину ймовірності dP/dV, що задається співвідношенням (17.11). Зважаючи на те, що в даному конкретному випадку

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi},\ \left|\Phi_m(\varphi)\right|^2 = \Phi_m(\varphi)\Phi_m^*(\varphi) = e^{im\varphi}e^{-im\varphi} = 1,$$

маємо

$$\frac{dP}{dV} = \left|\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)\right|^2 = \left|R_{nl}(r)\cdot\Theta_{lm}(\vartheta)\cdot\Phi_m(\varphi)\right|^2 = \left|R_{nl}(r)\cdot\Theta_{lm}(\vartheta)\right|^2, \quad (17.14)$$

тобто густина ймовірності dP/dV є дійсною функцією двох дійсних змінних ρ і ϑ. Отже, таку функцію можна зручно побудувати у вигляді поверхні над площиною, де завдано полярні координати (ρ,ϑ). Зробити це можна з використанням одного із найбільш вживаних методів – методу ізоліній. Ізолінії, що відображають значення функції двох змінних, є кривими, що з'єднують точки, в яких дана функція має одне й теж саме фіксоване значення.

17.3 Опис комп'ютерної програми

Алгоритм програми базується на результатах розв'язання рівняння Шредінгера (17.2), представлених в табл. 17.1. Зовнішній вигляд інтерфейсу програми зображено на рис. 17.3.

Програма будує густину ймовірності $dP/d\rho$ для хвильових функцій $\psi_{100}(\rho)$, $\psi_{200}(\rho)$ та $\psi_{300}(\rho)$, а також густину ймовірності dP/dV у вигляді (17.14) для хвильових функцій $\psi_{210}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{211}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{310}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{311}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{321}(\rho,\vartheta)$ та $\psi_{322}(\rho,\vartheta)$.

Програма також дозволяє обчислювати значення енергії електрона в атомі E_n з використанням співвідношення (17.5), будувати діаграму енергетичних рівнів для атома водню та водневоподібного атома. Крім того, у останньому вікні у вигляді серій Лаймона та Бальмера міститься також інформація про спектр випромінювання атому водню.

17.4 Інструкція користувачу

1. Отримати на екрані розподіл густини ймовірності $dP/d\rho$ для хвильових функцій $\psi_{100}(\rho)$, $\psi_{200}(\rho)$ та $\psi_{300}(\rho)$. Зарисувати або зробити прінтскріни отриманих графіків. Визначити з графіків і записати значення ρ, які відповідають максимальним значенням $dP/d\rho$.

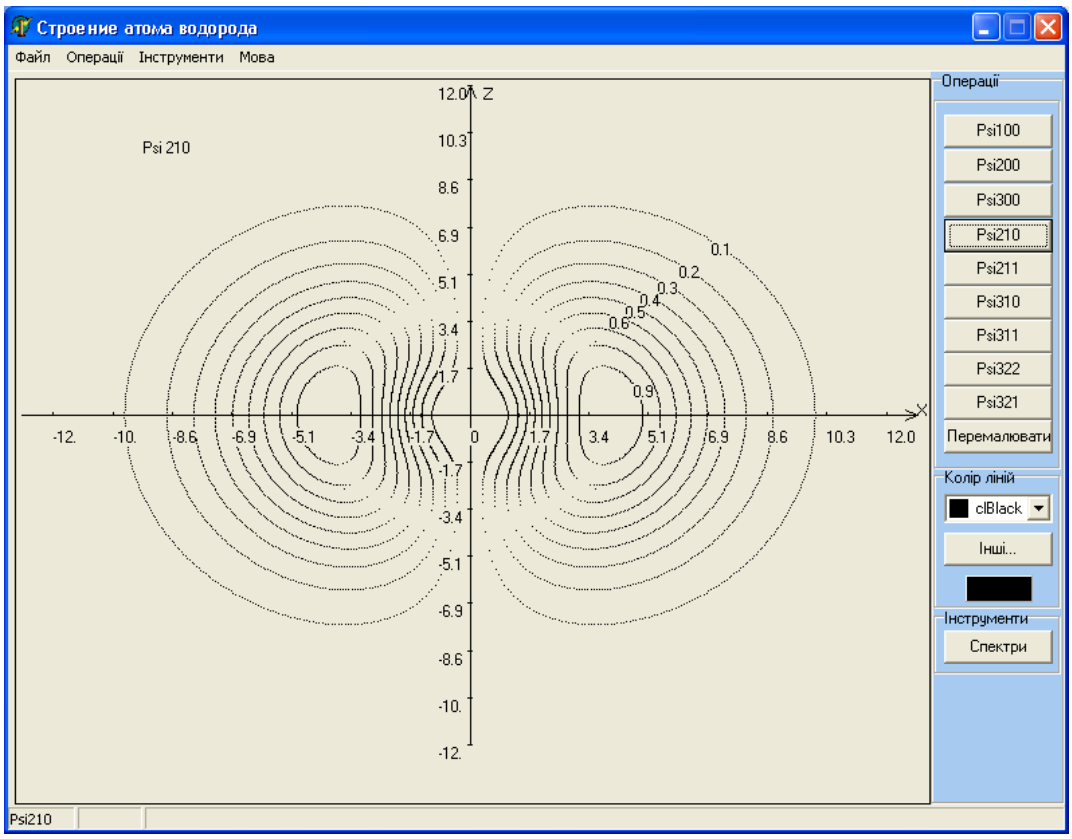


Рисунок 17.3

2. Отримати послідовно на екрані розподіл електронної густини у вигляді рівнів однакових значень dP/dV для станів, які характеризуються хвильовими функціями $\psi_{210}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{211}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{310}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{311}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{321}(\rho,\vartheta)$ та $\psi_{322}(\rho,\vartheta)$. Зарисувати або зробити прінтскріни отриманих розподілів, провести їх графічну обробку, залишивши тільки ізолінії, що відповідають рівням $dP/dV = 0{,}9$ та $dP/dV = 0{,}5$. Зробити висновки щодо наявності та характеру симетрії електронних хмаринок у залежності від комбінацій значень квантових чисел n, l, m.

3. У відповідності до номера варіанта, який вказано викладачем, з використанням табл. 17.2 задати величини зарядового числа Z та кількості зображених рівнів N. Отримати на екрані систему енергетичних рівнів водневоподібного атома, зарисувати або зробити прінтскріни. Записати значення енергії електрона E_n, які відповідають номерам рівнів n_1 та n_2 в обраному рядочку табл. 17.2.

4. Використовуючи всі отримані значення n_1 і n_2, за формулою (17.10) отримати набір експериментальних значень сталої Ридберга R. Обчислити її середнє значення $\overline{R}$, а також абсолютну ΔR і відносну $\delta_R = \Delta R / \overline{R}$ похибки.

Результат оцінювання представити в інтервальній формі: $R = \overline{R} \pm \Delta R$. Указати ймовірність потрапляння істинного значення сталої Ридберга до цього інтервалу. Порівняти з відомим теоретичним значенням сталої Ридберга. Пояснити результати, зробити висновки.

5. Визначити потенціал іонізації та потенціал збудження атому. Для цього взяти в табл. 17.2 відповідні значення N_1 та $N_2 = N_1 + K$. Тут N_1 – номер рівня, з якого здійснюється іонізація, K – номер рівня, на який переходить електрон при збудженні.

6. Послідовно збільшуючи число зображених рівнів N, отримати таку картину енергетичних рівнів, щоб рівні з великими значеннями n вже не можна було розрізнити. Пояснити, як цей результат збігається з принципом додатковості.

7. Базуючись на теорії Бора, обчислити три перших значення радіусів орбіт (для $n = 1,2,3$), порівняти їх із значеннями, отриманими з квантово-механічних міркувань у пункті 1. Зробити висновки, в чому полягають збіг і принципіальна розбіжність уявлень квантомеханічної теорії та напівкласичної теорії Бора?

Таблиця 17.2 – Вихідні дані

№ варіанту	Z	N	n_1	n_2	N_1	K
1	1	4	1	2…4	1	2
2	2	5	2	3…5	1	1
3	3	6	1	2…4	1	2
4	1	6	3	4…6	2	3
5	2	4	1	2…4	2	2
6	3	5	1	3…5	2	3
7	2	7	4	5…7	3	1
8	2	8	3	4…6	3	3
9	3	7	3	4…6	2	1
10	3	8	4	5…7	1	2
11	1	5	2	2...4	2	3
12	1	7	4	3...5	3	1

8. Порівняти графіки густин ймовірностей $dP/d\rho$ і dP/dV для різних значень чисел n, l, m., з одного боку, та формули для відповідних хвильових

функцій $\psi_{n00}(\rho)$ і $\psi_{nlm}(\rho,\vartheta,\varphi)$ (табл. 17.1), з іншого боку. Зробити висновки щодо характеру симетрії електронних хмаринок.

9. Пояснити, чим саме обумовлена наявність вузлів у залежностях $|\psi_{200}(\rho)|^2$, $|\psi_{300}(\rho)|^2$. Під вузлами розуміють точки, в яких ці функції перетворюються на нуль.

17.5 Зміст звіту

Звіт повинен містити: мету роботи, результати роботи, а саме:

1. Графіки густини ймовірності $dP/d\rho$ для станів, що відповідають хвильовим функціям $\psi_{100}(r)$, $\psi_{200}(r)$, $\psi_{300}(r)$;

2. Визначені з графіків значення ρ, які відповідають максимальним значенням $dP/d\rho$;

3. Графіки густини ймовірності dP/dV для станів, які характеризуються хвильовими функціями $\psi_{210}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{211}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{310}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{311}(\rho,\vartheta)$, $\psi_{321}(\rho,\vartheta)$ та $\psi_{322}(\rho,\vartheta)$, причому наявними мають бути тільки ізолінії, що відповідають рівням $dP/dV=0{,}9$ та $dP/dV=0{,}5$;

4. Сформульовані висновки щодо наявності та характеру симетрії електронних хмаринок у залежності від комбінацій значень квантових чисел n, l, m.;

5. Схему енергетичних рівнів E_n атома, причому вісь енергій направити вниз;

6. Обчислені величини сталої Ридберга, потенціалів іонізації та збудження;

7. Обчислені на основі теорії Бора три перші радіуси електронних орбіт та результати їх порівняння з отриманими в роботі;

8. Сформульовані висновки щодо характеру симетрії електронних хмаринок;

9. Сформульоване пояснення того, чим саме обумовлена наявність вузлів у залежностях $|\psi_{200}(\rho)|^2$, $|\psi_{300}(\rho)|^2$;

10. Загальний висновок роботи.

17.6 Контрольні запитання і завдання

1. Яка будова атома водню, водневоподібного атома?
2. Чому дорівнює потенціальна енергія електрона в полі ядра водневоподібного атома? Як називається це поле?
3. Запишіть рівняння Шредінгера для електрона в водневоподібному атомі. В якій системі координат доцільно розв'язувати задачу?
4. У чому полягає метод розділення змінних?
5. Запишіть власні значення енергії E електрона в водневоподібному атомі. Проаналізуйте формулу для E:

– що означає знак "+" ?
– що означає знак "–" ?
– який спектр відповідає позитивним, негативним значенням енергії?

6. Чому відповідає суцільна, пунктирна лінія на рис.17.2 ?
7. Як називаються числа, якими характеризується стан електрона в атомі?
8. Які значення квантових чисел n, l, m є дозволеними? Чому?
9. Що таке радіус Бора?
10. Які значення енергії визначаються формулою (19.5)?

ДОДАТОК А

ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

А.1 Основні положення теорії похибок

Якими б точними не були прибори, досконалими методи вимірювань, при вимірюванні фізичної величини *x* (часу, довжини, тощо) неможливо отримати точне, "істинне значення" величини x_{icm}.

Якщо позначити x_i результат деякого *i*-того вимірювання величини *x*, то величину

$$\Delta x_i = x_i - x_{icm}, \tag{А.1}$$

називають абсолютною похибкою даного вимірювання. Для характеристики точності вимірювання вводять також поняття відносної похибки

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{icm}}. \tag{А.2}$$

Завдання, яке стоїть перед теорією похибок, є визначення похибок вимірювання фізичних величин.

Вимірювання поділяються на прямі та непрямі. Прямим називають вимірювання, завдяки якому значення величини знаходять безпосередньо з показань прибору. Прикладами прямих вимірювань є: вимірювання температури за допомогою термометра; довжини штангенциркулем – тощо.

При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини знаходять завдяки відомій залежності цієї величини від величин, які можуть бути виміряні шляхом прямих вимірювань. Наприклад, густину тіла – за його масою та розмірами, тощо.

Найважливіший клас похибок – випадкові похибки. Ці похибки обумовлені недосконалістю наших органів чуття, а тому не можуть бути усунуті.

А.2 Розрахунок випадкових похибок для прямих вимірювань

Нехай, вимірюючи багато разів деяку фізичну величину, наприклад, час, за який тіло проходить одну і ту ж відстань *S* отримали ряд значень $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, тоді за x_{icm} приймають середнє арифметичне

$$< x >= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \qquad \text{(A.3)}$$

яке при $n \to \infty$ повинно співпадати з x_{icm}.

Найважливіше завдання теорії похибок – знаходження інтервалу значень фізичної величини, в середині якого з деякою ймовірністю (яку називають довірчою ймовірністю) знаходиться величина

$$\left(< x > -\Delta x\right) < x_{icm} < \left(< x > +\Delta x\right). \qquad \text{(A.4)}$$

Цей інтервал значень величини x називають довірчим інтервалом. Якщо, наприклад, ми гарантуємо, що вимірюючи один раз величину x за даною методикою, отримаємо результат, який лежить в межах даного інтервалу (А.4) з імовірністю 95% , то довірча ймовірність $P_{дов}$ буде дорівнювати $P_{дов} = 0,95$.

Для обґрунтування методу обчислення похибок треба встановити закон, якому підпорядковуються випадкові відхилення величини, яка вимірюється. Ми тільки вкажемо основну ідею, яка полягає в припущенні (що є виправданим): невеликі відхилення Δx від x_{icm} є більш ймовірними ніж великі. На цій ідеї базується нормальний закон розподілу – закон Гауса. Але цей закон справедливий для великого числа вимірювань n.

В інженерній практиці базуються на розподілі Стьюдента. Для кожної довірчої ймовірності P можна обчислити таке число t_{nP} (коефіцієнт Стьюдента) для якого випадкова величина x, що підпорядковується розподілу Стьюдента, буде знаходитися в межах

$$\left(< x > -t_{nP}\sigma\right) < x_{icm} < \left(< x > +t_{nP}\sigma\right), \qquad \text{(A.5)}$$

де величина σ – середньоквадратичне відхилення результату вимірювань

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - < x >)^2 + (x_2 - < x >)^2 + ... + (x_n - < x >)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2}{n(n-1)}}, \qquad \text{(A.6)}$$

де n – число вимірювань.

Таким чином $\Delta x = t_{nP}\sigma$. Коефіцієнти Стьюдента для різного числа вимірювань приведено в таблиці А.1.

Таблиця А.1 – Залежність коефіцієнта Стьюдента від числа вимірювань

n	2	3	4	5	10	100
t_{nP}	12.7	4.3	3.2	2.8	2.0	2.0

А.3 Розрахунок випадкових похибок для непрямих вимірювань

При непрямих вимірюваннях значення фізичної величини F визначається за формулою

$$F = F\left(x_1, x_2, ...x_n\right), \tag{А.7}$$

де $x_1, x_2, ...x_n$ – фізичні величини, які вимірюються прямо.

Абсолютна похибка ΔF непрямих вимірювань визначається за формулою:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}, \tag{А.8}$$

де $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ – частинна похідна функції F за змінною x_i (при її обчисленні інші змінні вважаються сталими величинами); Δx_i – абсолютна похибка вимірювання величини x_i.

Результат непрямого вимірювання (кінцевий результат у звіті) подається у вигляді

$$F = < F > \pm \Delta F \tag{А.9}$$

де $< F >= \left(< x_i >, < x_2 >, ... < x_n >\right)$ – значення функції F від середніх значень змінних $< x_i >, < x_2 >, ... < x_n >$.

Приклад. Обчислення випадкової похибки при розрахунку густини ρ твердого тіла циліндричної форми.

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h} = \frac{4}{\pi} \cdot m d^{-2} h^{-1},$$

де m – маса тіла; d – діаметр циліндра; h – висота циліндра.

В даному випадку $\rho = \rho\left(m, d, h\right)$. Згідно з (А.8)

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\Delta h\right)^2},$$

де

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{4}{\pi} \cdot m d^{-2} h^{-1}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot d^{-2} h^{-1};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8}{\pi} \cdot m d^{-3} h^{-1};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4}{\pi} \cdot m d^{-2} h^{-2}$$

А.4 Правила заокруглювання результатів обчислень.

1. В результаті обчислень абсолютної похибки вимірювань фізичної величини треба залишати лише першу значущу цифру.

2. В середньому значенні величини остання значуща цифра повинна бути одного й того ж порядку, що й перша значуща цифра похибки.

Приклад. При обчисленні прискорення земного тяжіння g були отримані результати:

$$< g >= 9,737 \text{ м/с}^2 ; \quad \Delta g = 0,2364 \text{ м/с}^2.$$

У відповідності з формулою (А.9) та правилами (1) і (2) відповідь має наступний вигляд:

$$< g >= \left(9,7 \pm 0,2\right) \text{ м/с}^2.$$

ДОДАТОК Б

МОДИФІКОВАНИЙ АЛГОРИТМ ЕЙЛЕРА

Нехай $\vec{r}(t)$, $\vec{V}(t)$, $\vec{a}(t)$ – радіус-вектор, вектор швидкості та вектор прискорення в момент часу t_a. $\vec{F}(t)$ – рівнодіюча сила, яка діє на матеріальну точку. Тоді рух матеріальної точки маси m можна описати за допомогою рівняння динаміки

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}(x, y, z, t) \qquad \text{(Б.1)}$$

Згідно з (Б.1) рух точки для моментів часу $t > t_0$ визначено однозначно, якщо відомо початковий стан точки в момент часу t_0 (початкове положення $\vec{r}(t_0)$ та початкова швидкість $\vec{V}(t_0)$). Розглянемо наближені кінематичні формули:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x + V_x(t)\Delta t, & V_x(t+\Delta t) &= V_x(t) + a_x(t)\Delta t, \\ y(t+\Delta t) &= y + V_y(t)\Delta t, & V_y(t+\Delta t) &= V_y(t) + a_y(t)\Delta t, \\ z(t+\Delta t) &= z + V_z(t)\Delta t, & V_z(t+\Delta t) &= V_z(t) + a_z(t)\Delta t. \end{aligned} \qquad \text{(Б.2)}$$

З формул (Б.2) виходить, що положення та швидкість точки в момент часу $(t+\Delta t)$ можна обчислити, якщо відомі її положення, швидкість та прискорення в момент t, завданням початкового стану в момент t, а прискорення $a(t)$ – з динамічного рівняння Ньютона (Б.1)

$$a_x(t) = \frac{F_x(x, y, z, t)}{m},\ a_y(t) = \frac{F_y(x, y, z, t)}{m},\ a_z(t) = \frac{F_z(x, y, z, t)}{m}. \qquad \text{(Б.3)}$$

Таким чином, послідовно застосовуючи (Б.2) та (Б.3), можна визначити положення точки в будь-який момент часу.

Оскільки схема Ейлера має похибку обчислень ~ Δt, то для її зменшення застосовується інший метод, в якому коефіцієнти виразів (Б.2) (тобто значення швидкості та прискорення) підставляються в момент часу, який відповідає середині інтервалу Δt, тобто в момент $t + \frac{\Delta t}{2}$. При цьому похибка розрахунків за формулами (Б.2), (Б.4) має порядок Δt^2. Така видозмінена схема називається модифікованим методом Ейлера.

ДОДАТОК В

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОЇ ШВИДКОСТІ МОЛЕКУЛ

Згідно з [6] функції розподілу складових V_x, V_y швидкості молекули на площині XOY мають вигляд:

$$\varphi(V_x)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-mV_x{}^2}{2kT}\right),$$

$$\varphi(V_y)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-mV_y{}^2}{2kT}\right),$$

де m – маса молекули, T – абсолютна температура газу, k – стала Больцмана.

Ймовірність того, що швидкість деякої молекули має значення в межах $V_x \dots V_x + dV_x$, $V_y \dots V_y + dV_y$ буде визначатися за формулою:

$$dP_V = \varphi(V)dS = \frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)dS,$$

де dS, згідно з рис.В.1, дорівнює $dS = 2\pi V dV$.

Таким чином, функція розподілу, яка характеризує ймовірність того, що величина швидкості лежить в межах $V \dots V + dV$

$$F(V)=\frac{dP}{dV}=\frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)2\pi V.$$

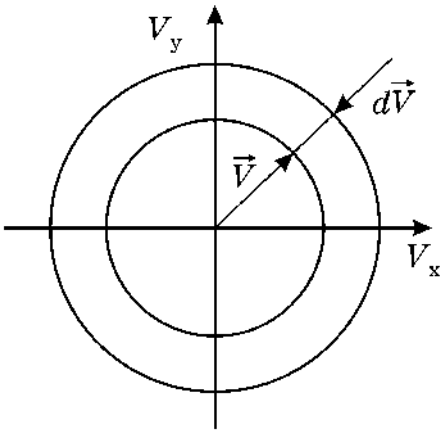


Рисунок В.1

Ймовірну швидкість можна тоді знайти з умови максимуму функції $F(V)$:

$$\frac{dF(V)}{dV}=\frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)\left(1-\frac{m}{kT}V\right)=0. \qquad \text{(В.1)}$$

Розв’язуючи рівняння (В.1), маємо

$$V=\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

В трьохвимірному випадку, аналогічний розрахунок, як відомо, дає результат.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: навч. посібник/ В.О. Стороженко та ін.- Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 320 с.

2. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 2. Електрика та магнетизм: навч. посібник. / І.М. Кібець та ін. - Харків: «Компанія СМІТ», 2009 – 424с.;

3. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 3, т.1. Оптика: навч.посібник / І.М. Кібець та ін. – Х.:Компанія СМІТ, 2012. – 232с.

4. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 3, т.2. Квантова та атомна фізика. Фізика твердого тіла. Ядерна фізика: навч.посібник / І.М.Кібець та ін. – Харків: Компанія СМІТ, 2013.–304с.

5. Краткий курс физики: Учебное пособие / Кибец И.Н. и др. – Харків: Компания СМИТ, 2015 – 330 с.

6. Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1986. – 432 с.

7. Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука, 1982. – 496 с.

8. Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

9. ДСТУ 3008:2015. Інформація та документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлювання. – К.: ДП УкрНДЦ.

10. Лабораторний практикум з фізики / За ред. К.А.Барсукова та Ю.І.Уханова. – М.: Вищ. шк., 1988. – 351с.

11. Лабораторні заняття з фізики / За ред. Л.Л.Гольдійна. – М.: Наука, 1973. – 688с.

12. Фізичний енциклопедичний словник / За ред. А.М.Прохорова. – М.: Рад. енциклопедія, 1984. – 944с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до комп’ютерних лабораторних робіт з дисципліни

«ФІЗИКА»

для студентів усіх спеціальностей і форм навчання

Упорядники: ОРЕЛ Роман Петрович
КОВАЛЕНКО Олена Миколаївна
РИБАЛКА Антоніна Іванівна
МЕШКОВ Сергій Миколайович
КАЛІНІН Віталій Веніамінович
ОНИЩЕНКО Андрій Анатолійович
МЯГКИЙ Олександр Валерійович
ЧУБУКІН Олександр Сергійович
ПРИЙМАЧОВ Юрій Дмитрович

Відповідальний випусковий Р.П.Орел
Редактор Б.П. Косіковська
Комп’ютерна верстка Л.Ю. Свєтайло

План 2020 (друге півріччя), поз. 88.

Підп. до друку XX.XX.21. Формат 60x84 1/16. Спосіб друку – ризографія.
Умов.друк.арк. 7,0. Облік. вид.арк. 6,4. Тираж 100 прим.
Ціна договірна Зам № 1-88.

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

Кафедра фізики

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

по 1-му семестру курсу фізики

для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка, спеціалізації Інфокомунікаційна інженерія, Інформаційно- мережна інженерія.

Підготувала:

доц. Коваленко О.М.

Затверджено:

на засіданні кафедри фізики

Протокол №1 від 30.08.2021 р.

Харків 2021

1 Зміст навчального матеріалу на перший семестр

Змістовий модуль 1. Електростатика та постійний струм.
Тема 1. Електричне поле в вакуумі.
Тема 2. Електричне поле в діелектриках.
Тема 3. Провідники в електричному полі.
Тема 4. Електричний струм.

Змістовний модуль 2. Магнетизм.
Тема 5. Магнітне поле в вакуумі.
Тема 6. Магнітне поле в речовині.
Тема 7. Явище електромагнітної індукції.
Тема 8. Електромагнітне поле.

2 Рейтингова оцінка за дисципліною

2.1 Кількісні критерії оцінювання

Для оцінювання роботи студента протягом семестру підсумкова рейтингова оцінка $О_{сем}$ розраховується як середнє вагове оцінок за різні види занять та контрольні заходи (див табл.)

Вид заняття(контролю)	Кількість балів	Ваговий коефіцієнт
ПЗ	0…100	0,25
ЛР	0…100	0,25
ІРЗ	0…100	0,25
Тест по модулю	0…100	0,25
Разом	0…100	1,0

Кожне практичне завдання оцінюється в 100 балів шляхом проведення експрес-контролю, а за семестр виставляється середній за усіма заняттями бал.

Кожний цикл лабораторних робіт (за семестр два цикла по 2-3 лр) оцінюється в 100 балів (50 балів за оформлення звітів + 50 балів за захист). За семестр виставляється середня оцінка за 2 цикла.

Індивідуальне розрахункове семестрове завдання (рішення набора задач) оцінюється в 100 балів.

Кожне тестування за змістовним модулем (2 рази за семестр) оцінюється в 100 балів, а за семестр підраховується середній бал (за двома тестуваннями).

Рейтингова оцінка за семестр підраховується за формулою :

$$О_{сем}=0,25(<ПЗ>+<ЛР>+ІРЗ+<Т>),$$

де <ПЗ>,<ЛР>,<Т>- середні значення оцінок за відповідні види контролю. Максимальне значення $О_{сем}$ дорівнює 100, а мінімальне значення $О_{сем}$ для

отримання заліку дорівнює 60.

2.2 Якісні критерії оцінювання.

Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру.

Задовільно,D,E (60-74). Мати мінімум знань і умінь. Відпрацювати всі лабораторні роботи і виконати ІРЗ. Вміти застосовувати закони фізики для розв'язання найпростіших задач.

Добре,С (75-89). Знати основні закони фізики і вміти їх застосовувати для розв'язання задач. Відпрацювати всі лабораторні роботи, оформити і захистити звіти. Виконати ІРЗ.

Відмінно,A,B (90-100). Відпрацювати всі лабораторні роботи, оформити і захистити звіти,виконати ІРЗ. Знати всі розділи курсу фізики, вміти аналізувати фізичні явища та процеси із застосуванням відповідних законів та співвідношень. Вміти розв'язувати задачі підвищеної складності. Знати загальні принципи проведення фізичного експерименту й обробки його результатів.

3. Перелік запитань експрес-контролю на практичних заняттях.

Тема 1 Електричне поле у вакуумі.

1. Електричний заряд. Властивості електричного заряду.
2. Сформулюйте закон збереження електричного заряду.
3. Сформулюйте закон Кулона.
4. Для яких зарядів можна використовувати закон Кулона?
5. Який заряд називається точковим?
6. Що таке напруженість електричного поля? Її одиниця вимірювання.
7. Чому дорівнює напруженість поля точкового заряду?
8. Дайте визначення лініям напруженості електричного поля.
9. Сформулюйте принцип суперпозиції електричних полів.
10. Чому дорівнює потенціальна енергія взаємодії двох точкових електричних зарядів?
11. Що таке потенціал електричного поля? Його одиниця вимірювання.
12. Чому дорівнює потенціал точкового заряду?
13. Що називається еквіпотенціальними поверхнями?
14. Чому дорівнює робота, виконана силами по переміщенню заряду із точки 1 у точку 2.
15. Як зв'язані напруженість електростатичного поля й потенціал?
16. Сформулюйте теорему про циркуляцію вектора напруженості.
17. Поясніть поняття потоку крізь довільну та замкнуту поверхні.
18. Сформулюйте теорему Гауса для вектора напруженості електричного поля в інтегральному вигляді та диференціальному вигляді.
19. Як визначаються лінійна, поверхнева та об’ємна густини зарядів?

Тема 2 Електричне поле в діелектриках та провідниках

1. Що таке поляризація?
2. Поляризованість. Визначення, одиниця вимірювання.
3. Які види поляризації ви знаєте?
4. Як поляризованность пов'язана з напруженістю електричного поля?
5. Діелектрична проникність. Її фізичний зміст.
6. Вектор електричного зміщення. Його одиниця вимірювання.
7. Як вектор електричного зміщення пов'язаний з напруженістю електричного поля?
8. Які речовини називаються сегнетоелектриками?
9. По яких ознаках можна відрізнити сегнетоелектрики від звичайних діелектриків?
10. Як поляризованість пов'язана з напруженістю електричного поля для сегнетоелектриків?

11. Що називається коерцитивною силою?
12. Що називається залишковою поляризацією?
13. Сформулюйте теорему Гаусса для вектора електричного зміщення.
14. Що таке точка Кюрі?
15. Чому дорівнює електричне поле всередині провідника?
16. Ємність відокремленого провідника. Її розмірність.
17. Що називається конденсатором? Які види конденсаторів ви знаєте?
18. Ємність конденсатора. Її розмірність.
19. Чому дорівнює ємність плоского, циліндричного, сферичного конденсаторів?
20. Чому дорівнює ємність N послідовно з'єднаних конденсаторів з ємностями $C_1, C_2,\ldots,C_N$?
21. Чому дорівнює ємність N паралельно з'єднаних конденсаторів з ємностями $C_1, C_2,\ldots,C_N$?
22. Чому дорівнює енергія відокремленого зарядженого провідника, конденсатора?
23. Чому дорівнює енергія зарядженого конденсатора?
24. Чому дорівнює густина енергії електростатичного поля?

Тема 3 Постійний електричний струм

1. Що називається електричним струмом?
2. Сила струму. Визначення, одиниця вимірювання.
3. Який струм називається постійним?
4. Густина струму. Визначення, одиниця вимірювання.
5. Як зв'язані густина і сила струму?
6. ЕРС. Визначення, одиниця вимірювання.
7. Напруга. Визначення, одиниця вимірювання.
8. Закон Ома для однорідної ділянки кола.
9. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола.
10. Закон Ома для замкнутого кола.
11. Електричний опір. Його одиниця вимірювання. Від чого залежить електричний опір?
12. Чому дорівнює електричний опір лінійного однорідного провідника?
13. Закон Ома в диференціальній формі.
14. Електропровідність. Її одиниця вимірювання.
15. Робота струму.
16. Потужність струму.
17. Закон Джоуля-Ленца.
18. Правила Кирхгофа.

Тема 4 Магнітне поле постійного струму. Принцип суперпозиції.

1. Сформулюйте закон Біо-Савара-Лапласа.
2. Чому дорівнює індукція магнітного поля, створеного зарядом, що рухається?

3. Сформулюйте принцип суперпозиції магнітного поля.
4. Що називається лініями магнітної індукції? Як визначити їх напрямок?
5. Сформулюйте закон Ампера.
6. Як визначити напрямок сили Ампера?
7. Чому дорівнює сила Лоренца, на які заряди вона діє?
8. Як визначити напрямок сили Лоренца?
9. Що називається магнітним потоком? Його одиниця вимірювання.
10. Сформулюйте теорему Гауса для магнітного поля.
11. Сформулюйте закон повного струму.
12. Чому дорівнює магнітне поле прямого нескінченно довгого провідника зі струмом?
13. Чому дорівнює магнітне поле скінченого провідника зі струмом?
14. Чому дорівнює магнітна індукція в центрі колового провідника зі струмом?
15. Чому дорівнює робота по переміщенню провідника зі струмом у магнітному полі?
16. Запишіть формулу для магнітного моменту контуру зі струмом.
17. Запишіть формулу для механічного моменту рамки зі струмом у магнітному полі.
18. Чому дорівнює сила взаємодії двох провідників зі струмами.
19. Яка сила діє на частинку, що рухається в магнітному полі?
20. Чому дорівнює робота, що виконується магнітним полем над зарядженою частинкою, яка рухається в цьому полі?
21. Запишіть у векторній формі результуючу силу, що діє на заряджену частинку у електромагнітному полі.

Тема 5 Явище електромагнітної індукції. Електромагнітні коливання.

1. У чому полягає явище електромагнітної індукції?
2. Сформулюйте закон Фарадея.
3. Поясніть правило Ленца?
4. Яка фізична величина називається індуктивністю? Її одиниця вимірювання.
5. У чому полягає явище самоіндукції? Чому дорівнює ЕРС самоіндукції?
6. У чому полягає явище взаємоіндукції? Чому дорівнює ЕРС взаємоіндукції?
7. Запишіть закони зміни струму у колі з індуктивністю при замиканні та розмиканні кола.
8. Чому дорівнює енергія магнітного поля? Густина енергії?
9. Який процес називається коливаннями?
10. Які коливання називаються вільними?
11. Запишіть рівняння вільних незгасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв’язок воно має?

12. Чому дорівнюють період та частота вільних незгасаючих коливань?

13. Які коливання називаються згасаючими?

14. Запишіть рівняння загасаючих коливань у коливальному контурі. Який розв'язок воно має?

15. Чому дорівнює період і частота згасаючих коливань?

16. Назвіть величини, що характеризують загасання електромагнітних коливань.

17. Що називається логарифмічним декрементом згасання, добротністю?

18. Які коливання називаються вимушеними?

19. Запишіть рівняння вимушених коливань в електричному контурі. Який розв'язок воно має?

20. У чому полягає явище електричного резонансу?

21. Який струм називається змінним?

22. Чому дорівнюють індуктивний, ємнісний, реактивний та повний опори кола?

4. Індивідуальне домашнє завдання з фізики.

ТРІКІ-21-1

Номер варіанту	**Номер розділу - номер задачі**									
	[1]						**[2]**			
1	8-11	8-9	9-7	10-13	11-7	11-29	1-11	1-3	2-17	3-24
2	8-12	8-10	9-8	10-14	11-8	11-30	1-12	1-4	2-18	3-25
3	8-13	8-11	9-9	10-15	11-9	11-1	1-13	1-5	2-19	3-26
4	8-14	8-12	9-10	10-16	11-10	11-2	1-14	1-6	2-20	3-27
5	8-15	8-13	9-11	10-17	11-11	11-3	1-15	1-7	2-24	3-12
6	8-16	8-14	9-12	10-18	11-12	11-4	1-16	1-8	2-25	3-6
7	8-17	8-15	9-9	10-19	11-13	11-5	1-17	1-9	2-26	3-7
8	8-18	8-16	9-10	10-20	11-14	11-6	1-18	1-10	2-27	3-8
9	8-19	8-6	9-11	10-30	11-15	11-7	1-19	1-11	2-28	3-9
10	8-20	8-7	9-12	10-21	11-16	11-8	1-20	1-12	2-29	3-10
11	8-21	8-8	9-13	10-22	11-17	11-9	1-21	1-13	2-30	3-11
12	8-28	8-9	9-14	10-23	11-18	11-10	1-22	1-14	2-1	3-12
13	8-29	8-10	9-15	10-24	11-19	11-11	1-23	1-15	2-2	3-13
14	8-30	8-11	9-16	10-25	11-20	11-12	1-24	1-16	2-3	3-14
15	8-1	8-12	9-17	10-26	11-21	11-13	1-25	1-17	2-4	3-7
16	8-2	8-13	9-18	10-27	11-22	11-14	1-26	1-18	2-5	3-8
17	8-3	8-15	9-19	10-28	11-23	11-15	1-27	1-19	2-6	3-9
18	8-4	8-16	9-20	10-29	11-24	11-16	1-28	1-20	2-7	3-10
19	8-5	8-17	9-22	10-30	11-25	11-17	1-29	1-21	2-8	3-11
20	8-6	8-18	9-23	10-1	11-26	11-18	1-30	1-22	2-9	3-12
21	8-7	8-19	9-24	10-2	11-27	11-19	1-1	1-23	2-10	3-13
22	8-8	8-20	9-25	10-3	11-28	11-20	1-2	1-25	2-11	3-14
23	8-9	8-21	9-26	10-4	11-29	11-21	1-3	1-26	2-12	3-24
24	8-10	8-28	9-27	10-5	11-30	11-22	1-4	1-27	2-13	3-25
25	8-11	8-29	9-28	10-6	1-1	11-23	1-5	1-28	2-14	3-26

ТРІКІ-21-2

Номер варіанту	Номер розділу - номер задачі									
	[1]						[2]			
1	8-17	8-7	9-1	10-30	11-27	11-11	1-11	1-5	2-7	3-1
2	8-18	8-8	9-2	10-21	11-28	11-12	1-12	1-6	2-8	3-2
3	8-19	8-9	9-3	10-22	11-29	11-13	1-13	1-7	2-9	3-3
4	8-20	8-10	9-4	10-23	11-30	11-14	1-14	1-8	2-10	3-4
5	8-21	8-11	9-5	10-24	11-1	11-15	1-15	1-9	2-11	3-5
6	8-22	8-12	9-6	10-25	11-2	11-16	1-16	1-10	2-12	3-6
7	8-23	8-13	9-7	10-26	11-3	11-17	1-17	1-11	2-13	3-23
8	8-24	8-14	9-8	10-27	11-4	11-18	1-18	1-12	2-14	3-24
9	8-25	8-15	9-21	10-28	11-5	11-19	1-19	1-13	2-15	3-25
10	8-26	8-16	9-22	10-29	11-6	11-20	1-20	1-14	2-16	3-25
11	8-27	8-17	9-23	10-1	11-7	11-21	1-21	1-15	2-17	3-27
12	8-28	8-18	9-24	10-2	11-8	11-22	1-22	1-16	2-18	3-28
13	8-29	8-19	9-25	10-3	11-9	11-23	1-23	1-17	2-19	3-29
14	8-30	8-20	9-26	10-4	11-10	11-24	1-25	1-18	2-20	3-30
15	8-1	8-21	9-27	10-5	11-11	11-25	1-26	1-19	2-21	3-7
16	8-2	8-28	9-28	10-6	11-12	11-26	1-27	1-20	2-22	3-8
17	8-3	8-29	9-30	10-7	11-13	11-27	1-28	1-21	2-23	3-9
18	8-4	8-30	9-9	10-8	11-14	11-28	1-29	1-22	2-24	3-11
19	8-5	8-1	9-10	10-9	11-15	11-29	1-30	1-23	2-25	3-12
20	8-6	8-2	9-11	10-10	11-16	11-30	1-1	1-25	2-26	3-13
21	8-7	8-3	9-12	10-11	11-17	11-1	1-2	1-26	2-27	3-14
22	8-8	8-4	9-13	10-12	11-18	11-2	1-3	1-27	2-28	3-15
23	8-9	8-5	9-14	10-13	11-19	11-3	1-4	1-28	2-29	3-16
24	8-10	8-6	9-15	10-14	11-20	11-4	1-5	1-29	2-30	3-17
25	8-11	8-7	9-16	10-15	11-21	11-5	1-6	1-30	2-1	3-18

ТРІМІ 21-1

Номер варіанту	Номер розділу - номер задачі									
	[1]						[2]			
1	8-5	8-3	9-1	10-7	11-1	11-23	1-5	1-27	2-11	3-2
2	8-6	8-4	9-2	10-8	11-2	11-24	1-6	1-28	2-12	3-3
3	8-7	8-5	9-3	10-9	11-3	11-25	1-7	1-29	2-13	3-4
4	8-8	8-6	9-4	10-10	11-4	11-26	1-8	1-30	2-14	3-5
5	8-9	8-7	9-5	10-11	11-5	11-27	1-9	1-1	2-15	3-6
6	8-10	8-8	9-6	10-12	11-6	11-28	1-10	1-2	2-16	3-7
7	8-11	8-9	9-7	10-13	11-7	11-29	1-11	1-3	2-17	3-8
8	8-12	8-10	9-8	10-14	11-8	11-30	1-12	1-4	2-18	3-9
9	8-13	8-11	9-9	10-15	11-9	11-1	1-13	1-5	2-19	3-10
10	8-14	8-12	9-10	10-16	11-10	11-2	1-14	1-6	2-20	3-11
11	8-15	8-13	9-11	10-17	11-11	11-3	1-15	1-7	2-24	3-12
12	8-16	8-14	9-12	10-18	11-12	11-4	1-16	1-8	2-25	3-13
13	8-17	8-15	9-9	10-19	11-13	11-5	1-17	1-9	2-26	3-14
14	8-18	8-16	9-10	10-20	11-14	11-6	1-18	1-10	2-27	3-15
15	8-19	8-6	9-11	10-30	11-15	11-7	1-19	1-11	2-28	3-16
16	8-20	8-7	9-12	10-1	11-16	11-8	1-20	1-12	2-29	3-17
17	8-21	8-8	9-13	10-2	11-17	11-9	1-21	1-13	2-30	3-18
18	8-22	8-9	9-14	10-3	11-18	11-10	1-22	1-14	2-1	3-19

ТРІМІ 21-2

Номер варіанту	Номер розділу - номер задачі									
	[1]						[2]			
1	8-19	8-6	9-11	10-30	11-15	11-7	1-19	1-11	2-28	3-7
2	8-20	8-7	9-12	10-21	11-16	11-8	1-20	1-12	2-29	3-8
3	8-21	8-8	9-13	10-22	11-17	11-9	1-21	1-13	2-30	3-9
4	8-28	8-9	9-14	10-23	11-18	11-10	1-22	1-14	2-1	3-10
5	8-29	8-10	9-15	10-24	11-19	11-11	1-23	1-15	2-2	3-11
6	8-30	8-11	9-16	10-25	11-20	11-12	1-24	1-16	2-3	3-12
7	8-1	8-12	9-17	10-26	11-21	11-13	1-25	1-17	2-4	3-13
8	8-2	8-13	9-18	10-27	11-22	11-14	1-26	1-18	2-5	3-14
9	8-29	8-19	9-25	10-3	11-29	11-18	1-23	1-17	2-19	3-24
10	8-30	8-20	9-26	10-4	11-30	11-19	1-24	1-18	2-20	3-25
11	8-1	8-24	9-27	10-5	11-1	11-20	1-25	1-19	2-24	3-26
12	8-2	8-25	9-28	10-6	11-2	11-21	1-26	1-20	2-25	3-28
13	8-3	8-26	9-29	10-7	11-3	11-27	1-27	1-21	2-26	3-29
14	8-4	8-27	9-30	10-8	11-4	11-28	1-28	1-22	2-27	3-7
15	8-11	8-28	9-1	10-13	11-7	11-29	11-5	1-23	2-17	3-8
16	8-12	8-29	9-2	10-14	11-8	11-30	11-6	1-24	2-18	3-9
17	8-13	8-30	9-3	10-15	11-9	11-1	11-7	1-25	2-19	3-10
18	8-14	8-20	9-4	10-16	11-10	11-2	11-8	1-26	2-20	3-11

5. Перелік тестів.

Електричне поле

1. Якою формулою визначається закон збереження електричного заряду?
2. За якою формулою визначається сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів, що перебувають у вакуумі?
3. За якою формулою визначається результуюча сила $\vec{F}$, з якою діють на точковий заряд q N точкових зарядів q_i, де $i = 1,2,3,...N$?
4. Яка формула відповідає визначенню напруженості електричного поля $\vec{E}$?
5. Що є одиницею вимірювання вектора напруженості електричного поля?
6. Чому дорівнює потік вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ крізь довільну незамкнену поверхню, яка перебуває у неоднорідному полі?
7. Чому дорівнює потік вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ крізь довільну замкнуту поверхню, яка перебуває у неоднорідному полі?
8. Що є одиницею вимірювання потоку вектора напруженості електричного поля?
9. Якою формулою задається потенціал електричного поля?
10. Яким співвідношенням пов’язаний потенціал з напруженістю електричного поля в загальному випадку?
11. Якою формулою визначається напруженість поля диполя в загальному випадку?
12. Чому дорівнює електричний момент диполя?

13. Чому дорівнює потенціал поля диполя?
14. Якою формулою визначається лінійна густина заряду?
15. Якою формулою визначається поверхнева густина заряду?
16. Якою формулою визначається об'ємна густина заряду?
17. Якою формулою визначається напруженість електростатичного поля точкового заряду?
18. Якою формулою визначається напруженість електростатичного поля системи точкових зарядів?
19. Якою формулою визначається напруженість електростатичного поля нескінченної рівномірно зарядженої площини?
20. Якою формулою визначається напруженість електростатичного поля рівномірно зарядженої сферичної поверхні?
21. Якою формулою визначається напруженість електростатичного поля між різнойменними зарядженими паралельними площинами?
22. Який вигляд має теорема Гауса для електростатичного поля в вакуумі?
23. Який вигляд має теорема Гауса для електростатичного поля в середовищі?
24. Який вигляд має теорема Стокса для електростатичного поля в середовищі?
25. Який вигляд має теорема про циркуляцію?
26. Чому дорівнює потенціал поля точкового заряду?
27. Чому дорівнює потенціал поля системи точкових зарядів?
28. Чому дорівнює потенціал поля в середині діелектричної кулі радіуса a, якщо заряд рівномірно розподілений по її поверхні?
29. Чому дорівнює потенціал поля в середині діелектричної кулі радіуса a, якщо заряд рівномірно розподілений за об'ємом?
30. Потенціальна енергія двох нерухомих зарядів дорівнює:
31. Потенціальна енергія системи нерухомих зарядів дорівнює:
32. Чому дорівнює потенціальна енергія однорідно зарядженої кулі?
33. Чому дорівнює потенціальна енергія тонкого сферичного шару?
34. Ємність відокремленого зарядженого провідника дорівнює
35. Чому дорівнює ємність довільного конденсатора?
36. Чому дорівнює ємність плоского конденсатора?
37. Чому дорівнює ємність сферичного конденсатора?
38. Чому дорівнює ємність циліндричного конденсатора?
39. Чому дорівнює енергія довільного зарядженого конденсатора?
40. Чому дорівнює енергія зарядженого плоского конденсатора
41. Чому дорівнює ємність батареї паралельно з'єднаних конденсаторів?
42. Чому дорівнює ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів?
43. Яка з наступних одиниць вимірювання є одиницею вимірювання електричного заряду в системі SI
44. Яка з наступних одиниць вимірювання є одиницею вимірювання напруженості електричного поля в системі SI
45. Яка з наступних одиниць вимірювання є одиницею вимірювання електричного дипольного моменту в системі SI?
46. Яка з наступних одиниць вимірювання є одиницею вимірювання потенціалу електричного поля в системі SI?

47. Якою формулою визначається принцип суперпозиції електростатичних полів?
48. Чому дорівнює потенціальна енергія двох нерухомих зарядів
49. Чому дорівнює сила взаємодії двох нерухомих електричних зарядів?
50. Чому дорівнює напруженість електростатичного поля нерухомого точкового заряду?
51. Чому дорівнює потенціал нерухомого точкового електричного заряда?
52. Чому дорівнює ємність плоского конденсатора?
53. Чому дорівнює ємність двох однакових паралельно з'єднаних конденсаторів?
54. Чому дорівнює ємність двох однакових послідовно з'єднаних конденсаторів?
55. Чому дорівнює ємність трьох однакових послідовно з'єднаних конденсаторів?
56. Що є одиницею вимірювання потоку вектора електричного зміщення?
57. Що є одиницею вимірювання електричного зміщення?
58. Яка формула відповідає визначенню поляризованості?
59. Чому дорівнює робота по переміщенню заряду в електростатичному полі?
60. Який вигляд має теорема Гауса для напруженості електростатичного поля?
61. Теорема про циркуляцію вектора напруженості має вигляд:
62. Який вигляд має теорема Гауса для напруженості електростатичного поля в диференціальному вигляді?
63. Який вигляд має теорема Гаусса електростатичного поля в середовищі диференціальному вигляді?
64. Якою формулою пов'язані між собою напруженість та індукція електричного поля?
65. Чому дорівнює напруженість електростатичного поля всередині провідника?
66. Чому дорівнює напруженість електростатичного поля всередині діелектрика?
67. Якою формулою пов'язані між собою напруженість електричного поля та поляризованість?
68. Чому дорівнює густина енергії електростатичного поля?

Постійний струм

69. За якої умови в тілі виникає електричний струм?
70. Що називається силою струму?
71. Що відбувається у напрямку, який прийнято за напрямок струму?
72. Що таке густина струму?
73. За якої умови може існувати струм провідності?
74. Як пов'язані між собою сила та густина струму?
75. Опір якого провідника визначає співвідношення $R = \rho \frac{l}{S}$, де ρ - питомий опір, l – довжина провідника, S – його площа перерізу

76. Перше правило Кірхгофа стверджує, що алгебраїчний додаток струмів, які сходяться в одному вузлі, дорівнює нулю $\sum I_k = 0$. Результатом чого є це правило?
77. Для більшості металів за температур, близьких до кімнатної, питомий електричний опір ρ змінюється пропорційно термодинамічній температурі Т. За яким законом це відбувається?
78. За рахунок яких носіїв електричного струму виникає електропровідність електролітів?
79. Який вигляд має закон Ома в диференціальній формі?
80. Який вигляд має закон Ома для ділянки кола
81. Який вигляд має закон Ома для замкнутої ділянки кола?
82. Чому дорівнює загальний опір двох послідовно з'єднаних однакових однорідних циліндричних провідників?
83. Чому дорівнює загальний опір двох паралельно з'єднаних однакових однорідних циліндричних провідників?
84. Чому дорівнює опір однорідного циліндричного провідника?
85. Чому дорівнює опір неоднорідного циліндричного провідника?
86. Який вигляд має закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі?
87. Який вигляд має закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі?
88. Який вигляд має закон збереження енергії для електричного поля?
89. Який вигляд має закон збереження енергії для електричного поля в диференціальній формі?
90. Яка формула відповідає визначенню ЕРС?
91. Одиниця вимірювання ЕРС?

Магнітне_поле

92. Чим прийнято кількісно характеризувати магнітне поле?
93. Чому дорівнює сила, що діє на рухомий заряд з боку магнітного поля?
94. Чому дорівнює сила, що діє на нерухомий заряд з боку магнітного поля?
95. Чому дорівнює згідно з принципом суперпозиції індукція магнітного поля, яке створюється в даній точці декількома струмами?
96. Що є одиницею вимірювання напруженості магнітного поля в міжнародній системі одиниць SI?
97. Що є одиницею вимірювання індукції магнітного поля в міжнародній системі одиниць SI?
98. Чому дорівнює магнітне поле, що створюється зарядом, що рухається?
99. Чому дорівнює магнітне поле, що створюється нерухомим зарядом?
100. Який вигляд має закон Ампера для елемента лінійного струму?
101. Який вигляд має закон Ампера для провідника скінченої довжини?
102. Який вигляд має закон Ампера для прямолінійного провідника довжини l?
103. Як зміниться сила Ампера, якщо довжину провідника зменшити?
104. Який вигляд має закон Біо-Савара-Лапласа?
105. Чому дорівнює індукція магнітного поля, що створено прямим нескінченно довгим провідником зі струмом?
106. Чому дорівнює індукція провідника зі струмом скінченої довжини?

107. Чому дорівнює індукція магнітного поля, що створено провідником зі струмом у формі кола
108. Чому дорівнює індукція на осі нескінченно довгого соленоїда зі струмом?
109. Чому дорівнює магнітне поле ззовні тороїда?
110. Чому дорівнює потік вектора магнітної індукції через елемент площі?
111. Чому дорівнює повний магнітний потік через довільну незамкнуту поверхню?
112. Чому дорівнює повний магнітний потік через плоску поверхню?
113. Чому дорівнює повний магнітний потік через довільну замкнуту поверхню?
114. Як змінюється магнітний потік крізь поверхню при зміні площі поверхні у в N разів? При зміні в N разів індукції магнітного поля? При зміні напрямку магнітного поля?
115. Що стверджує теорема Гауса для магнітних полів в інтегральному вигляді?
116. Що стверджує теорема про циркуляцію для магнітних полів в інтегральному вигляді?
117. Що стверджує теорема Гауса для магнітних полів в диференціальному вигляді?
118. Що стверджує теорема про циркуляцію для магнітних полів в диференціальному вигляді?
119. Яким співвідношенням задається узагальнена сила Лоренца?
120. Чому дорівнює сила , що діє на заряд в електромагнітному полі?
121. Чому дорівнює сила , що діє на заряд в електричному полі?
122. Чому дорівнює робота сили Лоренца?
123. Чому дорівнює робота по переміщенню провідника зі струмом у магнітному полі ?
124. Як змінюється момент сил, що діє на контур у магнітному полі при зміні сили струму у контурі? При зміні розмірів контуру?
125. Як зміниться сила взаємодії двох прямолінійних провідників зі струмом, якщо відстань між ними зменшити?
126. Як зміниться магнітний момент контуру зі струмом, якщо змінити напрям струму?

Магнітне поле у речовині

127. Якою формулою визначається магнітний момент контуру зі струмом?
128. Чому дорівнює магнітній момент струму, що створюється електроном?
129. Чому дорівнює з квантової точки зору магнітній момент струму, що створюється електроном?
130. Чому дорівнює орбітальний момент електрона?
131. Від чого залежить відношення магнітного та механічного моментів для електрона $\frac{p_m}{L}$?
132. Яке відношення справедливе для власного моменту імпульсу електрона?
133. Що стверджує теорема про циркуляцію для магнітного поля в речовині?
134. Яким виразом намагніченість пов’язана з напруженістю магнітного поля?
135. Що називається намагніченістю?

136. Від чого залежить частота Ларморової прецесії ?
137. Якому виразу задовольняє магнітна сприйнятливість парамагнетика?
138. Внаслідок чого виникає феромагнітний стан речовини?
139. Внаслідок чого виникає парамагнітний ефект?
140. Внаслідок чого виникає діамагнітний ефект?
141. Коли виникає положення стійкої рівноваги для контуру зі струмом у магнітному полі?
142. Що відбудеться з магнітним полем тороїда при заповненні його однорідним ізотропним магнетиком з проникністю μ?
143. Як зміниться енергія магнітного поля довгого соленоїда при заповненні його однорідним ізотропним магнетиком з проникністю μ?
144. Як зміниться енергія магнітного поля довгого соленоїда, якщо струм в ньому збільшити у 3 рази?
145. Які речовини називають антиферомагнетиками?
146. Які речовини називають діамагнетиками?
147. Чим ферити відрізняються від феромагнетиків?
148. Що відбувається при переході від магнетика з більшою магнітною проникністю до магнетика з меншою магнітною проникністю?
149. У яких речовинах зовнішнє магнітне зменшується?
150. Як зміниться густина енергії магнітного поля, якщо магнітна проникність середовища зменшилась у 2 рази?
151. Якій умові задовольняє магнітна проникливість вакууму?
152. Якій умові задовольняє магнітна проникливість діамагнетика?
153. Якій умові задовольняє магнітна проникливість парамагнетика?
154. Якій умові задовольняє магнітна проникливість феромагнетику?
155. Якій умові задовольняє магнітна сприйнятливість вакууму?
156. Якій умові задовольняє магнітна сприйнятливість діамагнетика?
157. Якій умові задовольняє магнітна сприйнятливість парамагнетика?
158. Якій умові задовольняє магнітна сприйнятливість феромагнетику?

Явище електромагнітної індукції

159. Від чого залежить індуктивність контуру?
160. Чому дорівнює індуктивність контуру?
161. Чому дорівнює індуктивність довгого соленоїду?
162. Чому дорівнює коефіцієнт взаємоіндукції?
163. Чому дорівнює електрорушійна сила згідно з основним законом електромагнітної індукції?
164. Чому дорівнює електрорушійна сила самоіндукції, що виникає у контурі, який перебуває у вакуумі?
165. Чому дорівнює електрорушійна сила індукції, що виникає у відрізку провідника, який рухається в однорідному магнітному полі?
166. Чому дорівнює електрорушійна сила самоіндукції, що виникає у контурі, який перебуває у феромагнітному середовищі?

167. За яким законом визначається сила струму у колі при вмиканні джерела ЕРС?
168. За яким законом змінюється сила струму у колі при вимиканні джерела ЕРС?
169. В яких одиницях вимірюється електрорушійна сила електромагнітної індукції?
170. Від чого залежить значення індукційного струму в соленоїді?
171. Як називають явище виникнення електрорушійної сили електромагнітної індукції в контурі під час зміни в ньому сили струму?
172. Як називають явище виникнення електричного струму в замкнутому контурі під час зміни потоку магнітного поля через поверхню, яку охоплює цей контур?
173. В яких одиницях вимірюється індуктивність контуру?
174. Як називають явище виникнення електрорушійної сили електромагнітної індукції в одному з двох достатньо близько розташованих контурів під час зміни сили струму в другому контурі?
175. Яке з явищ використовується в трансформаторі?
176. За рахунок якого явища струм у колі з індуктивністю не зникає миттєво при відключенні джерела струму?
177. Напруженість магнітного поля виросла. Як змінилася об'ємна густина енергії магнітного поля?
178. Відстань між двома котушками збільшили у N разів. Як змінився їх коефіцієнт взаємоіндукції?
179. Кількість витків вторинної обмотки трансформатора у n разів більше, ніж первинної. Як змінюється напруга змінного стуму у такому трансформаторі?
180. Як змінюється магнітний потік при зміні числа витків котушки?
181. Від чого залежить значення індукційного струму в соленоїді?
182. Як називають явище виникнення електрорушійної сили електромагнітної індукції в контурі під час зміни в ньому сили струму?

Електромагнітне_поле

183. Чому дорівнює об'ємна густина магнітної енергії?
184. Чому дорівнює енергія провідника з індуктивністю L, по якому проходить стум?
185. Чому дорівнює об'ємна густина енергії електричного поля?
186. Що є одиницею індуктивності в системі SI?
187. Що є одиницею магнітного потоку в системі SI?
188. Що є одиницею індукції магнітного поля в системі SI?
189. Що є одиницею потужності в системі SI?
190. Який вигляд має рівняння безперервності?
191. За яких умов векторне поле є потенціальним?
192. За яких умов векторне поле є вихровим?

193. За яких умов векторне поле є невихровим?
194. Що повністю визначає дію електромагнітного поля на електричний заряд, внесений в нього?
195. Яке з рівнянь Максвела показує, що магнітних зарядів не існує?
196. Яке з рівнянь Максвела виражає закон збереження електричного заряду?
197. Яке з рівнянь Максвела еквівалентно законові Кулона?
198. Яке з рівнянь Максвела є теоремою Гауса для електричних полів?
199. Яке з рівнянь Максвела є теоремою Гауса для магнітних полів?
200. Яке з рівнянь Максвела є законом Фарадея в інтегральній формі?
201. Яке з рівнянь Максвела є теоремою Гауса для потоку електричного зміщення?
202. Яке з рівнянь Максвела відображує положення Максвела про магнітне поле струму зміщення?
203. Яке з рівнянь Максвела є теоремою Гауса для магнітного потоку через замкнену поверхню?
204. В якому випадку виникають вихрові струми?
205. Що називають струмом зміщення?
206. Чому дорівнює густина струму зміщення?
207. Чому дорівнює циркуляція вихрового електричного поля?
208. Чому дорівнює циркуляція електростатичного поля?

Електромагнітні коливання

209. Який вигляд має диференціальне рівняння вильних згасаючих електромагнітних коливань?
210. Який вигляд має диференціальне рівняння вимушених електромагнітних коливань заряду q в коливальному контурі?
211. Як називається результат додавання двох взаємноперпендикулярних коливань з кратними частотами?
212. Чому дорівнює період власних коливань коливального контуру, який утворюють індуктивність L та конденсатор C?
213. Як називають результат додавання двох коливань з близькими частотами, що відбуваються в одному напрямку?
214. Чому дорівнює циклічна частота власних коливань коливального контуру, який утворюють індуктивність L та конденсатор C
215. Які елементи містить ідеальний послідовний коливальний контур?
216. Якому правилу підпорядковується індукційний струм, що виникає у контурі?
217. Як називають опір конденсатора, що визначається його ємністю?
218. Як називають опір котушки дроту, що визначається її індуктивністю?
219. Що відбувається при резонансі напруг з амплітудою сили струму в зовнішньому колі,що складається з послідовно з'єднаних конденсатороа та котушки індуктивності?
220. З яких елементів складається ланцюг, в якому відбувається резонанс напруги?

221. В яких одиницях вимірюється електрорушійна сила електромагнітної індукції?
222. Як називають явище виникнення електричного струму в замкненому контурі під час зміни потоку магнітного поля через поверхню, яку охоплює цей контур?
223. В яких одиницях вимірюється індуктивність контуру?
224. Як називають явище виникнення електрорушійної сили електромагнітної індукції в одному з двох достатньо близько розташованих контурів під час зміни сили струму в другому контурі?

ЛІТЕРАТУРА

1. Методичні вказівки до ПЗ з курсу фізики (частина 1)/Упоряд.: В.О.Стороженко та ін. –Харків:ХНУРЕ, 2013. –152с. (В-7891 фіз,В-7987 фіз)
2. Методичні вказівки до ПЗ з фізики (частина2)/Упоряд.: В.О.Стороженко та ін. –Харків:ХНУРЕ, 2013. –140с. (В-7990 фіз,В-7777 фіз)
3. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 2. Електрика та магнетизм: навч. посібник./ І.М. Кібець та ін. –Харків: «Компанія СМІТ», 2009-424с. (53(07) к74);
4. Методичні вказівки до лабораторних робіт (2 частина). Скл. Коваленко О.М., Лазаренко О.В. та ін. – Харків:ХНУРЕ, 2006.(В-6953фіз)
5. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Частина 3. Оптика. Атомна фізика та фізика твердого тіла / Упор. Малик С.Б. та ін.- Харків: ХНУРЕ, 2011(В-7776фіз)
6. Збірник тестів з курсу фізики/ О.М. Коваленко та ін. – Харків: ХНУРЕ,2006. –124с. (53(07)341)

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

Кафедра фізики

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

по 2-му семестру курсу фізики

для студентів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка,
спеціалізацій Інфокомунікаційна інженерія, Інформаційно- мережна інженерія.

Підготувала:
доц. Коваленко О.М.

Затверджено:
на засіданні кафедри фізики
Протокол №1 від 30.08.2021 р.

Харків 2021

1 Зміст навчального матеріалу на семестр

Змістовий модуль 3. Електромагнітні коливання та хвилі. Оптика.
Тема 9. Електромагнітні коливання та змінний струм
Тема 10. Електромагнітні хвилі
Тема 11. Хвильова оптика.
Тема 12. Квантова оптика.

Змістовий модуль 3. Елементи квантової механіки
Тема 13. Квантова механіка.
Тема 14. Квантова теорія будови атомів та молекул.
Тема 15. Спонтанне та вимушене випромінювання.

2 Рейтингова оцінка за дисципліною

2.1 Кількісні критерії оцінювання

Для оцінювання роботи студента протягом семестру підсумкова рейтингова оцінка $О_{сем}$ розраховується як середнє вагове оцінок за різні види занять та контрольні заходи (див табл.)

Вид заняття(контролю)	Кількість балів	Ваговий коефіцієнт
ПЗ	0…100	0,25
ЛР	0…100	0,25
ІРЗ	0…100	0,25
Тест по модулю	0…100	0,25
Разом	0…100	1,0

Кожне практичне завдання оцінюється в 100 балів шляхом проведення експрес-контролю, а за семестр виставляється середній за усіма заняттями бал.

Кожний цикл лабораторних робіт (за семестр два цикла по 2-3 лр) оцінюється в 100 балів (50 балів за оформлення звітів + 50 балів за захист). За семестр виставляється середня оцінка за 2 цикла.

Індивідуальне розрахункове семестрове завдання (рішення набора задач) оцінюється в 100 балів.

Кожне тестування за змістовним модулем (2 рази за семестр) оцінюється в 100 балів, а за семестр підраховується середній бал (за двома тестуваннями).

Рейтингова оцінка за семестр підраховується за формулою :

$$О_{сем}=0,25(<ПЗ>+<ЛР>+ІРЗ+<Т>),$$

де <ПЗ>,<ЛР>,<Т>- середні значення оцінок за відповідні види контролю. Максимальне значення $О_{сем}$ дорівнює 100, а мінімальне значення $О_{сем}$ для допуску до іспиту дорівнює 60.

Підсумкова оцінка за семестр P_n обчислюється за формулою:
$P_n = 0,6 \cdot O_{сем} + 0,4 \cdot O_{icп}$, де $O_{icп}$ – оцінка за іспит у 100-бальній системі.

Якщо іспит проводиться у письмовій формі, то білет складається з двох теоретичних запитань та практичного завдання. Теоретичні запитання оцінюються за 100-бальною шкалою в 30 балів кожне, а завдання – в 40 балів.

Якщо іспит проводиться (за узгодженням з деканатом) у вигляді комп'ютерного тестування, то тест складається з 20 запитань, кожне з яких оцінюється у 5 балів.

2.2 Якісні критерії оцінювання.

Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру.

Задовільно,D,E (60-74). Мати мінімум знань і умінь. Відпрацювати всі лабораторні роботи і виконати ІРЗ. Вміти застосовувати закони фізики для розв'язання найпростіших задач.

Добре,С (75-89). Знати основні закони фізики і вміти їх застосовувати для розв'язання задач. Відпрацювати всі лабораторні роботи, оформити і захистити звіти. Виконати ІРЗ.

Відмінно,A,B (90-100). Відпрацювати всі лабораторні роботи, оформити і захистити звіти,виконати ІРЗ. Знати всі розділи курсу фізики, вміти аналізувати фізичні явища та процеси із застосуванням відповідних законів та співвідношень. Вміти розв'язувати задачі підвищеної складності. Знати загальні принципи проведення фізичного експерименту й обробки його результатів.

Критерії оцінювання знань та вмінь студента на письмовому іспиті(екзаменаційному тестуванні)

Задовільно,D,E (60-74). Показати знання основного теоретичного та практичного матеріалу, надав вірні відповіді на більшість запитань, одержаних при складанні іспиту або тестування.

Добре,С (75-89). Показати повне знання теоретичного та практичного матеріалу, надав вірні відповіді на переважну більшість запитань.

Відмінно,A,B (90-100). Показати систематизовані глибокі знання теоретичного та практичного матеріалу,надав вичерпні відповіді на всі поставлені запитання. Навести приклади спостереження фізичних законів та явищ на практиці.

3. Перелік запитань експрес-контролю на практичних заняттях.

Тема 1 *Хвильова оптика*

1. Що називається абсолютним показником заломлення середовища?
2. Сформулюйте закон відбиття світла.
3. Сформулюйте закон заломлення світла
4. Сформулюйте принцип Гюйгенса.
5. Які хвилі називаються когерентними?
6. Яка хвиля називається монохроматичною?
7. Час і довжина когерентності.
8. Що називається інтерференцією? Умови її спостереження.
9. Умова мінімума інтерференції.
10. Умова максимума інтерференції.
11. Методи спостереження інтерференції світла.
12. Яке явище називається дифракцією? Які види дифракції ви знаєте?
13. У чому відмінності дифракції Френеля та Фраунгофера?
14. Сформулюйте принцип Гюйгенса-Френеля.
15. Чому дорівнює радіус ^{m}-й зони Френеля сферичної хвилі? плоскої хвилі?
16. Що називається дифракційною решіткою?
17. Чому дорівнює роздільна здатність дифракційної решітки?
18. Чому дорівнюють кутова та лінійна дисперсія дифракційної решітки?
19. Запишіть умови дифракційних мінімумів і максимумів при дифракції на щілині.
20. Запишіть умови головних мінімумів і максимумів для дифракційної решітки.
21. Що називається дисперсією світла?
22. Яке світло називається природним, поляризованим?
23. Ступінь поляризації. Чому дорівнює ступінь поляризації для природного, плоскополяризованого світла?
24. Сформулюйте закон Малюса.
25. Поглинання світла. Закон Бугера.
26. Сформулюйте закон Брюстера.

Тема 2 *Рівноважне теплове випромінювання.*

1. Яке випромінювання називається тепловим?
2. Яке випромінювання називається рівноважним?
3. Що називається потоком випромінювання?
4. Випромінювальна здатність. Її одиниця виміру.
5. Спектральна густина випромінювальної здатності.
6. Поглинальна здатність тіла.
7. Сформулюйте закон Кирхгофа.
8. Яке тіло називають абсолютно чорним? білим? сірим?
9. Сформулюйте закон Стефана-Больцмана.

10. Сформулюйте закон Віна.
11. Що називається квантом? Чому дорівнює енергія кванта?
12. Запишіть формулу Планка.

Тема 3 ***Квантові властивості випромінювання***

1. У чому полягає явище зовнішнього фотоефекта?
2. Що таке фотострум насичення? Від чого він залежить?
3. Що така затримуюча напруга?
4. Як виглядає вольт-амперна характеристика зовнішнього фотоефекту?
5. Що таке «червона» межа фотоефекта?
6. Запишіть рівняння Эйнштейна для фотоефекта.
7. Сформулюйте закони фотоефекта (закони Столєтова).
8. Від чого залежить кінетична енергія фотоелектронів?
9. Що таке фотон?
10. Чому дорівнює маса та імпульс фотона?
11. Чому дорівнює енергія фотона?
12. Що називається ефектом Комптона?
13. Від чого залежить комптоновське збільшення довжини хвилі?
14. Чому дорівнює комптонівська довжина хвилі?
15. Що називається тиском світла?
16. Від чого залежить тиск світла?
17. Для якого тіла тиск світла більше – дзеркального або чорного. Доведіть свою відповідь.

Тема 4 ***Хвилі де Бройля. Співвідношення невизначеності. Рівняння Шредінгера***

1. В чому полягає гіпотеза де-Бройля?
2. Що таке хвиля де Бройля? Чому дорівнює її довжина?
3. Що таке корпускулярно – хвильовий дуалізм?
4. У чому полягають хвильові властивості мікрочастинок?
5. Як визначається групова та фазова швидкість хвиль де Бройля?
6. Запишіть співвідношення невизначеностей для координат і імпульсу.
7. Співвідношення невизначеності Гейзенберга.
8. Запишіть співвідношення невизначеностей для енергії й часу.
9. В чому полягає фізичний зміст співвідношення невизначеностей?
10. В чому полягає фізичний зміст Ψ-функції
11. Від чого залежить ймовірність виявлення частинки в даній точці простору?
12. Яким умовам повинна задовольняти Ψ-функція?
13. Запишіть умову нормування хвильової функції.
14. Сформулюйте принцип суперпозиції для Ψ-функції.
15. Запишіть вираз для псі-функції у загальному виді.
16. Запишіть загальне рівняння Шредінгера і дайте визначення основних параметрів.

17. Запишіть стаціонарне рівняння Шредінгера і дайте визначення основних параметрів.
18. Хвильова функція, що описує рух частки в одновимірній потенційній ямі. Зобразіть її графічно.
19. В чому полягає явище тунельного ефекту?
20. За допомогою яких фізичних характеристик описують проходження частинки крізь потенціальний бар'єр?
21. Чому дорівнює коефіцієнт прозорості прямокутного потенціального бар'єру?

4. Індивідуальне домашнє завдання з фізики.

ТРІКІ-21-1

Номер варіанту	Номер розділу - номер задачі									
1	4-11	4-9	5-7	5-13	6-7	6-29	8-11	8-3	9-1	9-24
2	4-12	4-10	5-8	5-14	6-8	6-30	8-12	8-4	9-2	9-25
3	4-13	4-11	5-9	5-15	6-9	6-1	8-13	8-5	9-3	9-26
4	4-14	4-12	5-10	5-16	6-10	6-2	8-14	8-6	9-4	9-27
5	4-15	4-13	5-11	5-17	6-11	6-3	8-15	8-7	9-5	9-28
6	4-16	4-14	5-12	5-18	6-12	6-4	8-16	8-8	9-6	9-6
7	4-17	4-15	5-5	5-19	6-13	6-5	8-17	8-9	9-7	9-7
8	4-18	4-16	5-10	5-20	6-14	6-6	8-18	8-10	9-8	9-8
9	4-19	4-6	5-11	5-30	6-15	6-7	8-19	8-11	9-21	9-9
10	4-20	4-7	5-12	5-21	6-16	6-8	8-20	8-12	9-22	9-10
11	4-21	4-8	5-13	5-22	6-17	6-9	8-21	8-13	9-23	9-11
12	4-28	4-9	5-14	5-23	6-18	6-10	8-22	8-14	9-24	9-12
13	4-29	4-10	5-15	5-24	6-19	6-11	8-23	8-15	9-25	9-13
14	4-30	4-11	5-16	5-25	6-20	6-12	8-24	8-16	9-26	9-14
15	4-1	4-12	5-17	5-26	6-21	6-13	8-25	8-17	9-27	9-7
16	4-2	4-13	5-18	5-27	6-22	6-14	8-26	8-18	9-28	9-8
17	4-3	4-15	5-15	5-28	6-23	6-15	8-27	8-19	9-30	9-9
18	4-4	4-16	5-20	5-29	6-24	6-16	8-28	8-20	9-9	9-20
19	4-5	4-17	5-22	5-30	6-25	6-17	8-29	8-21	9-10	9-21
20	4-6	4-18	5-23	5-1	6-26	6-18	8-30	8-22	9-11	9-22
21	4-7	4-19	5-24	5-2	6-27	6-19	8-1	8-23	9-12	9-23
22	4-8	4-20	5-25	5-3	6-28	6-20	8-2	8-25	9-13	9-27
23	4-9	4-21	5-26	5-4	6-29	6-21	8-3	8-26	9-14	9-24
24	4-10	4-24	5-27	5-5	6-30	6-22	8-4	8-27	9-15	9-25
25	4-11	4-29	5-28	5-6	6-1	6-23	8-5	8-28	9-16	9-26

ТРІКІ-21-2

Номер варіанту	Номер розділу - номер задачі									
1	4-17	4-7	5-1	5-30	6-27	6-11	8-11	8-5	9-7	9-1
2	4-14	4-8	5-2	5-21	6-28	6-12	8-12	8-6	9-8	9-2
3	4-19	4-9	5-3	5-22	6-29	6-13	8-13	8-7	9-9	9-3
4	4-20	4-10	5-4	5-23	6-30	6-14	8-14	8-8	9-10	9-4

5	4-21	4-11	5-5	5-24	6-1	6-15	8-15	8-9	9-11	9-5
6	4-22	4-12	5-6	5-25	6-2	6-16	8-16	8-10	9-12	9-6
7	4-23	4-13	5-7	5-26	6-3	6-17	8-17	8-11	9-9	9-23
8	4-24	4-14	5-8	5-27	6-4	6-18	8-18	8-12	9-10	9-24
9	4-25	4-15	5-21	5-28	6-5	6-19	8-19	8-13	9-11	9-25
10	4-26	4-16	5-22	5-29	6-6	6-20	8-20	8-14	9-12	9-26
11	4-27	4-17	5-23	5-1	6-7	6-21	8-21	8-15	9-13	9-27
12	4-28	4-18	5-24	5-2	6-8	6-22	8-22	8-16	9-14	9-28
13	4-29	4-19	5-25	5-3	6-9	6-23	8-23	8-17	9-15	9-29
14	4-30	4-20	5-26	5-4	6-10	6-24	8-25	8-18	9-16	9-30
15	4-1	4-21	5-27	5-5	6-11	6-25	8-26	8-19	9-17	9-7
16	4-2	4-28	5-28	5-6	6-12	6-26	8-27	8-20	9-18	9-8
17	4-3	4-29	5-30	5-7	6-13	6-27	8-28	8-21	9-19	9-9
18	4-4	4-30	5-29	5-8	6-14	6-28	8-29	8-22	9-20	9-11
19	4-5	4-1	5-10	5-9	6-15	6-29	8-30	8-23	9-22	9-12
20	4-6	4-2	5-11	5-10	6-16	6-30	8-1	8-25	9-23	9-13
21	4-7	4-3	5-12	5-11	6-17	6-1	8-2	8-26	9-24	9-14
22	4-8	4-4	5-13	5-12	6-18	6-2	8-3	8-27	9-25	9-15
23	4-9	4-5	5-14	5-13	6-19	6-3	8-4	8-28	9-26	9-16
24	4-10	4-6	5-15	5-14	6-20	6-4	8-5	8-29	9-27	9-17
25	4-11	4-7	5-16	5-15	6-21	6-5	8-6	8-30	9-28	9-18

ТРІМІ 21-1

Номер варіанту	**Номер розділу - номер задачі**									
1	4-5	4-3	5-1	5-7	6-1	6-23	8-5	8-27	9-1	9-2
2	4-6	4-4	5-2	5-8	6-2	6-24	8-6	8-28	9-2	9-3
3	4-7	4-5	5-3	5-9	6-3	6-25	8-7	8-29	9-3	9-4
4	4-4	4-6	5-4	5-5	6-4	6-26	8-8	8-30	9-4	9-5
5	4-9	4-7	5-5	5-11	6-5	6-27	8-9	8-8	9-5	9-6
6	4-10	4-4	5-6	5-12	6-6	6-28	8-80	8-2	9-6	9-7
7	4-11	4-9	5-7	5-13	6-7	6-29	8-88	8-3	9-7	9-8
8	4-12	4-10	5-8	5-14	6-8	6-30	8-82	8-4	9-8	9-9
9	4-13	4-11	5-5	5-15	6-9	6-1	8-83	8-5	9-9	9-10
10	4-14	4-12	5-10	5-16	6-10	6-2	8-84	8-6	9-10	9-11
11	4-15	4-13	5-11	5-17	6-6	6-3	8-85	8-7	9-11	9-12
12	4-16	4-14	5-12	5-18	6-12	6-4	8-86	8-8	9-12	9-13
13	4-17	4-15	5-5	5-19	6-13	6-5	8-87	8-9	9-9	9-14
14	4-14	4-16	5-10	5-20	6-14	6-6	8-88	8-80	9-10	9-15
15	4-19	4-6	5-11	5-30	6-15	6-7	8-89	8-88	9-11	9-16
16	4-20	4-7	5-12	5-1	6-16	6-8	8-20	8-82	9-12	9-17
17	4-21	4-4	5-13	5-2	6-17	6-9	8-28	8-83	9-13	9-18
18	4-22	4-9	5-14	5-3	6-18	6-10	8-22	8-84	9-14	9-19

ТРІМІ 21-2

Номер варіанту	**Номер розділу - номер задачі**									
1	4-19	4-6	5-11	5-30	6-15	6-7	8-19	8-11	9-28	9-11
2	4-20	4-7	5-12	5-21	6-16	6-8	8-20	8-12	9-29	9-12
3	4-21	4-4	5-13	5-22	6-17	6-9	8-28	8-13	9-30	9-13

4	4-22	4-9	5-14	5-23	6-18	6-10	8-22	8-14	9-1	9-14
5	4-23	4-10	5-15	5-24	6-19	6-11	8-23	8-15	9-2	9-15
6	4-24	4-11	5-16	5-25	6-20	6-12	8-24	8-86	9-3	9-16
7	4-25	4-12	5-17	5-26	6-21	6-13	8-25	8-17	9-4	9-17
8	4-26	4-13	5-18	5-27	6-22	6-14	8-26	8-18	9-5	9-18
9	4-27	4-19	5-25	5-3	6-29	6-18	8-23	8-19	9-19	9-25
10	4-28	4-20	5-26	5-4	6-30	6-19	8-24	8-27	9-20	9-26
11	4-1	4-24	5-27	5-5	6-1	6-20	8-25	8-28	9-24	9-27
12	4-2	4-25	5-28	5-6	6-2	6-21	8-26	8-20	9-25	9-28
13	4-3	4-26	5-29	5-7	6-3	6-27	8-27	8-28	9-26	9-29
14	4-4	4-27	5-30	5-8	6-4	6-28	8-28	8-22	9-27	9-30
15	4-11	4-24	5-1	5-13	6-7	6-29	8-5	8-23	9-17	9-1
16	4-12	4-29	5-2	5-14	6-8	6-30	8-6	8-24	9-18	9-2
17	4-13	4-30	5-3	5-15	6-9	6-1	8-7	8-25	9-19	9-3
18	4-14	4-5	5-4	5-16	6-10	6-2	8-8	8-26	9-20	9-4

5. Перелік тестів.

Оптика

Геометрична оптика

1. Що вивчається в оптиці взагалі?
2. Що вивчається в геометричній оптиці?
3. Що називають елементом оптичної довжини шляху між двома точками?
4. Що називають елементом геометричної довжини шляху між двома точками?
5. Що називають оптичною довжиною шляху між двома точками?
6. Що називають геометричною довжиною шляху між двома точками?
7. За якої умови в середовищі спостерігається нормальна дисперсія?
8. За якої умови в середовищі спостерігається аномальна дисперсія?
9. Середа виявляється недиспергирующей, коли
10. З якого рівняння можна обчислити кут повного внутрішнього відбиття?

Хвильова оптика

11. Що вивчають в хвильовій оптиці?
12. Що випливає із закону Бугера-Ламберта?
13. Яке відношення визначає інтенсивність за умов інтерференції двох хвиль?
14. Який вигляд має умова інтерференційних максимумів?
15. Який вигляд має умова інтерференційних мінімумів?
16. Що називають інтерференцією?
17. Що називають інтерференцією світла?
18. Що називають дифракцією?
19. Що називають дифракцією світла?
20. Що називають хвильовим цугом?
21. Що називають часовою когерентністю?
22. Що називають часом когерентності?
23. Чому дорівнює радіус m-й зони Френеля сферичної хвилі?
24. Чому дорівнює радіус m-й зони Френеля плоскої хвилі?

25. Чому дорівнює радіус першої зони Френеля сферичної хвилі?
26. Чому дорівнює радіус першої зони Френеля плоскої хвилі?
27. Чому дорівнює кутова дисперсія дифракційної ґратки?
28. Чому дорівнює дисперсійна область дифракційної решітки?
29. Чому дорівнює роздільна здатність дифракційної ґратки?
30. Чому дорівнює період дифракційної ґратки?
31. З якого співвідношення можна визначити кут Брюстера?
32. Що стверджує закон Малюса?
33. Що стверджує закон Бугера-Ламберта?
34. Чому дорівнює фазова швидкість хвилі?
35. Чому дорівнює групова швидкість хвилі?

Квантова оптика

36. Що вивчається в квантовій оптиці?
37. Який спектр називають лінійчатим спектром?
38. Який спектр називають суцільним спектром?
39. Який спектр називають смугастим спектром?
40. В чому виявляються корпускулярні властивості світла?
41. Яка умова є справедливою для абсолютно чорного тіла?
42. Яке з наведених нижче тіл має максимум випромінювання, що припадає на найменшу довжину хвилі?
43. Чому дорівнює спектральна густина випромінювання?
44. Який закон теплового випромінення є найбільш універсальним?
45. Яка гіпотеза є підґрунтям закону Планка для теплового випромінення?
46. Який вигляд має формула Планка?
47. Що таке фотоефект?
48. Як залежить величина фотоструму насичення від інтенсивності монохроматичного світла, що падає на тіло?
49. Від чого залежить швидкість електрона для даної речовини при фотоефекті?
50. Що називають червоною межею фотоефекту?
51. Від якої з наведених нижче величин не залежить тиск світла?
52. В чому полягає ефект Комптона?
53. В чому полягає ефект Фарадея?
54. В чому полягає зовнішній фотоефект?
55. Що відбувається під час фотоефекту?
56. Від чого залежить зміна довжини хвилі в ефекті Комптона?
57. Які зміни відбуваються в атомі речовини під час ефекту Комптона?
58. Чому дорівнює комптонівська довжина хвилі?
59. Що вивчається в дослідах Лебедєва?

Квантова механіка

60. Що саме стверджує співвідношення невизначеностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$?
61. Нехай стан квантової частинки описується хвильовою функцією $\psi(\vec{r})$. Яким тоді виразом визначається імовірність того, що частинку можна знайти в об'ємі ΔV?
62. Що стверджує принцип відповідності в квантовій механіці?
63. Що стверджую принцип додатковості в квантовій механіці?
64. Що стверджує принцип причинності в квантовій механіці?
65. Що стверджує принцип суперпозиції станів в квантовій механіці?
66. Що стверджує умова нормування хвильової функції?
67. Що стверджує принцип суперпозиції хвильової функції?
68. Що стверджує умова обмеженості хвильової функції?
69. Що стверджує умова невід'ємності квадрату модуля хвильової функції?
70. Який вигляд має рівняння Шредингера в загальному випадку?
71. Який вигляд має рівняння Шредингера в операторному вигляді?
72. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера в загальному випадку?
73. Чому дорівнює оператор Лапласа?
74. Чому дорівнює оператор Лапласа в одновимірному випадку?
75. Що вивчалося в дослідах Девісона та Джермера?
76. Що вивчалося в дослідах Штерна?
77. Чому дорівнює потенціальна енергія U квантової частинки в необмеженому просторі?
78. Чому дорівнює потенціальна енергія U квантової частинки в одновимірній нескінченно високій потенціальній ямі з абсолютно непроникними стінками?
79. Чому дорівнює енергія квантової частинки в одновимірній нескінченно високій потенціальній ямі з абсолютно непроникними стінками?
80. Чому дорівнює мінімальна енергія квантової частинки в одновимірній нескінченно високій потенціальній ямі з абсолютно непроникними стінками?
81. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера для вільної квантової частинки?
82. Який вигляд має стаціонарне рівняння Шредингера для квантової частинки в одновимірній нескінченно високій потенціальній ямі з абсолютно непроникними стінками?

Квантова_теорія_будови_атомів

83. Чому дорівнює магнетон Бора?
84. Який вигляд має спектр випромінювання окремих атомів, що не взаємодіють один з одним?
85. Які спектрами поглинання має окремий атом?
86. Що описує головне квантове число?
87. Що описує азимутальне (орбитальне) квантове число?

88. Що описує магнітне квантове число?
89. Що описує спінове квантове число?
90. Як називають електрон з $l = 0$?
91. Як називають електрон з $l = 1$?
92. Як називають електрон з $l = 2$?
93. Як називають електрон з $l = 3$?
94. Що називають ефектом Зеємана?
95. Що називають ефектом Штарка?
96. Чим визвано гальмівне випромінювання?
97. Чим визвано характеристичне випромінювання?
98. Чим визвано спонтанне випромінювання?
99. Чим викликано індуціроване випромінювання?

Квантова теорія будови молекул

100. Який вигляд має спектр випромінювання окремих молекул, що не взаємодіють одна з одною?
101. Який тип зв'язку утримує атоми водню в положенні рівноваги в молекулі водню?
102. Який тип зв'язку утримує атоми в положенні рівноваги в молекулі повареної солі $NaCl$?
103. Який тип зв'язку утримує атоми водню в положенні рівноваги в молекулі водню?
104. Які спектри поглинання має молекула?
105. Який закон фізики обумовлює відштовхування атомів в молекулі на малих відстанях?
106. Притяжіння атомів в молекулі $NaCl$ зумовлене

ЛІТЕРАТУРА

1. Методичні вказівки до ПЗ з курсу фізики (частина 1)/Упоряд.: В.О.Стороженко та ін. –Харків:ХНУРЕ, 2013. –152с. (В-7891 фіз,В-7987 фіз)
2. Методичні вказівки до ПЗ з фізики (частина2)/Упоряд.: В.О.Стороженко та ін. –Харків:ХНУРЕ, 2013. –140с. (В-7990 фіз,В-7777 фіз)
3. Загальна фізика з прикладами і задачами. Частина 2. Електрика та магнетизм: навч. посібник./ І.М. Кібець та ін. –Харків: «Компанія СМІТ», 2009-424с. (53(07) к74);
4. Методичні вказівки до лабораторних робіт (2 частина). Скл. Коваленко О.М., Лазаренко О.В. та ін. – Харків:ХНУРЕ, 2006.(В-6953фіз)
5. Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Частина 3. Оптика. Атомна фізика та фізика твердого тіла / Упор. Малик С.Б. та ін.- Харків: ХНУРЕ, 2011(В-7776фіз)

6. Збірник тестів з курсу фізики/ О.М. Коваленко та ін. – Харків: ХНУРЕ,2006. –124с. (53(07)341)